7

14

ЕГЭ 2020

Под редакцией
И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА

С. А. Шестаков, И. В. Ященко

ФУНКЦИИ, ЗАДАННЫЕ ГРАФИКАМИ, И ИХ ПРОИЗВОДНЫЕ

14
Базовый

7
Профильный

ФГОС

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

ЕГЭ 2020

МАТЕМАТИКА

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

С. А. Шестаков, И. В. Ященко

ЕГЭ 2020. Математика
Функции, заданные графиками, и их производные

Задача 7 (профильный уровень)
Задача 14 (базовый уровень)

Рабочая тетрадь

Под редакцией И. В. Ященко

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС)

Москва
Издательство МЦНМО
2020

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Ш51

Шестаков С. А., Ященко И. В.

Ш51 ЕГЭ 2020 Математика. Функции, заданные графиками, и их производные. Задача 7 (профильный уровень). Задача 14 (базовый уровень). Рабочая тетрадь / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2020. — 160 с.

ISBN 978-5-4439-1407-7

Рабочая тетрадь по математике серии «ЕГЭ 2020. Математика» ориентирована на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче Единого государственного экзамена по математике в 2020 году по базовому и профильному уровням. В рабочей тетради представлены задачи по одной позиции контрольных измерительных материалов ЕГЭ-2020.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль знаний по задачам, посвящённым геометрическому смыслу производной. Рабочая тетрадь ориентирована на один учебный год, однако при необходимости позволит в кратчайшие сроки восполнить пробелы в знаниях выпускника.

Тетрадь предназначена для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

12+

ISBN 978-5-4439-1407-7

Предисловие

Это пособие предназначено для подготовки к решению задач по теме «Производная, её физический и геометрический смысл» и, в частности, задачи 7 профильного ЕГЭ по математике и задачи 14 базового уровня. Помимо тренировочных и диагностических работ и примеров решения типовых заданий оно содержит пояснительные тексты, в которых сделана попытка доступным языком объяснить, что такое производная и как её можно применять для исследования функций. Такой подход позволяет подготовиться к решению задач по данной теме даже в том случае, если по каким-то причинам она вообще не изучалась в школе или была пропущена.

Пособие состоит из двух частей, а каждая часть — из четырёх пунктов. В первой части приводятся основные сведения о прямой, рассматриваются задачи на вычисление и сравнение угловых коэффициентов прямых, изображённых на клетчатой бумаге; вводятся понятия секущей и касательной к графику неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки), рассказывается об их связи со средней и мгновенной скоростями движения, анализируются и решаются соответствующие задачи. Завершает первую часть пособия пункт, посвящённый наглядному определению производной, её физическому и геометрическому смыслам и проиллюстрированный решениями ряда типовых задач. Во второй части рассказывается, как по графику данной функции можно ответить на вопросы, связанные со свойствами её производной, и как производную, заданную графиком, можно использовать для исследования функций на монотонность, точки экстремума, вычисление наибольших и наименьших значений функции на отрезке. Все пояснительные тексты содержат примеры решения задач по теме пункта.

Каждая часть пособия открывается и завершается диагностической работой, а каждый пункт пособия содержит тренировочную работу по конкретной теме. Таким образом, в пособие включены 4 диагностические работы в двух вариантах каждая и 8 тренировочных работ в двух вариантах каждая. Это позволит использовать пособие как при работе в классе, так и при самостоятельном повторении или изучении темы, эффективно подготовиться к решению всех типов задач, которые могут встретиться в варианте ЕГЭ по математике на соответствующей позиции.

Пособие предназначено для учащихся, учителей, методистов и всех заинтересованных участников образовательного процесса.

Ответы:

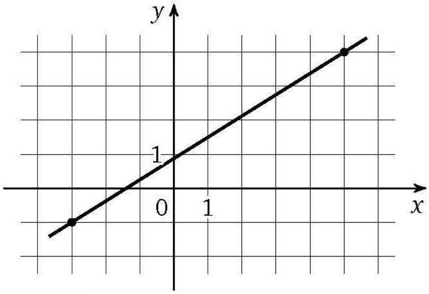
Часть 1. Понятие производной. Геометрический и физический смысл производной

Диагностическая работа 1

Вариант 1

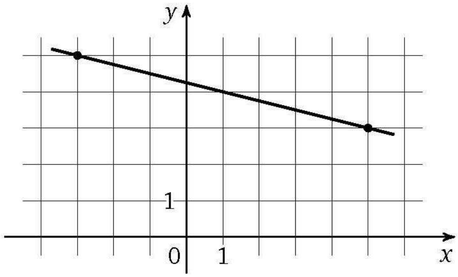
1

1. Найдите угловой коэффициент прямой, изображённой на рисунке.



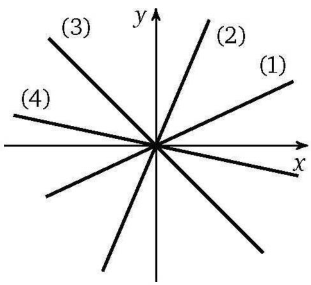
2

2. Найдите угловой коэффициент прямой, изображённой на рисунке.



3

3. На рисунке изображены 4 прямые. Расположите номера этих прямых в порядке возрастания угловых коэффициентов прямых. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров прямых.

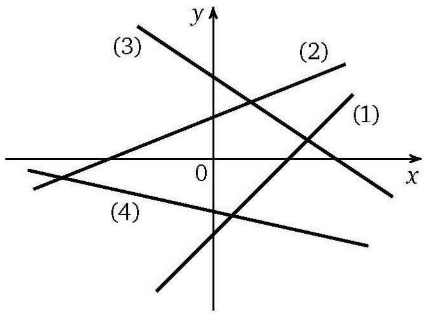


Образец написания:

1234567890-,

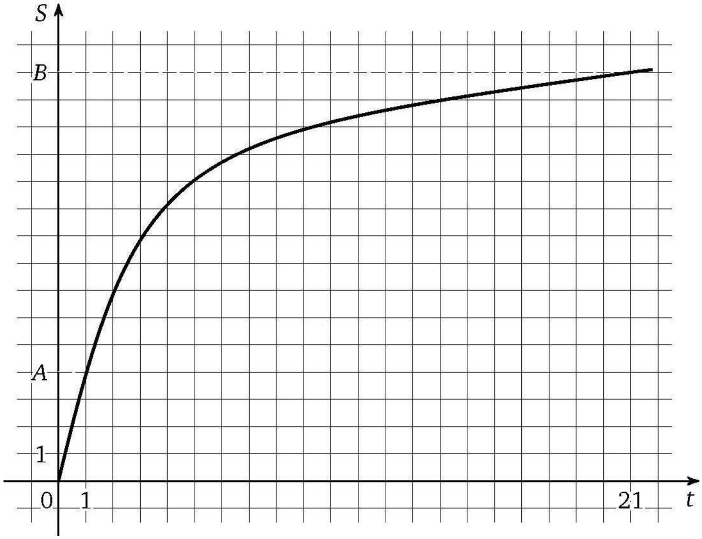
Ответы:

4. На рисунке изображены 4 прямые. Расположите номера этих прямых в порядке убывания угловых коэффициентов прямых. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров прямых.



4 ☐☐☐☐☐☐☐☐

5. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите среднюю скорость этого тела на участке AB (т. е. со второй по 21-ю секунду его движения включительно). Ответ дайте в км/ч.



5 ☐☐☐☐☐☐☐☐

Образец написания:

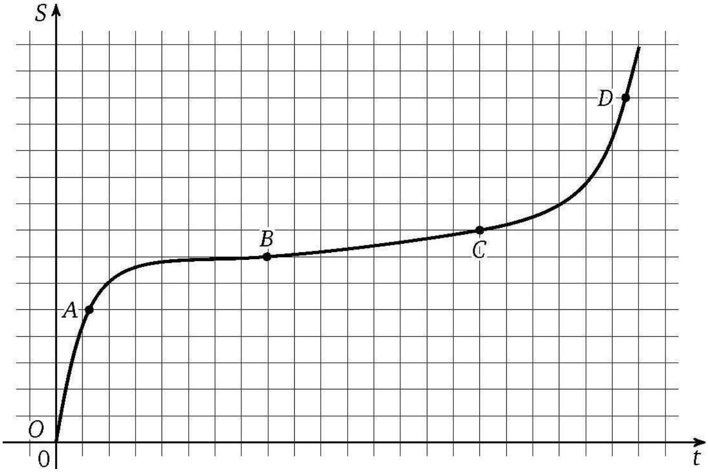
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

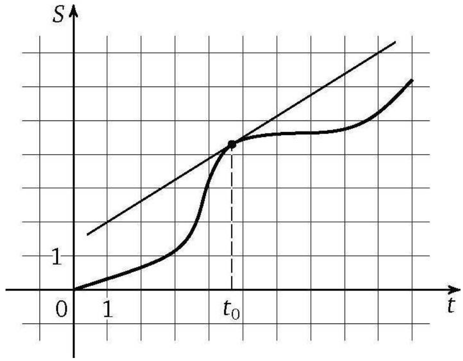
6

7

6. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время, по оси ординат — расстояние. Рассмотрите следующие участки пути: 1) BC, 2) AB, 3) AC, 4) AD. Расположите номера этих участков в порядке возрастания средних скоростей на этих участках. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров участков.



7. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела и касательная к этому графику в точке с абсциссой t_0. По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите мгновенную скорость этого тела в момент времени t_0. Ответ дайте в м/с.

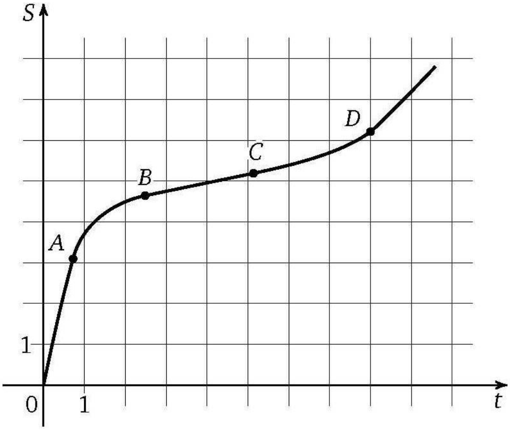


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

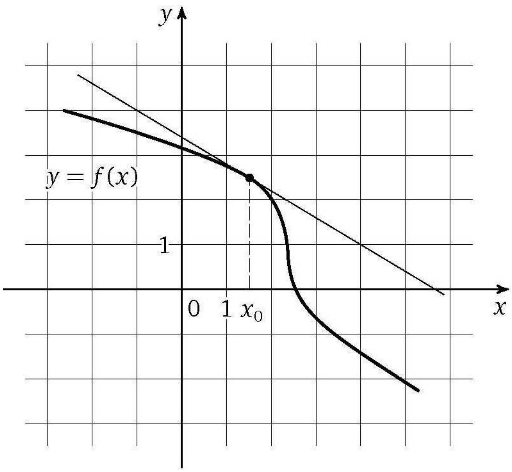
Ответы:

8. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела. На графике отмечены четыре точки: A, B, C, D, соответствующие четырём моментам времени движения этого тела: 1) t_A; 2) t_B; 3) t_C; 4) t_D. В какой из этих моментов времени скорость тела была наибольшей? В ответе укажите номер этого момента.



8

9. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в его точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.



9

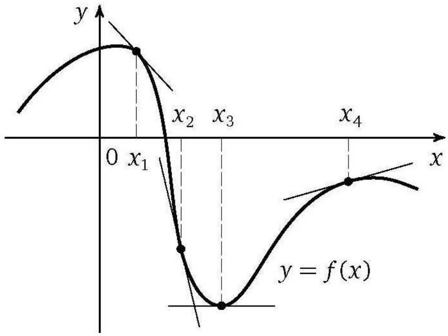
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

10

10. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательные к этому графику, проведённые в точках с абсциссами x_1, x_2, x_3, x_4.



Известно, что значение производной функции в каждой из этих точек равно одному из следующих чисел: 1) −4,32; 2) −1,23; 3) 0; 4) 0,21. Заполните таблицу, указав под каждой из производных номер, соответствующий её значению.

$f'(x_1)$	$f'(x_2)$	$f'(x_3)$	$f'(x_4)$

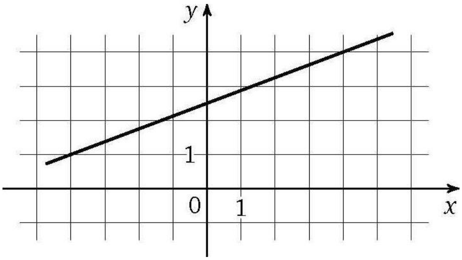
В ответе запишите полученную последовательность номеров без скобок, запятых, пробелов и прочих символов.

Образец написания:

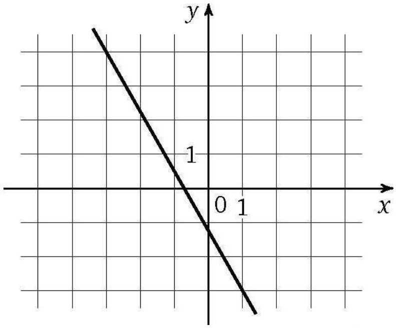
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вариант 2

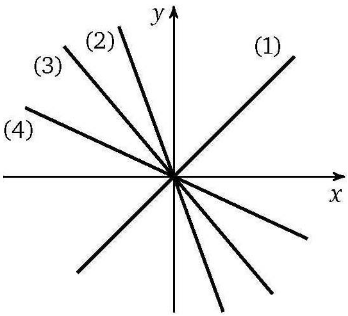
1. Найдите угловой коэффициент прямой, изображённой на рисунке.



2. Найдите угловой коэффициент прямой, изображённой на рисунке.



3. На рисунке изображены 4 прямые. Расположите номера этих прямых в порядке возрастания угловых коэффициентов прямых. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров прямых.



Ответы:

1

2

3

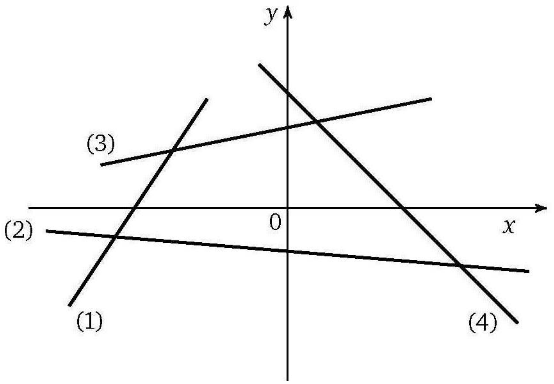
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

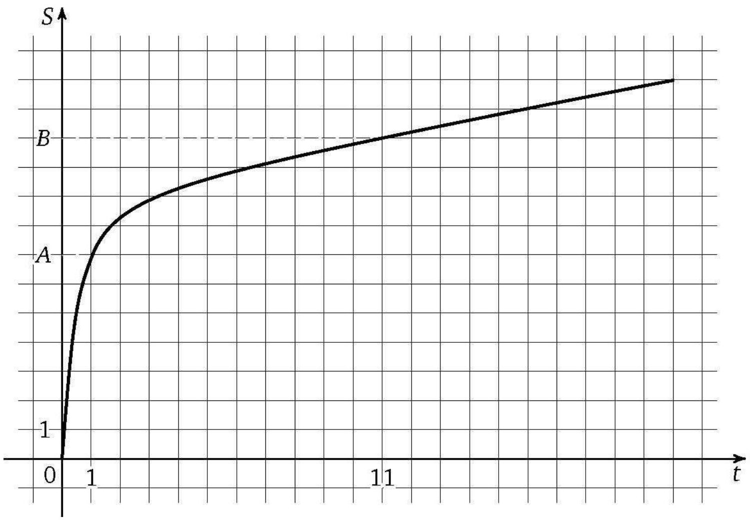
4

4. На рисунке изображены 4 прямые. Расположите номера этих прямых в порядке убывания угловых коэффициентов прямых. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров прямых.



5

5. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите среднюю скорость этого тела на участке AB (т. е. со второй по 11-ю секунду его движения включительно). Ответ дайте в км/ч.

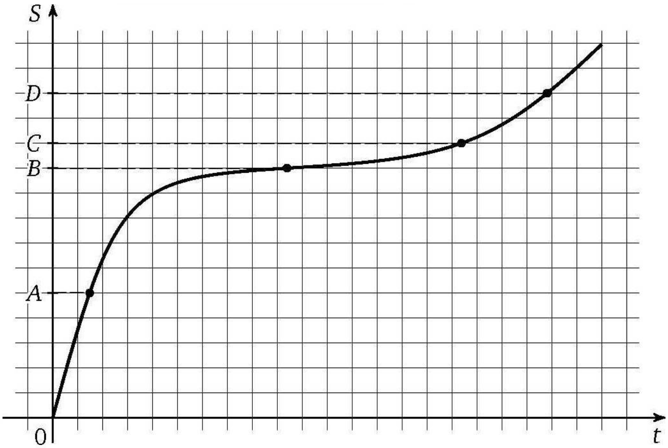


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

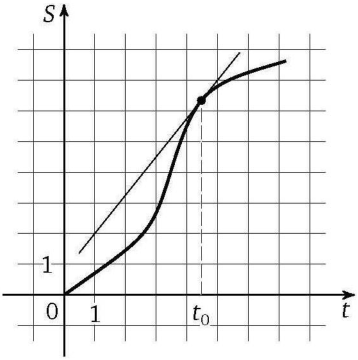
Ответы:

6. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время, по оси ординат — расстояние. Рассмотрите следующие участки пути: 1) AB, 2) AC, 3) AD, 4) BC. Расположите номера этих участков в порядке возрастания средних скоростей на этих участках. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров участков.



6

7. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела и касательная к этому графику в точке с абсциссой t_0. По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите мгновенную скорость этого тела в момент времени t_0. Ответ дайте в м/с.



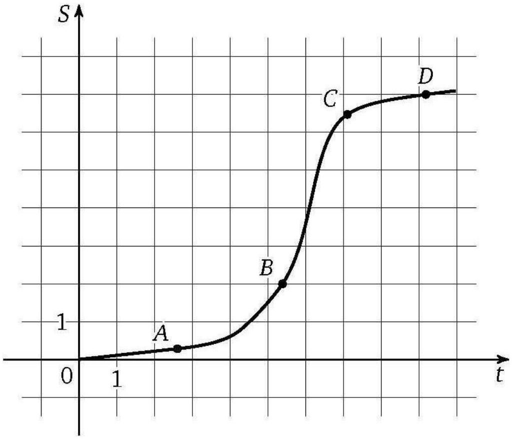
7

Образец написания:

1234567890–,

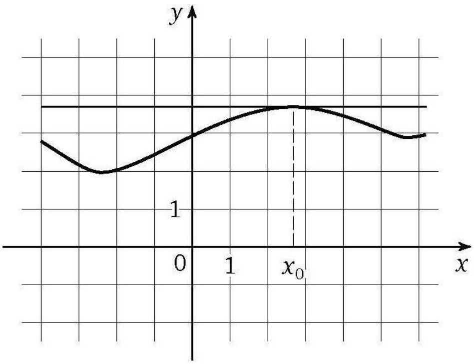
8

8. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела. На графике отмечены четыре точки: A, B, C, D, соответствующие четырём моментам времени движения этого тела: 1) t_A; 2) t_B; 3) t_C; 4) t_D. В какой из этих моментов времени скорость тела была наибольшей? В ответе укажите номер этого момента.



9

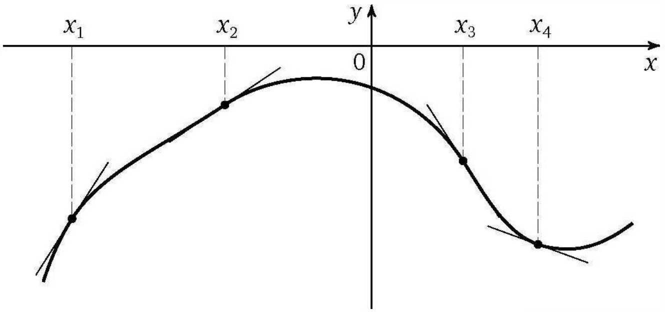
9. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в его точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.



Образец написания:

Ответы:

10. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательные к этому графику, проведённые в точках с абсциссами x_1, x_2, x_3, x_4.



Известно, что значение производной функции в каждой из этих точек равно одному из следующих чисел: 1) $-2{,}1$; 2) $-0{,}43$; 3) $1{,}23$; 4) $2{,}34$. Заполните таблицу, указав под каждой из производных номер, соответствующий её значению.

$f'(x_1)$	$f'(x_2)$	$f'(x_3)$	$f'(x_4)$

В ответе запишите полученную последовательность номеров без скобок, запятых, пробелов и прочих символов.

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

1.1. Прямая. Угловой коэффициент прямой

Для того чтобы измерить с допустимой точностью небольшое расстояние между двумя точками, достаточно обычной школьной линейки. Эта линейка является в некотором роде моделью (обычно пластиковой или деревянной) отрезка числовой (координатной) прямой. Но оказывается, между, казалось бы, довольно далёкими явлениями и понятиями нашего мира существуют не очевидные на первый взгляд связи, и прямую можно использовать, например, для измерения скорости или крутизны. Такое применение прямой требует знания основных её свойств и уверенного владения ими, поэтому вначале напомним эти свойства.

Уравнение прямой на плоскости имеет вид $y = kx + b$, а для построения этой прямой достаточно задать координаты двух её точек. Поскольку $y(0) = b$, прямая $y = kx + b$ пересекает ось ординат в точке $(0; b)$ (в силу чего коэффициент b называют начальной ординатой). Прояснить смысл коэффициента k удобней всего на примере прямой $y = kx$, проходящей через начало координат и точку $(1; k)$. Если $k > 0$, то тангенс угла α, который эта прямая образует с положительным направлением оси абсцисс, находится из прямоугольного треугольника с вершинами в точках $(0; 0)$, $(1; k)$ и $(1; 0)$ и катетами, равны-

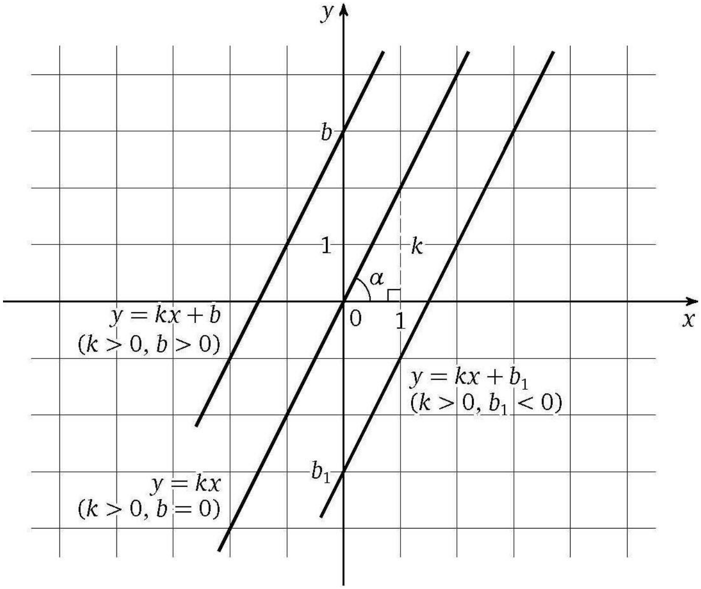


Рис. 1

ми 1 и k. Он будет равен отношению противолежащего этому углу катета к прилежащему: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{k}{1} = k$ (рис. 1). Именно этот угол является важнейшим для дальнейшего.

Если $k < 0$, то угол α будет тупым, а его тангенс — отрицательным. В этом случае он дополняет острый угол β прямоугольного треугольника с теми же вершинами $(0; 0)$, $(1; k)$ и $(1; 0)$ и катетами, равными 1 и $|k|$ до 180° (рис. 2). Поэтому $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\beta = -\frac{|k|}{1} = -|k|$. Поскольку в данном случае $k < 0$, то $|k| = -k$, и $\operatorname{tg}\alpha = k$. Таким образом, и в этом случае коэффициент k равен тангенсу угла, который прямая образует с положительным направлением оси абсцисс.

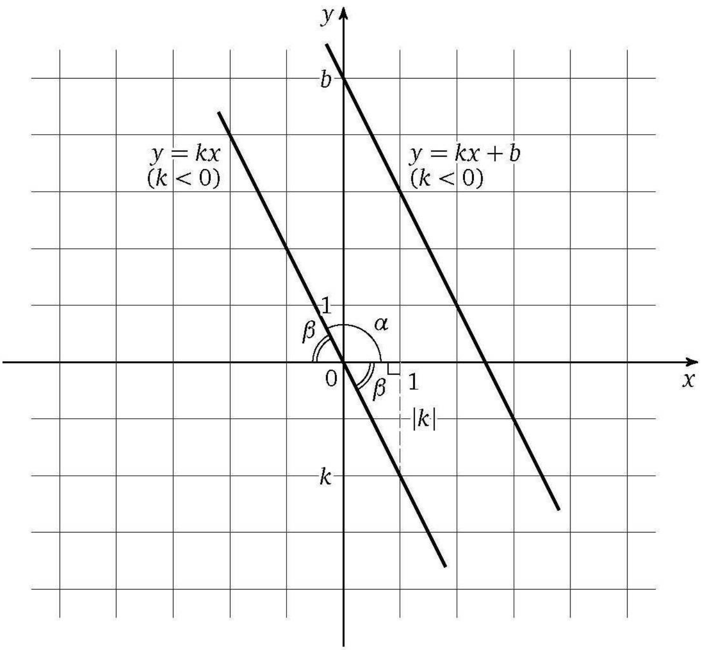


Рис. 2

Наконец, если $k = 0$, то уравнение прямой $y = kx + b$ принимает вид $y = b$. Такая прямая параллельна оси абсцисс (поскольку ординаты всех её точек одинаковы) и пересекает ось ординат в точке $(0; b)$ (рис. 3). В силу этого угол, который она образует с положительным направлением оси абсцисс, а значит, и его тангенс, равен нулю.

Прямая $y = kx + b$ параллельна прямой $y = kx$, её можно получить параллельным переносом прямой $y = kx$ вдоль оси ординат на b единиц вверх (при $b > 0$) или на $|b|$ единиц вниз (при $b < 0$); коэффициент k прямой $y = kx + b$ будет, разумеется, также равен $\operatorname{tg}\alpha$.

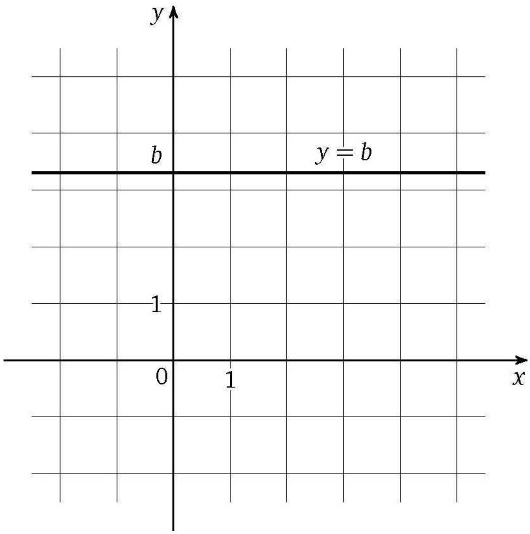


Рис. 3

Таким образом, во всех случаях коэффициент k равен тангенсу угла, который прямая $y = kx + b$ образует с положительным направлением оси абсцисс. Именно поэтому коэффициент k называется *угловым*.

Решение ряда задач ЕГЭ по математике, связанных с исследованием функций, сводится к вычислению углового коэффициента некоторой прямой, иногда изображённой на листе бумаги в клетку. Такие задачи решаются следующим образом: на прямой выбирают две точки, которые являются узлами клеток (т. е. точками с целочисленными координатами), и рассматривают прямоугольный треугольник, концами которого служат выбранные точки, а катеты параллельны осям координат. При этом если прямая образует с положительным направлением оси абсцисс острый угол, то искомый угловой коэффициент будет равен тангенсу соответствующего острого угла в построенном треугольнике. Если же этот угол тупой, то в ответ нужно записать число, противоположное найденному тангенсу (т. е. полученную величину со знаком «минус»). При этом лучше сразу в решении фиксировать знак углового коэффициента, чтобы потом не ошибиться, записывая ответ. Проконтролировать, правильно ли определён знак углового коэффициента, можно ещё и следующим образом: мысленно провести прямую, параллельную данной, через начало координат. Если полученная таким образом прямая лежит в первой и третьей четвертях, то угловой коэффициент положителен, если во второй и четвёртой — то отрицателен.

Пример 1 (задача 1 варианта 1 диагностической работы 1). Найдите угловой коэффициент прямой, изображённой на рис. 4.

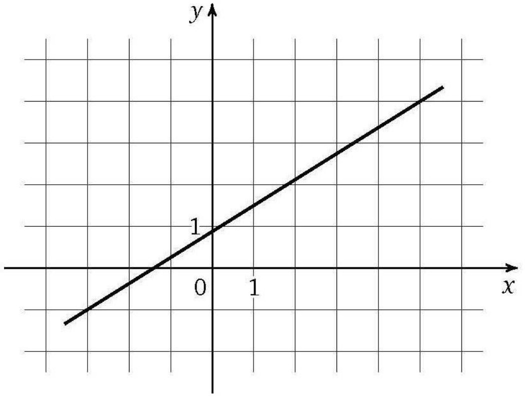


Рис. 4

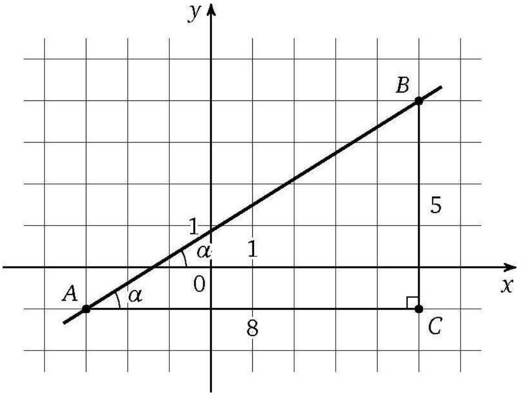


Рис. 5

Решение. Прямая образует с положительным направлением оси абсцисс острый угол (обозначим его α). Поэтому её угловой коэффициент k, равный тангенсу этого угла, положителен. Для вычисления k выберем на прямой две точки, расположенные в узлах сетки. Пусть это будут, например, точки A и B (рис. 5). Обозначим буквой C точку пересечения прямых, проходящих через выбранные точки параллельно осям координат, как показано на рисунке. Поскольку при параллельном переносе одной из двух прямых угол между нею и второй прямой не меняется, угол BAC будет равен углу α. Но тогда $k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{8} = 0{,}625$.

Ответ. 0,625.

Пример 2 (задача 2 варианта 1 диагностической работы 1). Найдите угловой коэффициент прямой, изображённой на рис. 6.

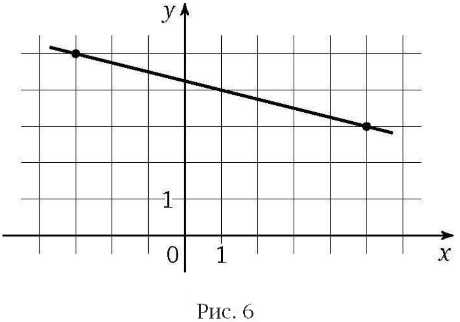


Рис. 6

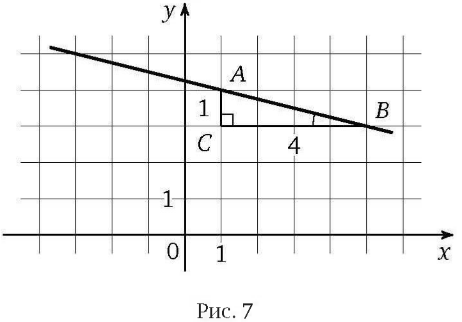


Рис. 7

Решение. Прямая, параллельная данной и проходящая через начало координат, очевидно, расположена во второй и четвёртой четвертях. Поэтому её угловой коэффициент k, равный в силу параллельности угловому коэффициенту данной прямой, отрицателен. Значит, он будет противоположен тангенсу острого угла ABC (рис. 7), т. е. $k = -\operatorname{tg}\angle ABC$. Поскольку $\operatorname{tg}\angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{4} = 0{,}25$, то $k = -0{,}25$.

Ответ. $-0{,}25$.

Пример 3 (задача 3 варианта 1 диагностической работы 1). На рис. 8 изображены 4 прямые. Расположите номера этих прямых в порядке возрастания угловых коэффициентов прямых. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров прямых.

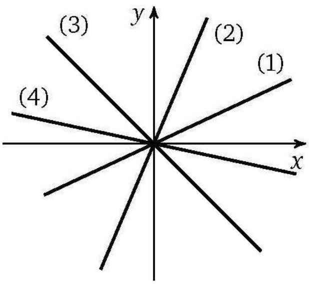


Рис. 8

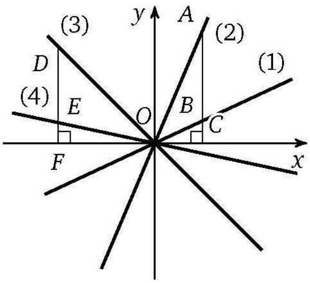


Рис. 9

Решение. Обозначим через k_1, k_2, k_3, k_4 угловые коэффициенты данных прямых соответственно их номерам. Прямые (1) и (2) расположены в первой и третьей координатных четвертях, поэтому их угловые коэффициенты положительны. Прямые (3) и (4) расположены во второй и четвёртой координатных четвертях, поэтому их угловые коэффициенты отрицательны и образуют пару наименьших угловых коэффициентов из данных четырёх. Выберем на прямой (2) точку A и проведём из неё перпендикуляр AC к оси абсцисс. Точку пересечения этого перпендикуляра с прямой (1) обозначим буквой B (рис. 9).

Тогда $k_1 = \operatorname{tg}\angle BOC = \frac{BC}{OC}$, $k_2 = \operatorname{tg}\angle AOC = \frac{AC}{OC}$. Поскольку $BC < AC$, то и $k_1 < k_2$.

Выберем на прямой (3) точку D и проведём из неё перпендикуляр DF к оси абсцисс. Точку пересечения этого перпендикуляра с прямой (4) обозначим буквой E. Тогда $k_3 = -\operatorname{tg}\angle DOF = -\frac{DF}{OF}$, $k_4 = -\operatorname{tg}\angle EOF = -\frac{EF}{OF}$. Поскольку $EF < DF$, то $\frac{EF}{OF} < \frac{DF}{OF}$, и $k_3 < k_4$. Таким образом, $k_3 < k_4 < k_1 < k_2$.

Ответ. 3412.

Задачи такого рода можно решать разными способами. Кому-то будет достаточно воспользоваться свойствами возрастания тангенса, для кого-то и приведённое решение может показаться сложным. В последнем случае можно использовать наглядные соображения. Если данные прямые мысленно перенести параллельно самим себе так, чтобы они проходили через начало координат, то угловые коэффициенты полученных прямых будут соответственно теми же, что и у данных. При этом часть полученных прямых окажется расположенной в первой и третьей координатных четвертях (угловые коэффициенты таких прямых положительны), а оставшаяся часть — во второй и четвёртой (угловые коэффициенты таких прямых отрицательны). Остаётся рассмотреть части этих прямых (лучи), лежащие в первой и второй четвертях. Для первой четверти: *чем выше прямая, тем больше её угловой коэффициент*. Для второй четверти: *чем выше прямая, тем меньше её угловой коэффициент*.

Пример 4 (задача 4 варианта 1 диагностической работы 1). На рис. 10 изображены 4 прямые. Расположите номера этих прямых в порядке убывания угловых коэффициентов прямых. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров прямых.

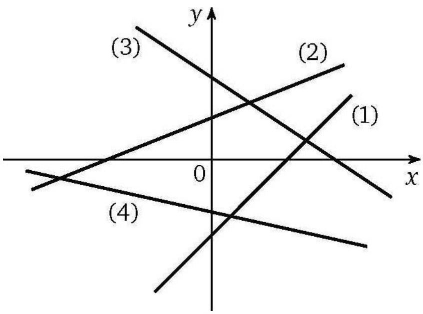


Рис. 10

Решение. Обозначим через k_1, k_2, k_3, k_4 угловые коэффициенты данных прямых соответственно их номерам. Если данные прямые мысленно перенести параллельно самим себе так, чтобы они проходили через начало координат, то угловые коэффициенты полученных прямых будут соответственно теми же, что и у данных.

При этом прямые, соответственно параллельные прямым (1) и (2), окажутся расположенными в первой и третьей координатных четвертях, поэтому их угловые коэффициенты положительны. Кроме того, лежащая в первой четверти часть прямой, параллельной прямой (1), окажется выше расположенной в той же четверти части прямой, параллельной прямой (2). Значит, $k_1 > k_2 > 0$. Прямые, соответственно параллельные прямым (3) и (4), окажутся расположенными во второй и четвёртой координатных четвертях, поэтому их угловые коэффициенты отрицательны. Кроме того, лежащая во второй четверти часть прямой, параллельной прямой (3), окажется выше расположенной в той же четверти части прямой, параллельной прямой (4). Значит, $k_3 < k_4 < 0$. Таким образом, $k_1 > k_2 > k_4 > k_3$.

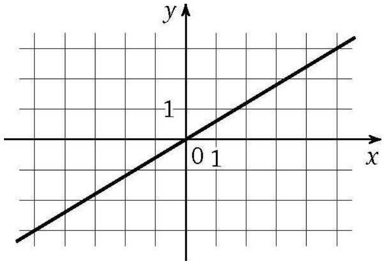
Ответ. 1243.

Ответы:

Тренировочная работа 1
Вариант 1

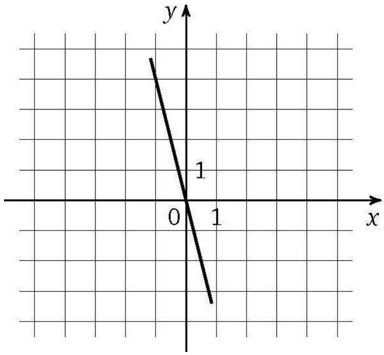
1

1. Найдите угловой коэффициент прямой, изображённой на рисунке.



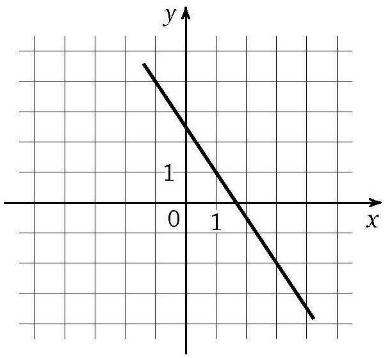
2

2. Найдите угловой коэффициент прямой, изображённой на рисунке.



3

3. Найдите угловой коэффициент прямой, изображённой на рисунке.



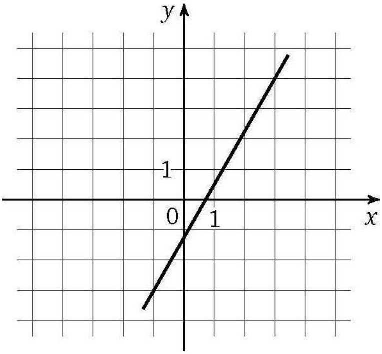
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вариант 1

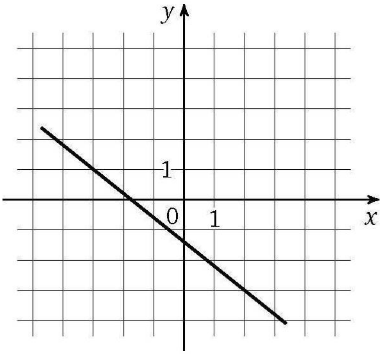
Ответы:

4. Найдите угловой коэффициент прямой, изображённой на рисунке.



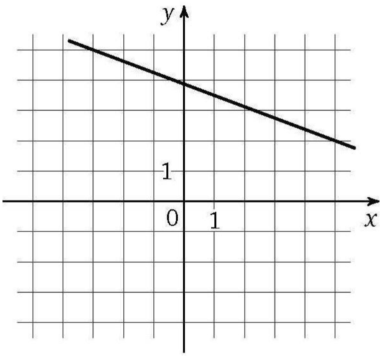
4

5. Найдите угловой коэффициент прямой, изображённой на рисунке.



5

6. Найдите угловой коэффициент прямой, изображённой на рисунке.



6

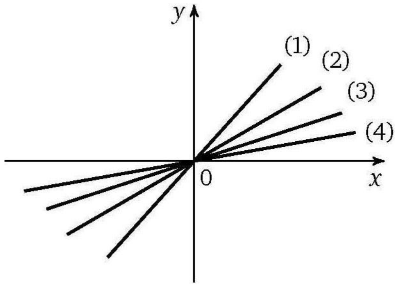
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

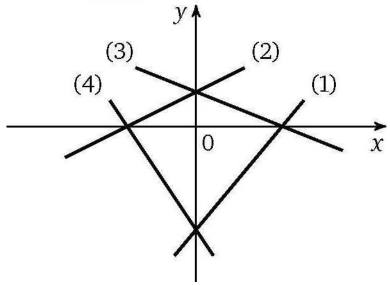
7

7. На рисунке изображены 4 прямые. Расположите номера этих прямых в порядке возрастания угловых коэффициентов прямых. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров прямых.



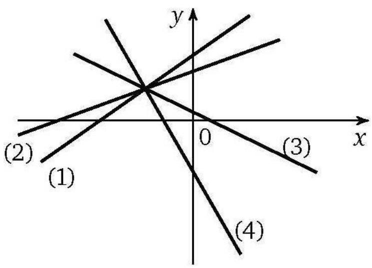
8

8. На рисунке изображены 4 прямые. Расположите номера этих прямых в порядке убывания угловых коэффициентов прямых. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров прямых.



9

9. На рисунке изображены 4 прямые. Расположите номера этих прямых в порядке возрастания угловых коэффициентов прямых. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров прямых.



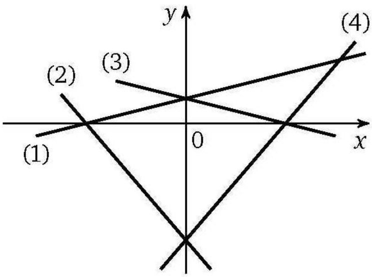
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вариант 2

Ответы:

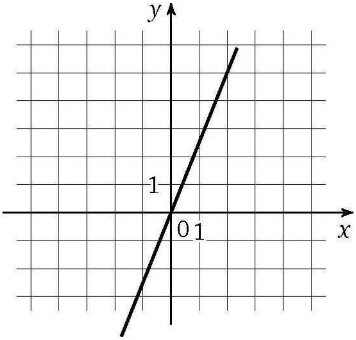
10. На рисунке изображены 4 прямые. Расположите номера этих прямых в порядке убывания угловых коэффициентов прямых. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров прямых.



10

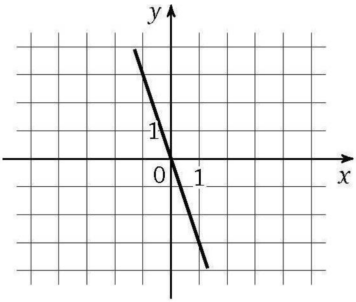
Вариант 2

1. Найдите угловой коэффициент прямой, изображённой на рисунке.



1

2. Найдите угловой коэффициент прямой, изображённой на рисунке.

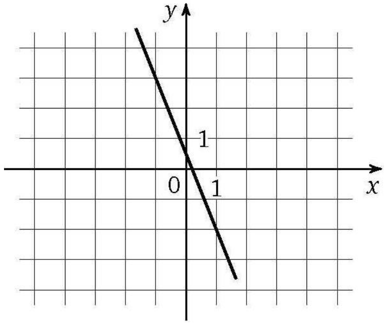


2

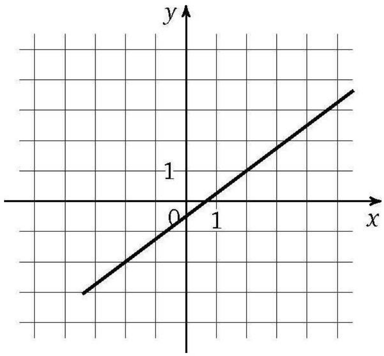
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

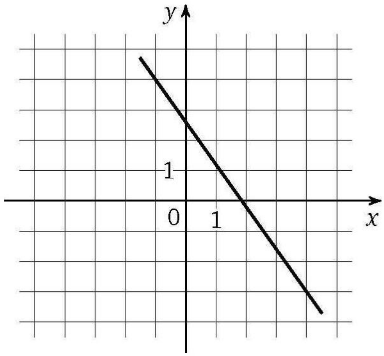
3. Найдите угловой коэффициент прямой, изображённой на рисунке.



4. Найдите угловой коэффициент прямой, изображённой на рисунке.



5. Найдите угловой коэффициент прямой, изображённой на рисунке.



Ответы:

3

4

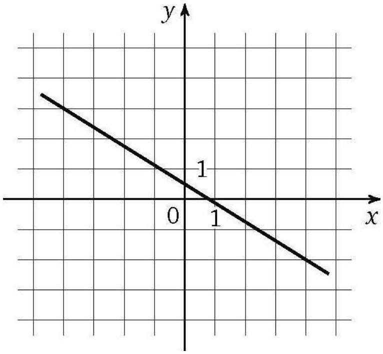
5

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

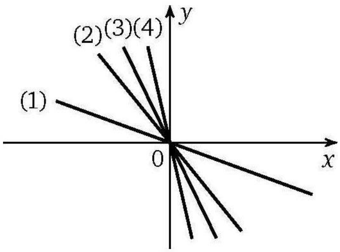
Ответы:

6. Найдите угловой коэффициент прямой, изображённой на рисунке.



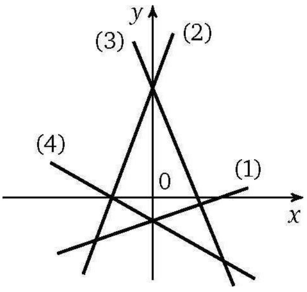
6

7. На рисунке изображены 4 прямые. Расположите номера этих прямых в порядке возрастания угловых коэффициентов прямых. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров прямых.



7

8. На рисунке изображены 4 прямые. Расположите номера этих прямых в порядке убывания угловых коэффициентов прямых. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров прямых.



8

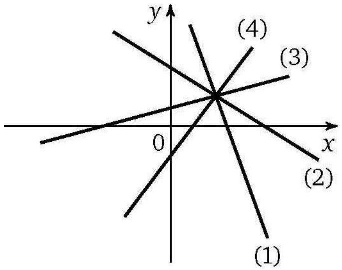
Образец написания:

1234567890–,

Ответы:

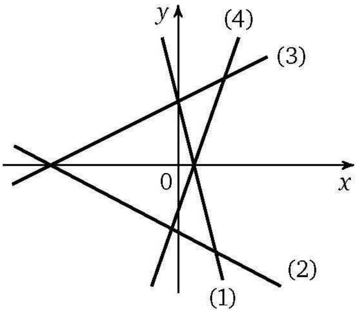
9

9. На рисунке изображены 4 прямые. Расположите номера этих прямых в порядке возрастания угловых коэффициентов прямых. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров прямых.



10

10. На рисунке изображены 4 прямые. Расположите номера этих прямых в порядке убывания угловых коэффициентов прямых. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров прямых.



Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

1.2. Понятие секущей. Угловой коэффициент секущей графика движения и средняя скорость

Раздел математики, знакомство с которым происходит в старшей школе, называется «Начала математического анализа». Его название является «говорящим»: овладев основами математического анализа, можно научиться анализировать функции, исследовать их на возрастание, убывание, наибольшие и наименьшие значения, и не только. Поскольку именно функции достаточно точно описывают различные реальные процессы, в том числе зависящие от времени: биологические, физические, химические, математический анализ является необходимой составляющей арсенала современного учёного и исследователя. С его помощью прогнозируют, как изменяются те или иные характеристики вещества, материала, процесса или явления со временем, моделируют новые современные механизмы, машины, разрабатывают технологии, осуществляют расчёты конструкций и сооружений и делают ещё очень многое другое. Поэтому исследование функций играет важную роль в современном мире.

Функции, которые изучаются в школьном курсе математики, за редчайшими исключениями являются, как говорят математики, *непрерывными*. Понятие непрерывности достаточно сложно в смысле формального описания, но для его понимания достаточно представления о непрерывной функции как функции, эскиз графика которой в любой части области её определения можно изобразить, не отрывая карандаша или ручки от бумаги. Например, линейная, квадратичная, тригонометрические функции и функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, графики которых изображены на рис. 1, являются непрерывными, а функция $y = h(x)$, график которой изображён на том же рисунке, непрерывной не является.

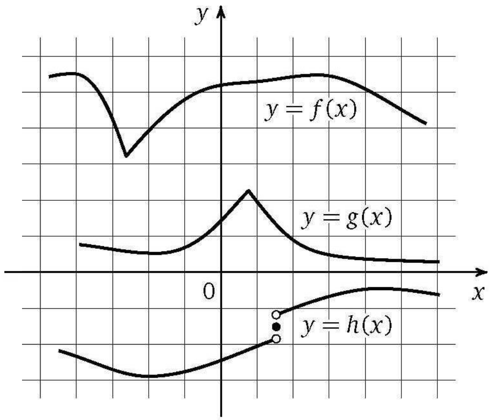


Рис. 1

Важнейшую часть непрерывных функций составляют так называемые *гладкие* функции. Даже если не вдаваться в суть этого термина (а без специальных знаний это сделать затруднительно), следует заметить, что он очень хорошо, почти визуально характеризует такие функции: их графики в любой части области определения изображаются сплошными гладкими линиями (кривыми), не имеющими изломов или

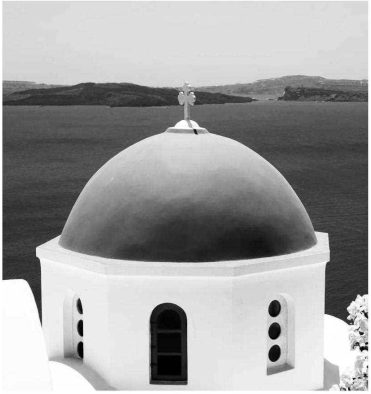


Рис. 2. «Гладкая» крыша

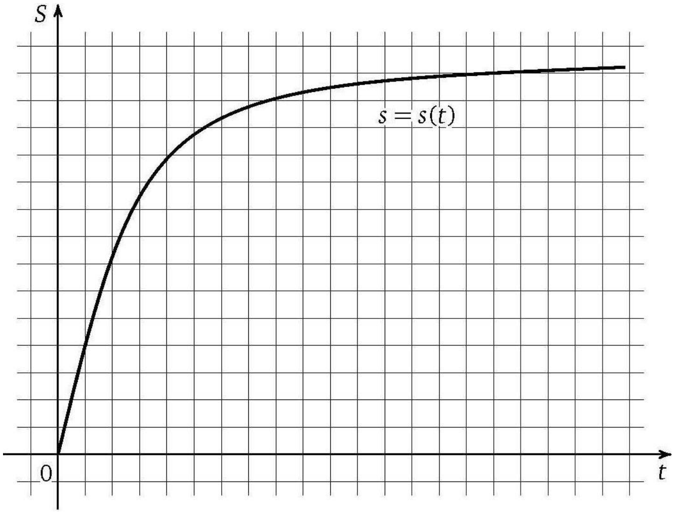
Рис. 3. «Негладкая» крыша

участков, похожих, например, на зубья пилы. Если вообразить поверхность, контуром которой служит график гладкой функции, то рука по такой поверхности будет скользить легко и свободно, не натыкаясь на углы или выбоины и описывая плавную линию.

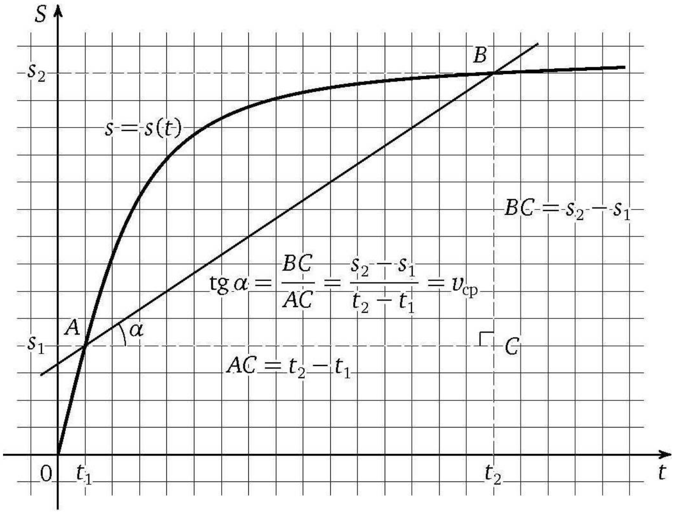
Прямая, парабола, каждая из ветвей гиперболы, синусоида — далеко не полный перечень графиков гладких функций. А вот функции $y=f(x)$, $y=g(x)$ и $y=h(x)$, графики которых которые изображены на рис. 1, гладкими не являются.

Обратим внимание на то, что процессы, зависящие от времени, являются, как правило, *неравномерными*. Это означает, что за равные промежутки времени исследуемая величина изменяется неодинаково. При *равномерном* процессе такая величина за равные промежутки времени изменяется одинаково. Например, при равномерном прямолинейном движении тело (материальная точка) проходит за равные промежутки времени равные расстояния, при неравномерном прямолинейном движении может проходить различные. Графиком равномерного прямолинейного движения будет прямая, графиком неравномерного прямолинейного движения — кривая. Далее будем рассматривать неравномерные прямолинейные движения, графиками которых являются гладкие кривые.

С точки зрения математики, при исследовании гладких функций не столь важно, какой реальный процесс описывает та или иная из них, например, движение или размножение бактерий в питательном бульоне: инструменты исследования от этого не зависят. Любопытно, что первые результаты такого исследования можно получить, основываясь только на уже имеющихся знаниях, в частности, на свойствах прямой. Выше уже отмечалось, что прямую можно использовать для «измерения» скорости. Поясним, как это можно сделать, на примере графика неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки), т. е. графика гладкой функции $s=s(t)$, изображённого на рис. 4 a) (по оси абсцисс откладывается время, по оси ординат — расстояние).



а)



б)

Рис. 4

Для этого отметим на графике функции $s = s(t)$ две точки $A(t_1; s_1)$ и $B(t_2; s_2)$, см. рис. 4*б*. Точка A соответствует моменту времени t_1, за которое тело прошло расстояние s_1, точка B — моменту времени t_2, за которое тело прошло расстояние s_2. Прямая

AB пересекает график функции $s = s(t)$ в двух точках и по аналогии с геометрией называется *секущей*. Проведём из точки A отрезок прямой, параллельной оси абсцисс, а из точки B — отрезок прямой, параллельной оси ординат, до их пересечения в точке C, см. рис. 4*б*. Из курса физики известно, что средняя скорость $v_{ср}$ есть отношение пройденного телом расстояния ко времени, за которое это расстояние пройдено. Поэтому на участке AB скорость $v_{ср}$ находится с помощью формулы $v_{ср} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$. Но $s_2 - s_1 = BC$, $t_2 - t_1 = AC$, следовательно, $v_{ср} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол, который прямая AB образует с прямой AC, параллельной оси абсцисс, а значит, и с осью абсцисс. Таким образом, оказывается, что средняя скорость численно равна угловому коэффициенту прямой AB, т. е. прямую и впрямь можно использовать для измерения скорости!

Находя или оценивая угловые коэффициенты секущих к графику неравномерного прямолинейного движения, можно отвечать на вопросы о величине средней скорости на определённом участке пути, сравнивать средние скорости на различных участках пути и т. п. Такие задачи будут отличаться от задач п. 1.1 только наличием графика движения. Заметим, что график, похожий на изображённый на рис. 4, может описывать не только неравномерное прямолинейное движение, но и любой другой реальный неравномерный процесс, зависящий от времени. Следовательно,

— *угловой коэффициент секущей, проходящей через две точки графика неравномерного прямолинейного движения тела, численно равен средней скорости тела на участке пути, соответствующем этим двум точкам;*
— *угловой коэффициент секущей, проходящей через две точки графика гладкой функции, зависящей от времени, численно равен средней скорости изменения этой функции за промежуток времени, соответствующий этим двум точкам.*

Пример 1 (задача 5 варианта 1 диагностической работы 1)**.** На рис. 5 изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите среднюю скорость этого тела на участке AB (т. е. со второй по 21-ю секунду его движения включительно). Ответ дайте в км/ч.

Решение. Отметим на графике точки C и D, отвечающие точкам A и B соответственно (рис. 6).

Проведём из точки C отрезок прямой, параллельной оси абсцисс, а из точки D — отрезок прямой, параллельной оси ординат, до их пересечения в точке E. Искомая скорость будет численно равна угловому коэффициенту прямой CD, т. е. $v_{ср} = \frac{DE}{CE}$. Поскольку $DE = 11$, $CE = 20$, находим, что $v_{ср} = \frac{11}{20}$ м/с. Осталось перевести найденную величину в км/ч. Так как 1 км = 1000 м, а 1 ч = 3600 с, получим, что 1 км/ч $= \frac{1000}{3600}$ м/с $= \frac{5}{18}$ м/с. Поэтому для того, чтобы перевести v км/ч в м/с, нужно

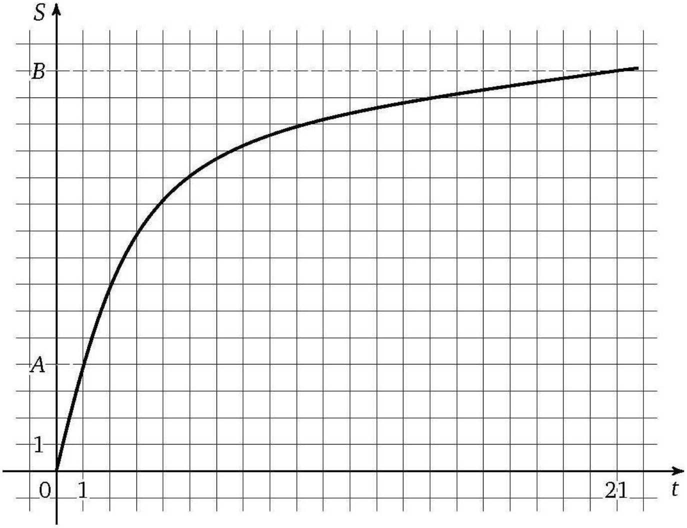


Рис. 5

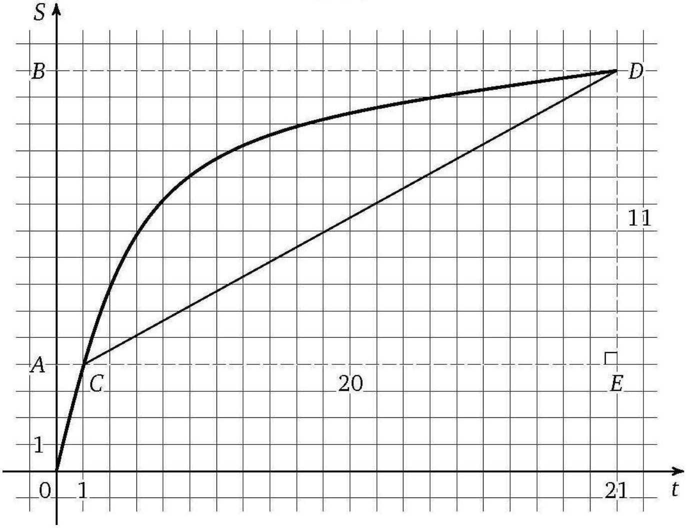


Рис. 6

v умножить на $\frac{5}{18}$, а для того чтобы перевести v м/с в км/ч, нужно v умножить на $\frac{18}{5} = 3{,}6$. В нашем случае $v_{\text{ср}} = \frac{11}{20} \cdot \frac{18}{5} = \frac{198}{100} = 1{,}98$ км/ч.

Ответ. 1,98.

Пример 2 (задача 6 варианта 1 диагностической работы 1)**.** На рис. 7 изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время, по оси ординат — расстояние. Рассмотрите следующие участки пути: 1) AD, 2) BC, 3) BD, 4) CD. Расположите номера этих участков в порядке возрастания средних скоростей на этих участках. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров участков.

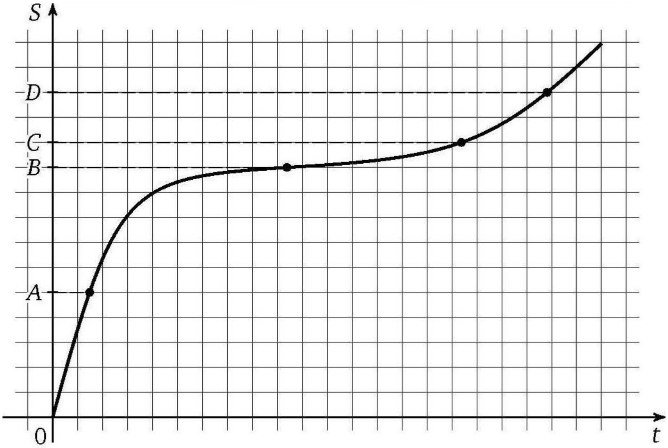


Рис. 7

Решение. Точки графика, отвечающие данным, обозначим соответственно через A_1, B_1, C_1, D_1 (рис. 8).

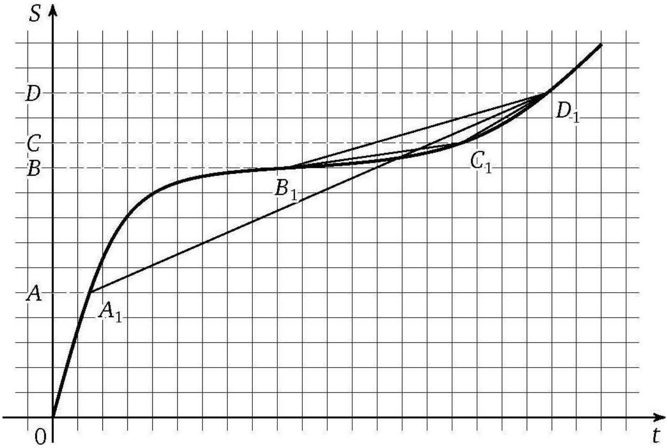


Рис. 8

Средние скорости на данных участка пути численно равны угловым коэффициентам k_1, k_2, k_3, k_4 прямых A_1D_1, B_1C_1, B_1D_1 и C_1D_1 соответственно. Углы, которые образуют эти прямые с горизонтальными линиями сетки (а значит, и с положительным направлением оси абсцисс), являются острыми. Значит, их тангенсы положительны и большему углу будет соответствовать бóльший угловой коэффициент. Поэтому угловой коэффициент прямой B_1D_1 будет больше углового коэффициента прямой B_1C_1 (сравните углы, которые эти прямые образуют, например, с прямой BB_1), но меньше углового коэффициента прямой A_1D_1, который, в свою очередь, меньше углового коэффициента прямой C_1D_1 (сравните углы, которые прямые B_1D_1, A_1D_1 и C_1D_1 образуют, например, с прямой DD_1). Следовательно, $k_2 < k_3 < k_1 < k_4$.

Ответ. 2314.

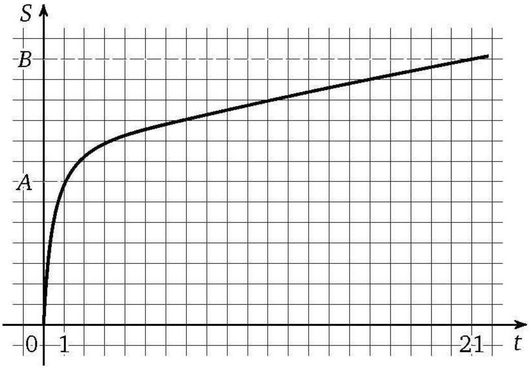
Ответы:

Тренировочная работа 2

Вариант 1

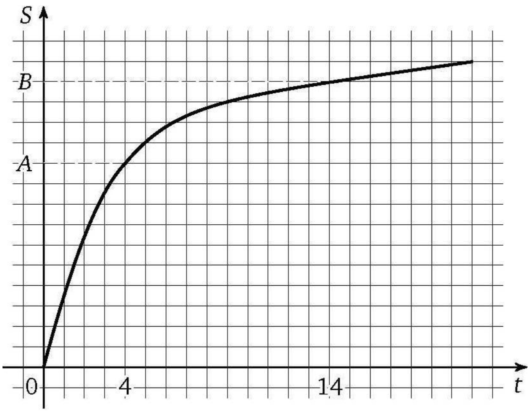
1

1. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите среднюю скорость этого тела на участке AB (т. е. со второй по 21-ю секунду его движения включительно). Ответ дайте в м/с.



2

2. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите среднюю скорость этого тела на участке AB (т. е. с пятой по 14-ю секунду его движения включительно). Ответ дайте в м/с.

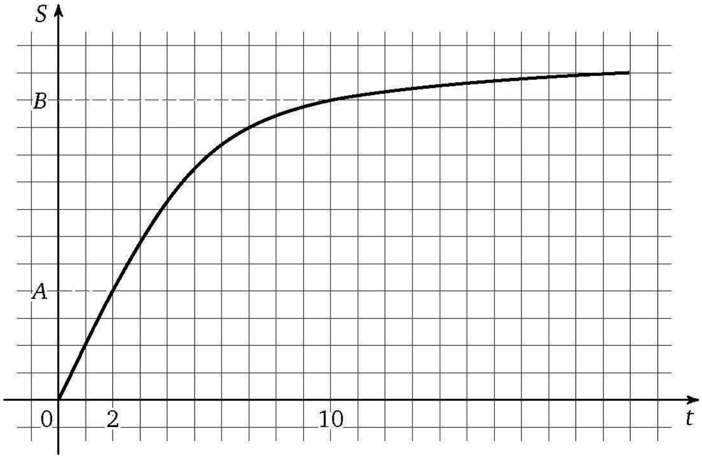


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

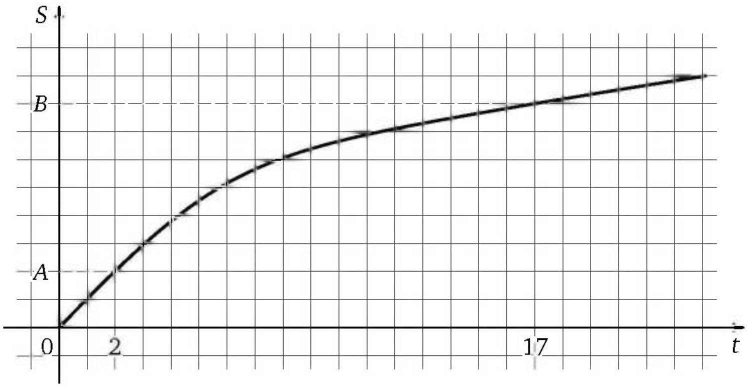
Ответы:

3. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите среднюю скорость этого тела на участке AB (т. е. с третьей по 10-ю секунду его движения включительно). Ответ дайте в м/с.



3

4. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите среднюю скорость этого тела на участке AB (т. е. с третьей по 17-ю секунду его движения включительно). Ответ дайте в км/ч.



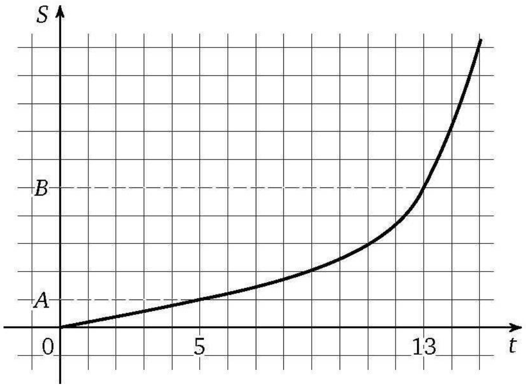
4

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

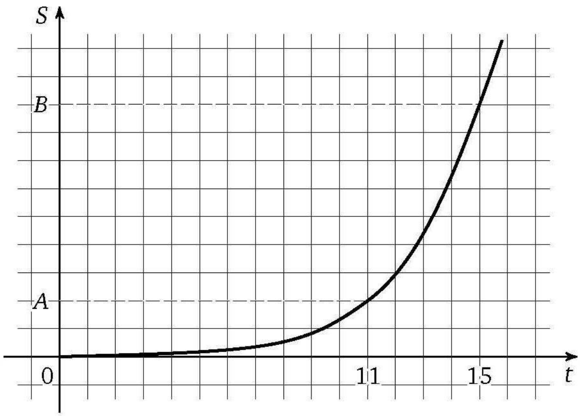
5

5. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите среднюю скорость этого тела на участке *AB* (т. е. с шестой по 13-ю секунду его движения включительно). Ответ дайте в км/ч.



6

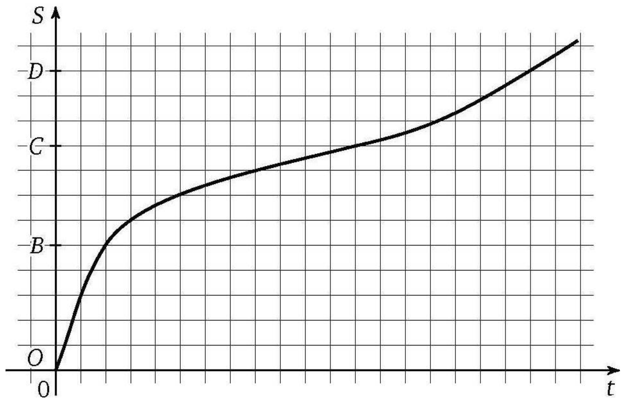
6. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите среднюю скорость этого тела на участке *AB* (т. е. с 12-й по 15-ю секунду его движения включительно). Ответ дайте в км/ч.



Образец написания:

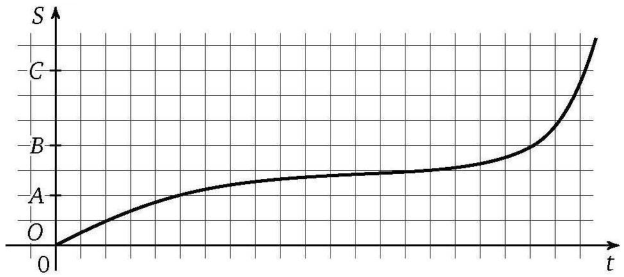
Ответы:

7. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время, по оси ординат — расстояние. Рассмотрите следующие участки пути: 1) BD, 2) OC, 3) OB, 4) OD. Расположите номера этих участков в порядке возрастания средних скоростей на этих участках. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров участков.



7

8. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время, по оси ординат — расстояние. Рассмотрите следующие участки пути: 1) OA, 2) OB, 3) OC, 4) BC. Расположите номера этих участков в порядке убывания средних скоростей на этих участках. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров участков.



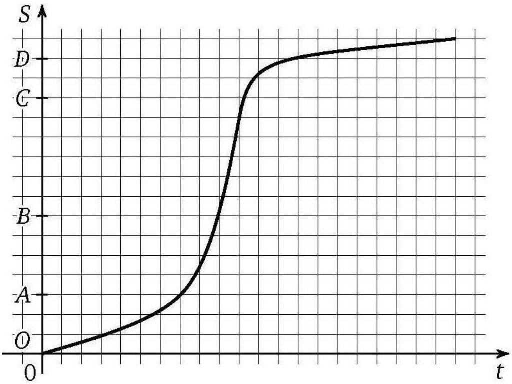
8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

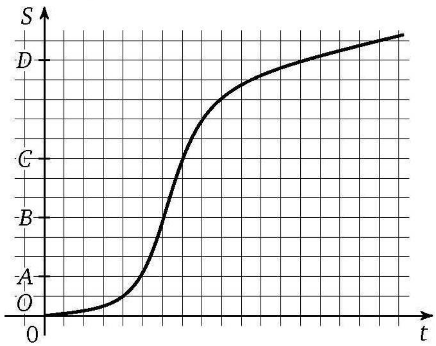
9

9. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время, по оси ординат — расстояние. Рассмотрите следующие участки пути: 1) OA, 2) OB, 3) OC, 4) OD. Расположите номера этих участков в порядке возрастания средних скоростей на этих участках. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров участков.



10

10. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время, по оси ординат — расстояние. Рассмотрите следующие участки пути: 1) OA, 2) OB, 3) OC, 4) OD. Расположите номера этих участков в порядке убывания средних скоростей на этих участках. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров участков.



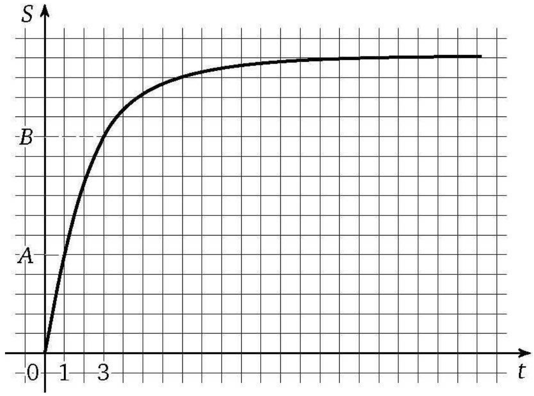
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

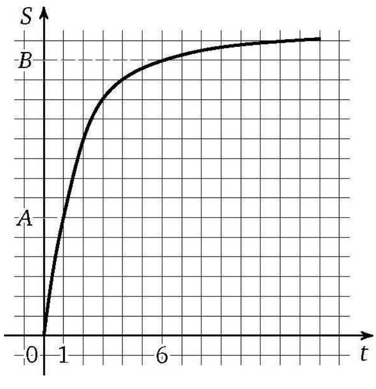
Вариант 2

1. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите среднюю скорость этого тела на участке AB (т. е. со второй по третью секунду его движения включительно). Ответ дайте в м/с.



1

2. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите среднюю скорость этого тела на участке AB (т. е. со второй по шестую секунду его движения включительно). Ответ дайте в м/с.



2

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

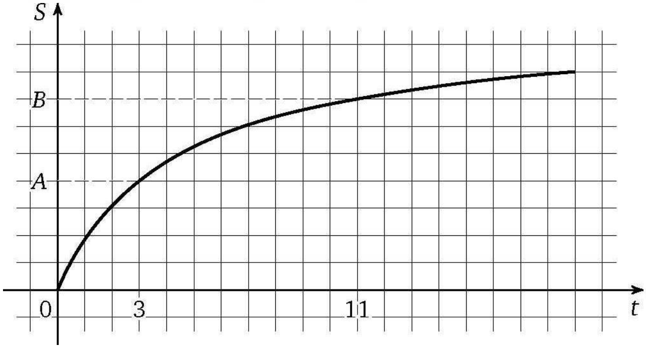
3

4

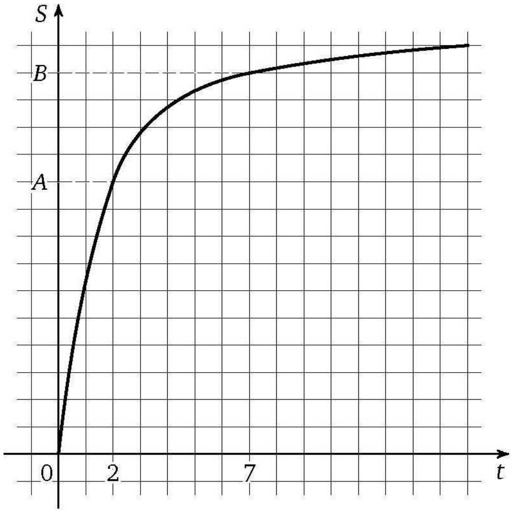
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

3. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите среднюю скорость этого тела на участке AB (т. е. с четвёртой по 11-ю секунду его движения включительно). Ответ дайте в м/с.

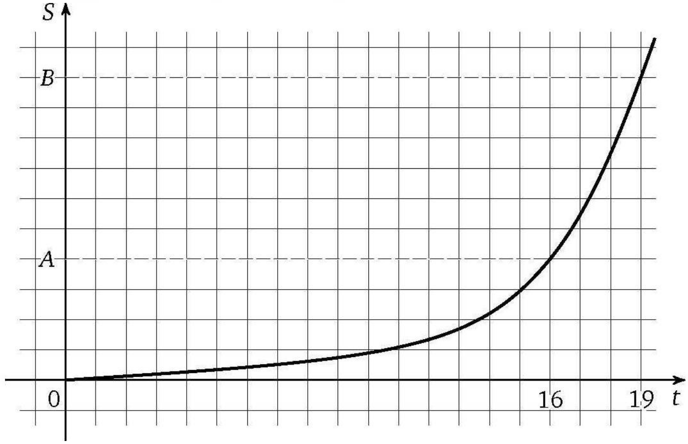


4. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите среднюю скорость этого тела на участке AB (т. е. с третьей по седьмую секунду его движения включительно). Ответ дайте в км/ч.



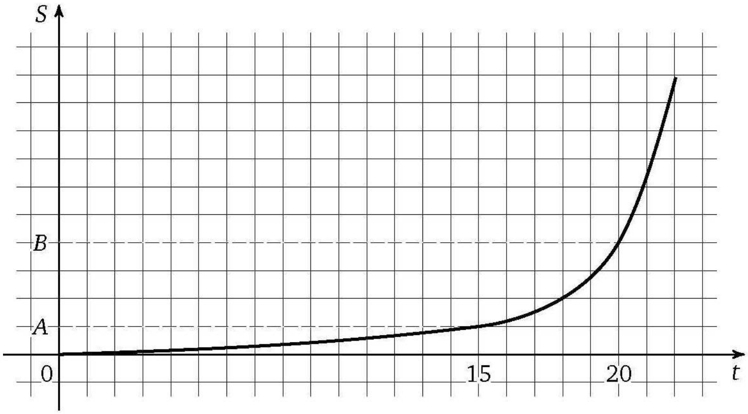
Ответы:

5. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите среднюю скорость этого тела на участке *AB* (т. е. с 17-й по 19-ю секунду его движения включительно). Ответ дайте в км/ч.



5

6. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите среднюю скорость этого тела на участке *AB* (т. е. с 16-й по 20-ю секунду его движения включительно). Ответ дайте в км/ч.



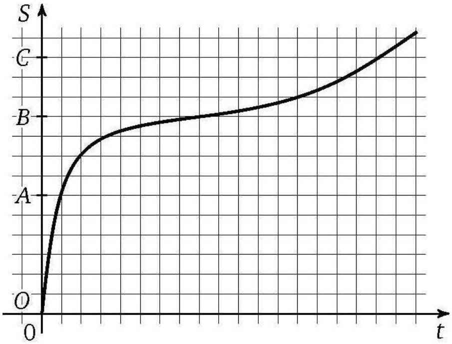
6

Образец написания:

1234567890–,

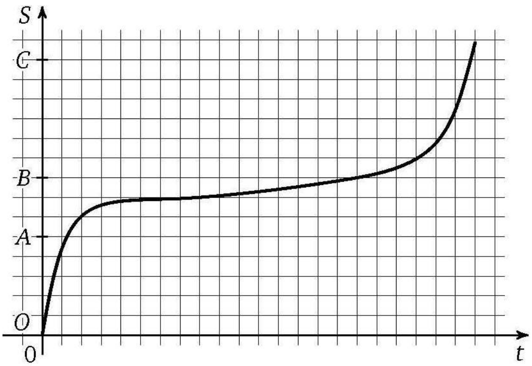
7

7. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время, по оси ординат — расстояние. Рассмотрите следующие участки пути: 1) AC, 2) OA, 3) OB, 4) OC. Расположите номера этих участков в порядке возрастания средних скоростей на этих участках. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров участков.



8

8. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время, по оси ординат — расстояние. Рассмотрите следующие участки пути: 1) OA, 2) OB, 3) OC, 4) AB. Расположите номера этих участков в порядке убывания средних скоростей на этих участках. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров участков.

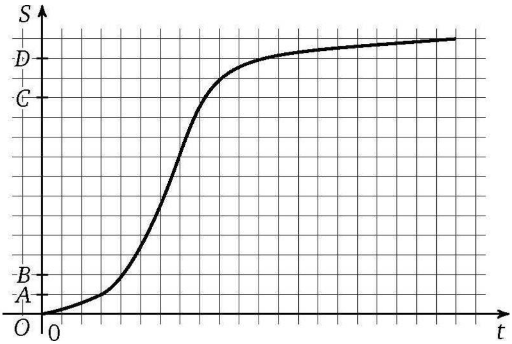


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

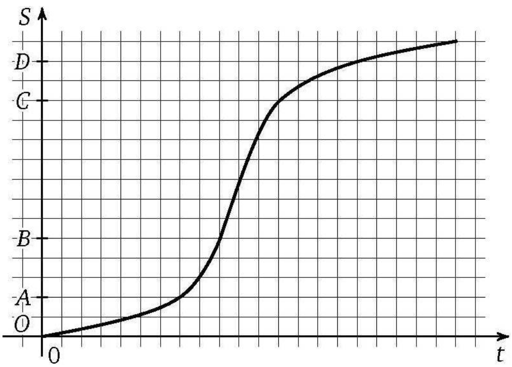
Ответы:

9. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время, по оси ординат — расстояние. Рассмотрите следующие участки пути: 1) OA, 2) OB, 3) OC, 4) OD. Расположите номера этих участков в порядке возрастания средних скоростей на этих участках. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров участков.



9

10. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки). По оси абсцисс откладывается время, по оси ординат — расстояние. Рассмотрите следующие участки пути: 1) OD, 2) OC, 3) OB, 4) OA. Расположите номера этих участков в порядке убывания средних скоростей на этих участках. В ответе запишите без скобок, пробелов, запятых и прочих символов полученную последовательность номеров участков.



10

Образец написания:

1234567890–,

1.3. Понятие касательной. Угловой коэффициент касательной к графику движения и мгновенная скорость

Как уже отмечалось, с помощью гладких функций можно достаточно точно описывать самые разные реальные процессы. Первые шаги здесь можно сделать, опираясь только на свойства прямых, определённым образом связанных с этими функциями.

Названия таких прямых знакомы по школьному курсу геометрии: это — касательные. Правда, касательная к графику функции будет определяться несколько иначе по сравнению с тем, как определяется касательная в школьном курсе планиметрии (прямая, имеющая с окружностью ровно одну общую точку).

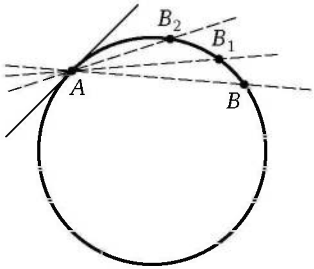


Рис. 1

Представление об этом новом определении можно получить на примере той же окружности, если рассмотреть секущую, содержащую некоторую хорду AB окружности, точку A «зафиксировать», а точку B перемещать по дуге окружности в направлении точки A (на рис. 1 показаны два таких промежуточных положения B_1 и B_2 точки B). Тогда секущая начнёт поворачиваться вокруг точки A, расстояние между точками A и B будет становиться всё меньше, всё ближе к нулю, а точка B станет практически неотличима от точки A. Прямая, соответствующая такому предельному положению точки B и секущей, будет иметь с окружностью уже только одну общую точку. Понятно, что эта прямая и есть касательная к окружности, проходящая через точку A.

Такой подход позволяет, вообще говоря, определить касательную как некое предельное положение секущей, когда её вторая точка «почти сливается» с первой. При этом вместо окружности можно рассматривать график любой гладкой функции $y = f(x)$. Остальные действия остаются теми же, что и в случае окружности: на графике гладкой функции выбираются две точки A и B (абсциссу точки A обозначим x_0), прямая AB, как и в случае окружности, называется *секущей*. Если перемещать точку B по графику функции в направлении точки A, секущая будет поворачиваться вокруг точки A; её предельное положение (когда точка B станет практически неотличима от точки A) и называется касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 (рис. 2).

Понятно, что в отличие от касательной к окружности, касательная к графику гладкой функции может иметь с ним и другие общие точки.

Во всех этих рассуждениях есть один момент, который должен вызвать естественный вопрос: что означает это «почти», что означают словосочетания «почти сливается» или «станет практически неотличима»? И вообще, что такое «предельное положение» или «предельное значение»? Трудно ответить на эти вопросы, не вдаваясь

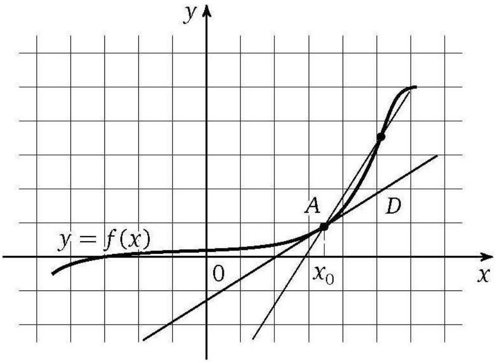


Рис. 2

в детали математического анализа, поэтому попробуем проиллюстрировать ответы одним примером. Рассмотрим последовательность положительных чисел вида $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in N$. Ясно, что любой член этой последовательности отличен от нуля, но с ростом n члены этой последовательности будут становиться всё меньше, всё ближе к нулю, делаясь всё менее отличимыми от него: на одну миллионную, на одну миллиардную, на одну триллионную... Понятно, что какое бы маленькое расстояние мы ни задали, всегда найдутся члены этой последовательности, расстояние между которыми и нулём будет ещё меньше, т. е. эти члены станут «практически неотличимы» от нуля, «почти сольются» с ним. Можно даже сказать, что с ростом n члены последовательности $a_n = \frac{1}{n}$ «неограниченно приближаются» к нулю. Всё это и означает, что нуль является предельным значением для рассматриваемой последовательности, хотя значения, равного нулю, ни один из них не принимает.

Примерно та же ситуация с касательной: точка B становится всё ближе к точке A, всё менее отличима от неё, расстояние между ними на графике всё ближе к нулю: меньше одной миллионной, одной миллиардной, одной триллионной... Но как ни один из членов последовательности $a_n = \frac{1}{n}$ не станет нулём, так и точка B не станет точкой A: касательная является предельным положением секущей, но может не быть ни одной из секущих.

Для того чтобы показать, что, например, 0 является предельным значением для последовательности $a_n = \frac{1}{n}$ при неограниченном возрастании n, используют стрелку и пишут: $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. стрелка, в сущности, заменяет глагол «стремится», словосочетание «неограниченно приближается» либо синонимичные им. При этом с помощью той же стрелки обязательно указывается, при каком условии происходит это стремление или неограниченное приближение. Для последовательности $a_n = \frac{1}{n}$

таким условием является неограниченное возрастание n, это условие и было записано в виде $n \to \infty$. Аналогично с помощью стрелки можно записать то, что касательная AD (рис. 2) является предельным положением секущей AB при условии неограниченного приближения точки B к точке A. Запись будет выглядеть так: $AB \to AD$ при $B \to A$. Условие $B \to A$ обычно заменяют условием неограниченного приближение абсциссы x_B точки B к абсциссе точки A, т. е. условием $x_B \to x_0$. Для того чтобы показать, что точка B может быть выбрана в любом месте графика гладкой функции (за исключением точки A), её абсциссу в большинстве случаев записывают в общем виде без использования индекса: $AB \to AD$ при $x \to x_0$.

Осталось заметить, что угол, который касательная образует с положительным направлением оси абсцисс будет предельным положением для угла, который секущая образует с положительным направлением той же оси, т. е. угловой коэффициент k_{AD} касательной является предельным положением для углового коэффициента k_{AB} секущей: $k_{AB} \to k_{AD}$ при $x_B \to x_0$.

Вспомним теперь, что угловой коэффициент секущей графика неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки) равен средней скорости этого тела на участке пути, соответствующем точкам графика, через которые проведена секущая. Дадим интерпретацию углового коэффициента касательной к графику неравномерного прямолинейного движения (рис. 3), используя сделанные выше рассуждения.

Если точка B будет неограниченно приближаться к точке A (т. е. если $t_2 \to t_1$), то длина отрезка пути, для которого вычисляется средняя скорость, будет неограничен-

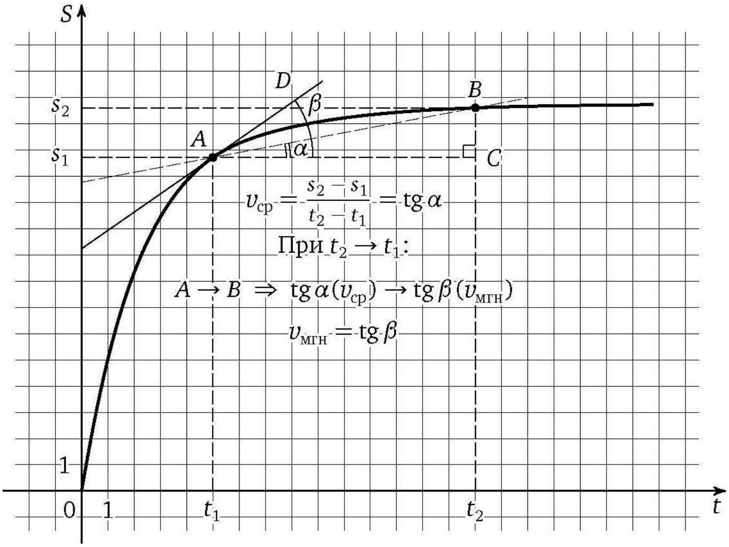


Рис. 3

но уменьшаться, а значит, значение средней скорости с уменьшением длины такого отрезка будет всё меньше и меньше отличаться от значения скорости тела в момент (мгновение) времени t_1 (такая скорость называется *мгновенной* скоростью), т. е. мгновенная скорость является предельным значением средней скорости, а поскольку угловой коэффициент касательной является предельным значением углового коэффициента секущей (численно равного средней скорости), получаем, что угловой коэффициент касательной численно равен скорости тела в момент времени t_1! Точно так же для любого другого зависящего от времени процесса, который можно описать с помощью гладкой функции, можно сказать, что угловой коэффициент касательной к графику этой функции в определённой его точке будет численно равен мгновенной скорости изменения функции в этой точке.

Таким образом,

— *угловой коэффициент касательной, проведённой к графику неравномерного прямолинейного движения тела в точке графика с абсциссой* t_0, *численно равен мгновенной скорости тела в момент времени* t_0;

— *угловой коэффициент касательной, проведённой к графику гладкой функции, зависящей от времени, в точке графика с абсциссой* t_0, *численно равен мгновенной скорости изменения функции в момент времени* t_0.

Пример 1 (задача 7 варианта 1 диагностической работы 1). На рис. 4 изображён график неравномерного прямолинейного движения тела и касательная к этому графику в точке с абсциссой t_0. По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите мгновенную скорость этого тела в момент времени t_0. Ответ дайте в м/с.

Решение. Для решения задачи достаточно вычислить угловой коэффициент касательной. Для его вычисления выберем на касательной две точки, расположенные в узлах сетки. Пусть это будут, например, точки A и B (рис. 5). Обозначим буквой

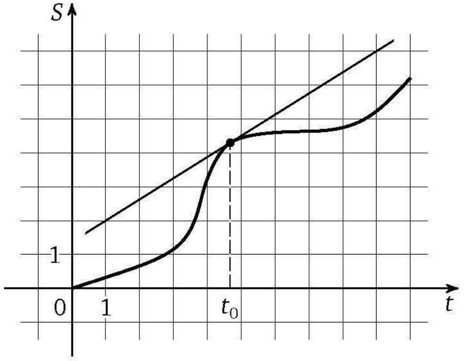


Рис. 4

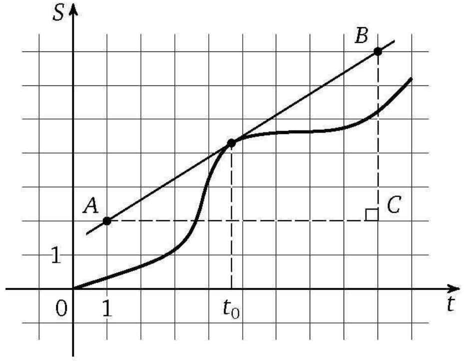


Рис. 5

C точку пересечения прямых, проходящих через выбранные точки параллельно осям координат, как показано на рис. 5.

Искомый угловой коэффициент k равен $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{8} = 0{,}625$.

Ответ. 0,625.

В ряде случаев график неравномерного прямолинейного движения тела позволяет проводить качественную оценку мгновенных скоростей этого тела в различные моменты времени, например, при выборе наименьшей или наибольшей из них. При этом совершенно необязательно проводить касательные, достаточно понимать, что более «крутым» участкам графика соответствуют бо́льшие угловые коэффициенты касательных (а значит, и бо́льшие мгновенные скорости), а более «пологим» участкам графика — меньшие угловые коэффициенты касательных (а значит, и меньшие мгновенные скорости).

Пример 2 (задача 8 варианта 1 диагностической работы 1)**.** На рис. 6 изображён график неравномерного прямолинейного движения тела. На графике отмечены четыре точки: A, B, C, D, соответствующие четырём моментам времени движения этого тела: 1) t_A; 2) t_B; 3) t_C; 4) t_D. В какой из этих моментов времени скорость тела была наибольшей? В ответе укажите номер этого момента.

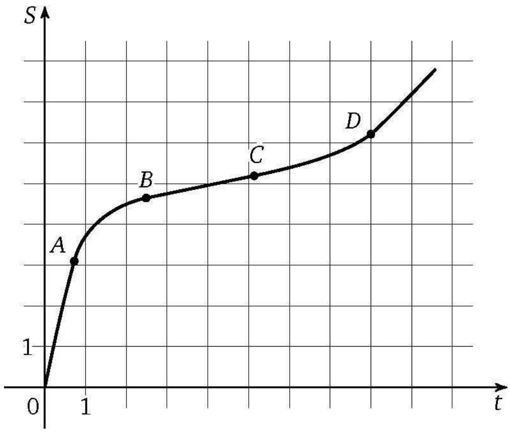


Рис. 6

Решение. Как уже отмечалось, более «крутым» участкам графика соответствуют бо́льшие угловые коэффициенты касательных (а значит, и бо́льшие мгновенные скорости). Из четырёх данных точек на самом крутом участке графика находится точка A. Поэтому наибольшая из четырёх возможных мгновенная скорость была в момент времени t_A.

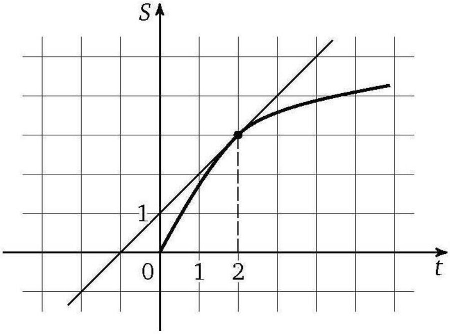
Ответ. 1.

Ответы:

Тренировочная работа 3

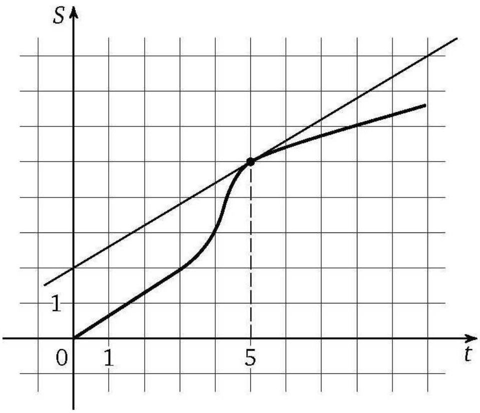
Вариант 1

1. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела и касательная к этому графику в точке с абсциссой $t_0 = 2$. По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите мгновенную скорость этого тела в момент времени t_0. Ответ дайте в м/с.



1

2. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела и касательная к этому графику в точке с абсциссой $t_0 = 5$. По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите мгновенную скорость этого тела в момент времени t_0. Ответ дайте в м/с.



2

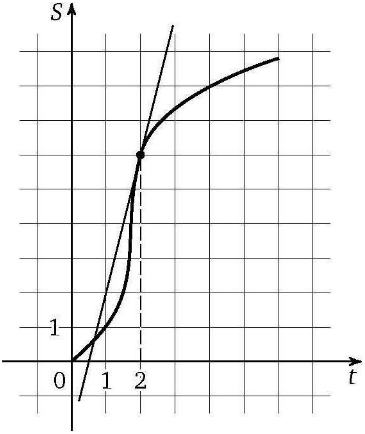
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

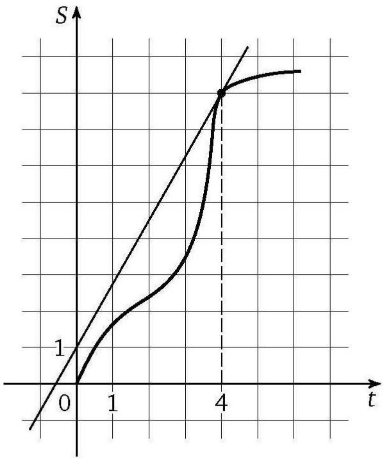
3

3. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела и касательная к этому графику в точке с абсциссой $t_0 = 2$. По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите мгновенную скорость этого тела в момент времени t_0. Ответ дайте в м/с.



4

4. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела и касательная к нему в точке с абсциссой $t_0 = 4$. По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите мгновенную скорость этого тела в момент времени t_0. Ответ дайте в км/ч.

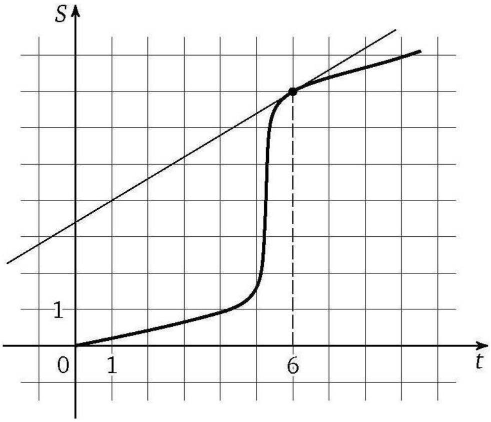


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

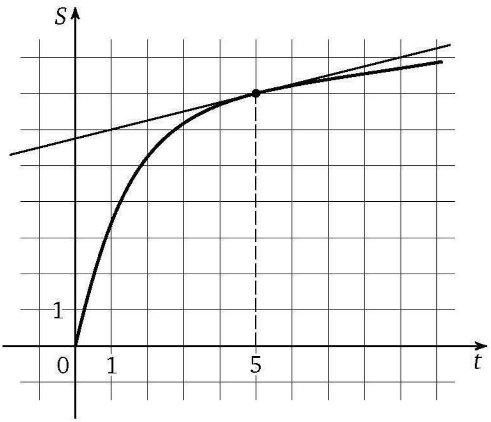
Ответы:

5. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела и касательная к этому графику в точке с абсциссой $t_0 = 6$. По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите мгновенную скорость этого тела в момент времени t_0. Ответ дайте в км/ч.



5

6. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела и касательная к этому графику в точке с абсциссой $t_0 = 5$. По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите мгновенную скорость этого тела в момент времени t_0. Ответ дайте в м/с.



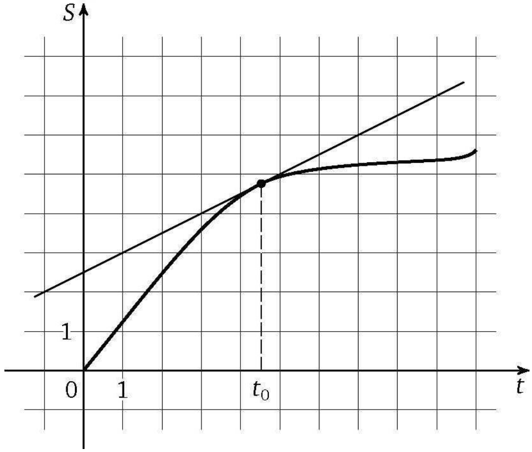
6

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

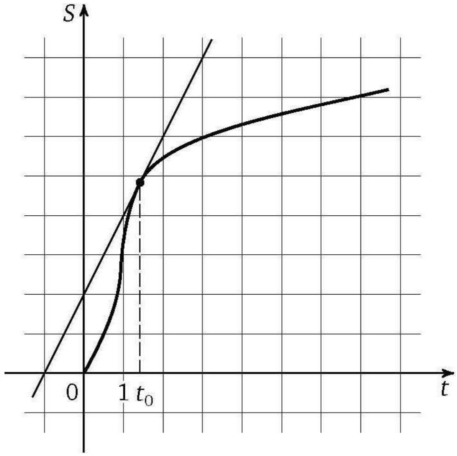
7

7. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела и касательная к этому графику в точке с абсциссой t_0. По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите мгновенную скорость этого тела в момент времени t_0. Ответ дайте в м/с.



8

8. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела и касательная к этому графику в точке с абсциссой t_0. По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите мгновенную скорость этого тела в момент времени t_0. Ответ дайте в м/с.

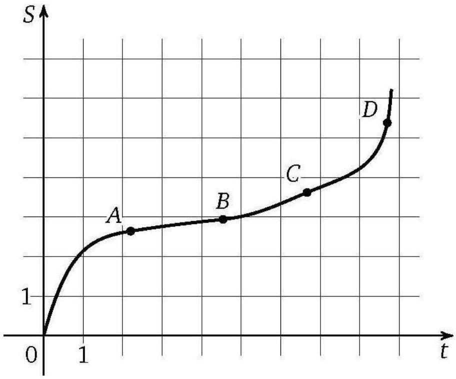


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

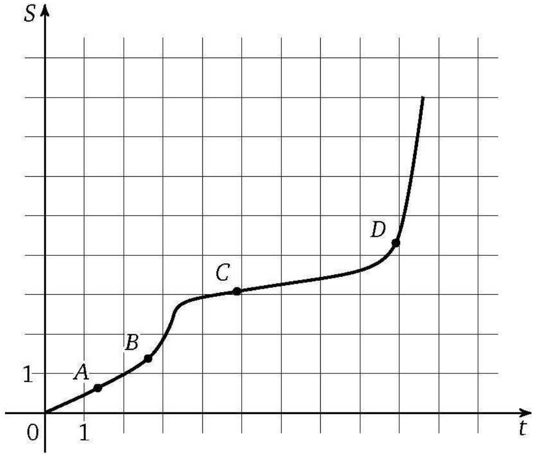
Ответы:

9. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела. На графике отмечены четыре точки: A, B, C, D, соответствующие четырём моментам времени движения этого тела: 1) t_A; 2) t_B; 3) t_C; 4) t_D. В какой из этих моментов времени скорость тела была наибольшей? В ответе укажите номер этого момента.



9

10. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела. На графике отмечены четыре точки: A, B, C, D, соответствующие четырём моментам времени движения этого тела: 1) t_A; 2) t_B; 3) t_C; 4) t_D. В какой из этих моментов времени скорость тела была наименьшей? В ответе укажите номер этого момента.



10

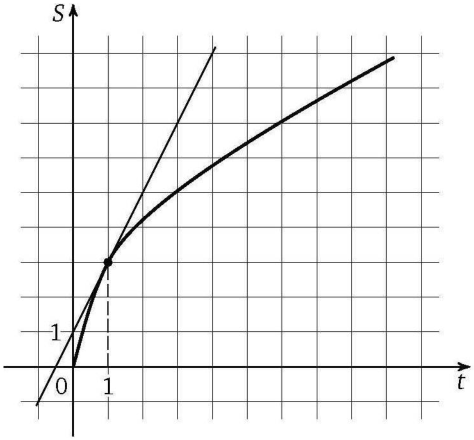
Образец написания:

1234567890–,

Вариант 2

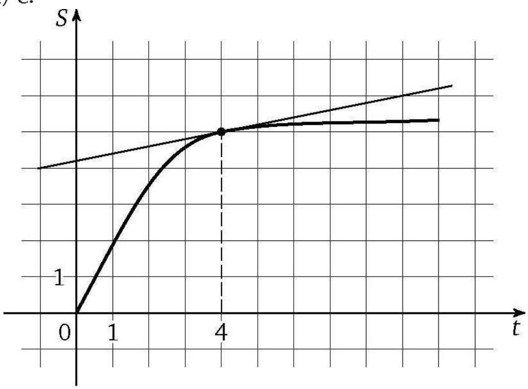
1

1. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела и касательная к этому графику в точке с абсциссой $t_0 = 1$. По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите мгновенную скорость этого тела в момент времени t_0. Ответ дайте в м/с.



2

2. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела и касательная к этому графику в точке с абсциссой $t_0 = 4$. По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите мгновенную скорость этого тела в момент времени t_0. Ответ дайте в м/с.



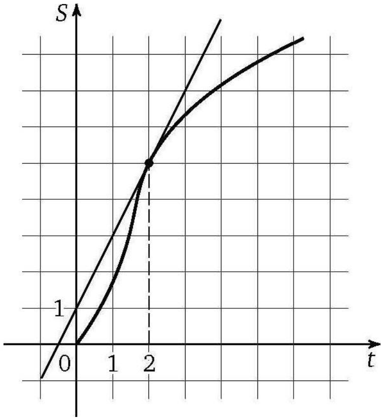
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Вариант 2

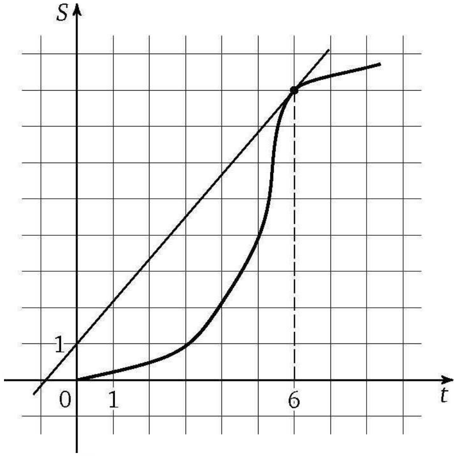
Ответы:

3. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела и касательная к этому графику в точке с абсциссой $t_0 = 2$. По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите мгновенную скорость этого тела в момент времени t_0. Ответ дайте в м/с.



3

4. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела и касательная к этому графику в точке с абсциссой $t_0 = 6$. По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите мгновенную скорость этого тела в момент времени t_0. Ответ дайте в км/ч.



4

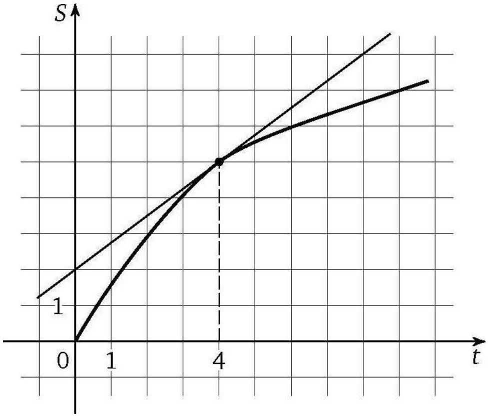
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

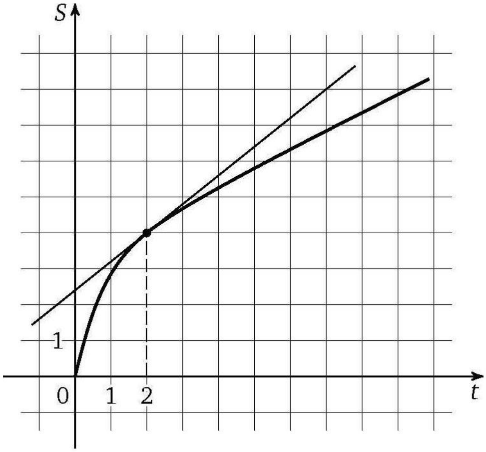
5

5. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела и касательная к этому графику в точке с абсциссой $t_0 = 4$. По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите мгновенную скорость этого тела в момент времени t_0. Ответ дайте в км/ч.



6

6. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела и касательная к этому графику в точке с абсциссой $t_0 = 2$. По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите мгновенную скорость этого тела в момент времени t_0. Ответ дайте в м/с.

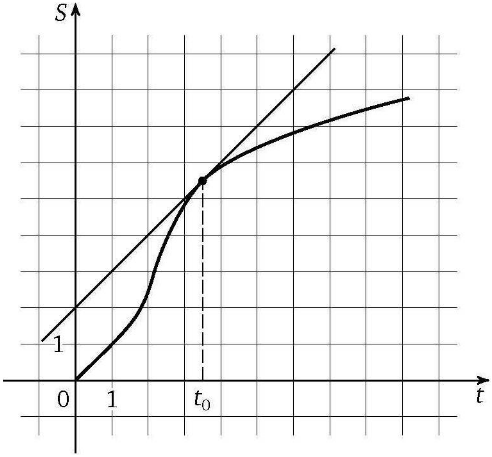


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

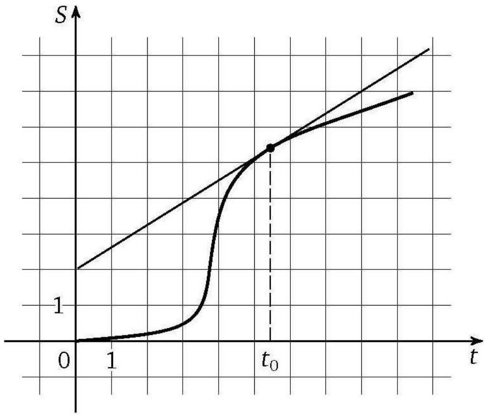
Ответы:

7. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела и касательная к этому графику в точке с абсциссой t_0. По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите мгновенную скорость этого тела в момент времени t_0. Ответ дайте в м/с.



7

8. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела и касательная к этому графику в точке с абсциссой t_0. По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите мгновенную скорость этого тела в момент времени t_0. Ответ дайте в м/с.



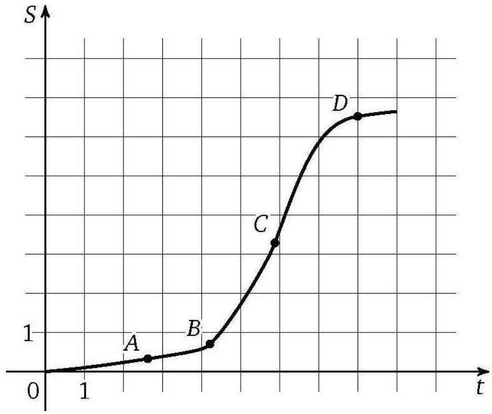
8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

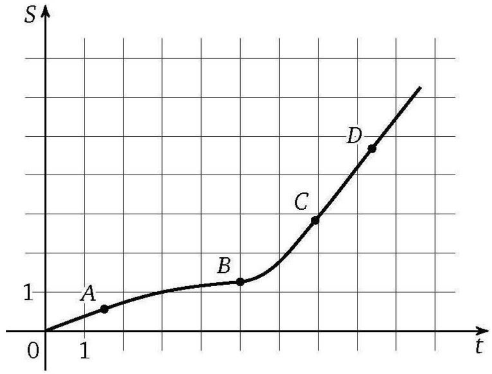
9

9. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела. На графике отмечены четыре точки: A, B, C, D, соответствующие четырём моментам времени движения этого тела: 1) t_A; 2) t_B; 3) t_C; 4) t_D. В какой из этих моментов времени скорость тела была наибольшей? В ответе укажите номер этого момента.



10

10. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела. На графике отмечены четыре точки: A, B, C, D, соответствующие четырём моментам времени движения этого тела: 1) t_A; 2) t_B; 3) t_C; 4) t_D. В какой из этих моментов времени скорость тела была наименьшей? В ответе укажите номер этого момента.



Образец написания:

1234567890-,

1.4. Понятие производной. Геометрический и физический смысл производной

В курсе высшей математики доказывается, что если к графику функции в какой-то его точке можно провести касательную, то эта касательная единственна. Для гладкой функции это утверждение интуитивно понятно: как ни выбирай точку B (на рис. 1 показаны два её положения B_1 и B_2), в результате получим ту же самую касательную:

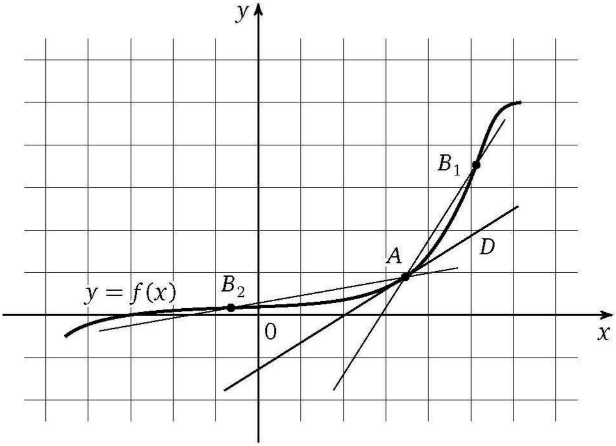


Рис. 1

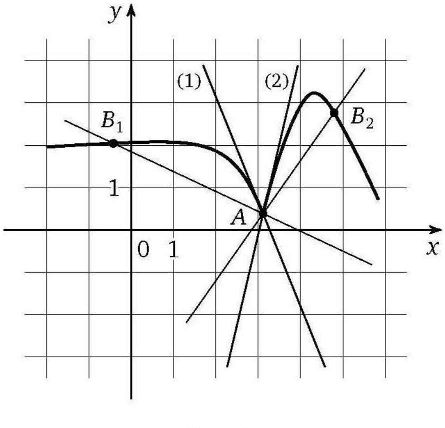


Рис. 2

А вот точки, в которых гладкость функции нарушается, таким свойством не обладают (рис. 2).

Здесь предельным положением секущей B_1A при перемещении точки B_1 по графику функции в направлении точки A, является прямая (1), а предельным положением секущей B_2A при перемещении точки B_2 по графику функции в направлении точки A является прямая (2). Понятно, что в этом случае говорить о существовании касательной бессмысленно.

Если каждой точке из области определения гладкой функции поставить в соответствие угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции в этой точке, то такое соответствие в силу единственности касательной будет однозначным, и, следовательно, мы получим новую функцию, связанную с данной функцией и как бы произведённую ею. Эту новую функцию можно было бы назвать функцией угловых коэффициентов касательных к графику данной функции (поскольку значение новой функции в каждой точке равно угловому коэффициенту касательной к графику данной функции, проведённой в этой точке). Но такое название, несмотря на всю его ясность, является довольно громоздким и, кроме того, характеризует далеко не все свойства новой функции, которые связывают её с данной. Поэтому за этой новой функцией закрепилось другое название: она называется *производной* данной функции $f(x)$ (т. е., как отмечалось выше, как бы произведённой ею) и обозначается $f'(x)$.

Для функций, которые являются гладкими на всей области определения за исключением некоторого числа точек (как функция, график которой изображён на рис. 2) производная будет существовать во всех точках, кроме этих нескольких.

Для дальнейшего вполне достаточно такого представления о производной. Итак, график производной данной функции является, в сущности, графиком угловых коэффициентов касательных к графику данной функции, а значение производной функции в данной точке равно угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику этой функции в соответствующей точке (в этом утверждении заключается так называемый *геометрический смысл производной*).

Угловой коэффициент касательной к графику неравномерного прямолинейного движения тела (материальной точки), как мы уже знаем, численно равен мгновенной скорости этого тела в момент времени, соответствующий точке касания. Поэтому у производной помимо геометрического есть ещё и *физический смысл*: значение производной функции в данной точке равно мгновенной скорости изменения функции в этой точке (для функции, задающей закон неравномерного прямолинейного движения тела, производная в данной точке будет равна мгновенной скорости тела в момент времени, соответствующий этой точке). В сущности, предыдущий пункт пособия полностью посвящён задачам на физический смысл производной.

В последние годы в ЕГЭ по математике обязательно включаются задачи на вычисление производной функции в данной точке по заданному графику этой функции и касательной к нему, проведённой в этой точке. Понятно, что решение такой задачи не отличается от уже рассмотренных: достаточно найти угловой коэффициент касательной и записать полученное число в бланк ответов.

Напомним, что для вычисления углового коэффициента нужно на касательной выбрать две точки с целочисленными координатами и рассмотреть прямоугольный треугольник, двумя вершинами которого являются выбранные точки, а третья находится как пересечение прямых, проведённых из выбранных точек параллельно осям координат.

Пример 1 (задача 9 варианта 1 диагностической работы 1)**.** На рис. 3 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в его точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

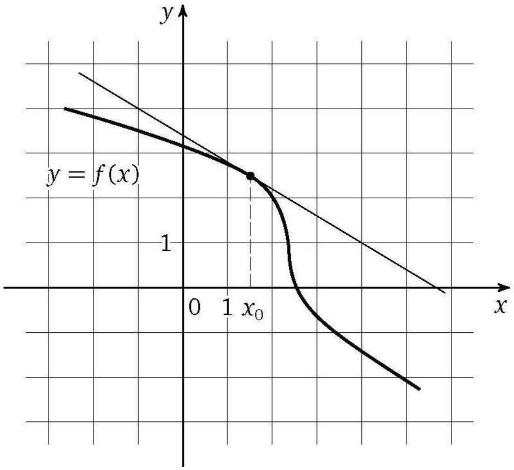


Рис. 3

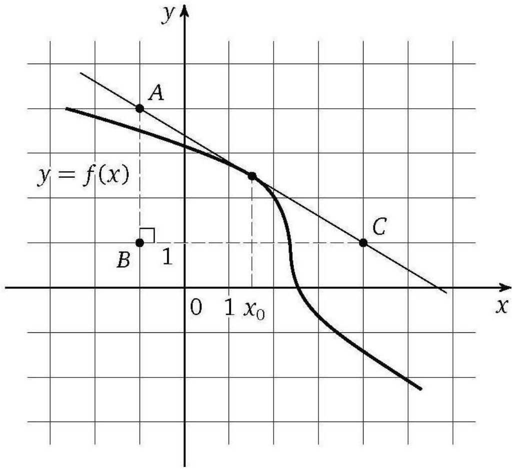


Рис. 4

Решение. Согласно геометрическому смыслу производной, искомое значение $f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке графика с абсциссой x_0. Угловой коэффициент касательной равен тангенсу угла, который она образует с положительным направлением оси абсцисс. В данном случае этот угол тупой; его тангенс (равный искомому значению производной) будет противоположен тангенсу острого угла ACB (рис. 4).

Таким образом,

$$f'(x_0) = -\operatorname{tg}\angle ACB = -\frac{AB}{BC} = -\frac{3}{5} = -0{,}6.$$

Ответ. $-0{,}6$.

В качестве следующей рассмотрим задачу на установление соответствия между касательными к графику гладкой функции и значениями производной этой функции в данных точках. Эти задачи во многом напоминают рассмотренные ранее: для их успешного решения достаточно упорядочить угловые коэффициенты касательных (равные значениям производной в соответствующих точках) по возрастанию или убыванию.

Пример 2 (задача 10 варианта 1 диагностической работы 1)**.** На рис. 5 изображён график гладкой функции $y = f(x)$ и касательные к этому графику, проведённые в точках с абсциссами x_1, x_2, x_3, x_4.

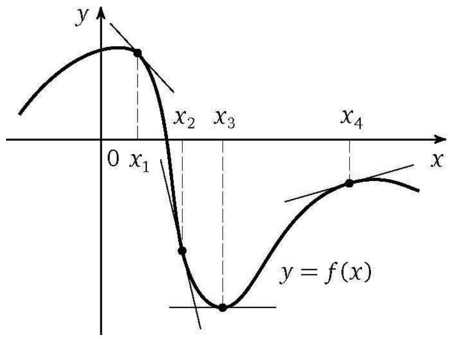


Рис. 5

Известно, что значение производной функции в каждой из этих точек равно одному из следующих чисел: 1) $-4{,}32$; 2) $-1{,}23$; 3) 0; 4) 0,21. Заполните таблицу, указав под каждой из производных номер, соответствующий её значению.

$f'(x_1)$	$f'(x_2)$	$f'(x_3)$	$f'(x_4)$

В ответе запишите полученную последовательность номеров без скобок, запятых, пробелов и прочих символов.

Решение. Согласно геометрическому смыслу производной функции, её значение в данной точке равно угловому коэффициенту касательной к графику данной функции, проведённой в этой точке. Угловой коэффициент равен тангенсу угла, который касательная образует с положительным направлением оси абсцисс. Ясно, что рисунок не позволяет в явном виде вычислить значения тангенсов для всех точек за исключением одной. Поэтому решение задачи требует определённого анализа имеющихся данных.

Если касательная параллельна оси абсцисс, то её угловой коэффициент равен нулю. Следовательно, точке x_3 соответствует значение производной под номером 3. Поскольку при параллельном переносе одной из двух прямых угол между этими прямыми не меняется, для определения знака углового коэффициента удобно мысленно провести прямую, параллельную наклонной касательной, через начало координат. Если эта прямая расположена в первой и третьей четвертях, то угол, образуемый ею (а значит, и касательной) с положительным направлением оси абсцисс, будет острым, а его тангенс положительным, следовательно, будет положительно и значение производной в соответствующей точке. Этому случаю отвечает касательная, проходящая через точку с абсциссой x_4, следовательно, этой точке соответствует значение производной под номером 4.

Если прямая расположена во второй и четвёртой четвертях, то угол, образуемый ею (а значит, и касательной) с положительным направлением оси абсцисс, будет тупым (его тангенс отрицателен, следовательно, отрицательно и значение производной в соответствующей точке). Этому случаю отвечают касательные, проходящие через точки с абсциссами x_1 и x_2. Ясно, что касательной, проходящей через точку с абсциссой x_1, отвечает больший по величине тупой угол, поэтому ему соответствует большее значение тангенса, а значит, и большее значение производной. Следовательно, точке x_1 соответствует значение производной под номером 2, а точке x_2 — значение производной под номером 1, и таблица заполняется так:

$f'(x_1)$	$f'(x_2)$	$f'(x_3)$	$f'(x_4)$
2	1	3	4

Ответ. 2134.

Ответы:

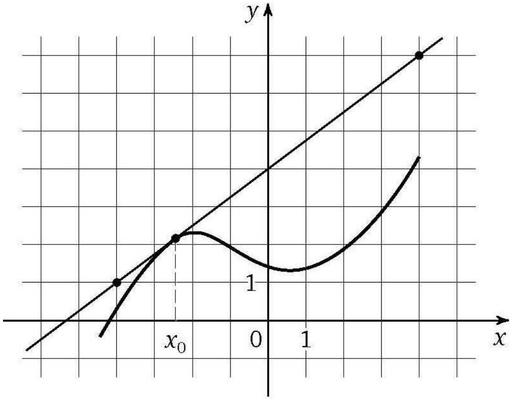
1

2

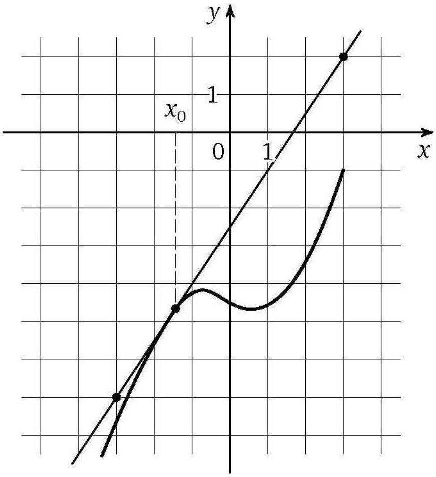
Тренировочная работа 4

Вариант 1

1. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в его точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.



2. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в его точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

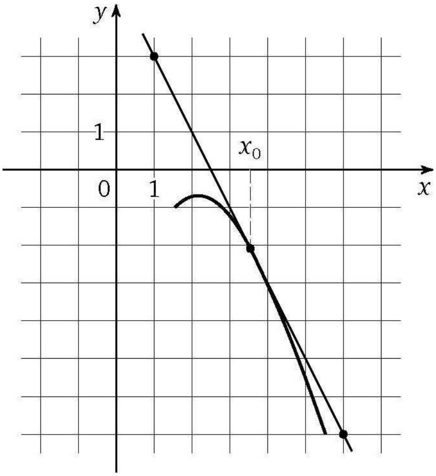


Образец написания:

1234567890–,

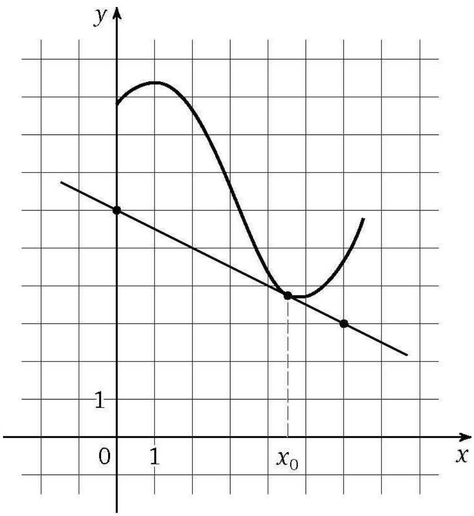
Ответы:

3. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в его точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.



3

4. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в его точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.



4

Образец написания:

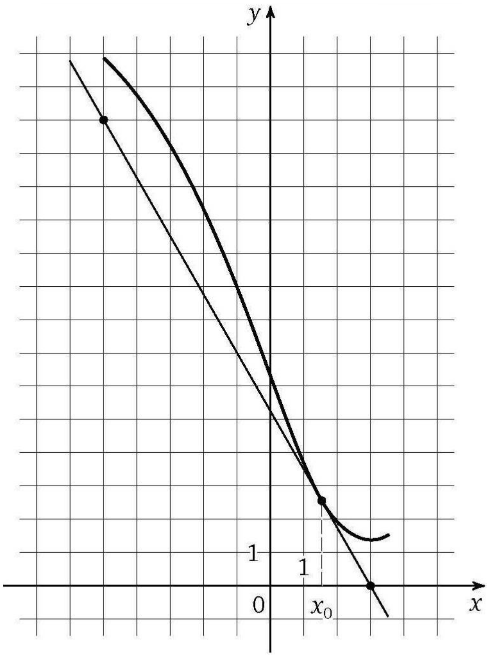
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

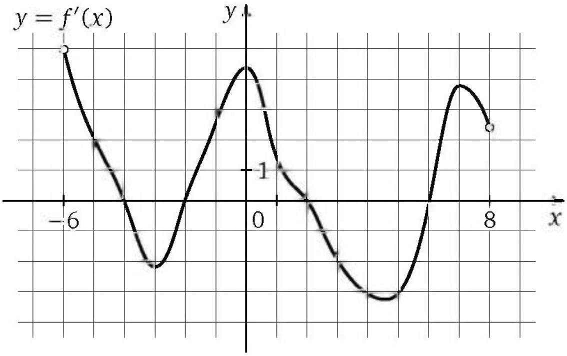
5

6

5. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в его точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.



6. На рисунке изображён график производной $y = f'(x)$ функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 8)$. В скольких точках касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 3$ или совпадает с ней?

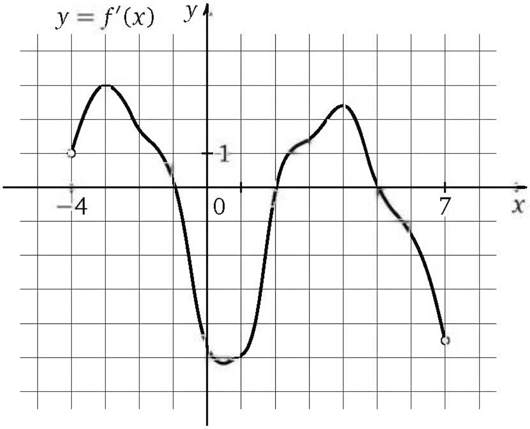


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

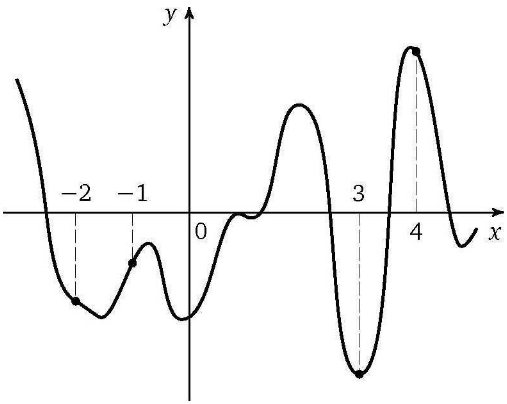
Ответы:

7. На рисунке изображён график производной $y = f'(x)$ функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 7)$. В скольких точках касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 4 - 3x$ или совпадает с ней?



7

8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки -2; -1; 3; 4. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



8

Образец написания:

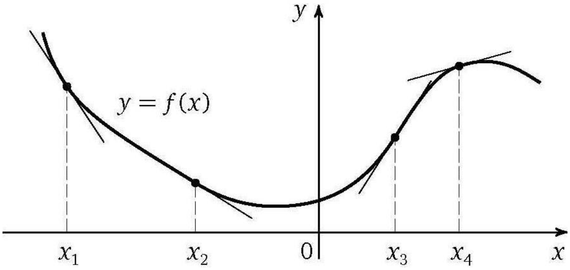
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

9

10

9. На рисунке изображён график гладкой функции $y = f(x)$ и касательные к этому графику, проведённые в точках с абсциссами x_1, x_2, x_3, x_4.

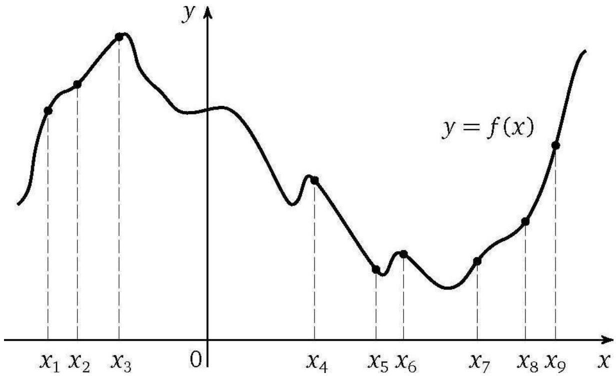


Известно, что значение производной функции в каждой из этих точек равно одному из следующих чисел: 1) $-1{,}3$; 2) $-0{,}74$; 3) $0{,}22$; 4) $1{,}1$. Заполните таблицу, указав под каждой из производных номер, соответствующий её значению.

$f'(x_1)$	$f'(x_2)$	$f'(x_3)$	$f'(x_4)$

В ответе запишите полученную последовательность номеров без скобок, запятых, пробелов и прочих символов.

10. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



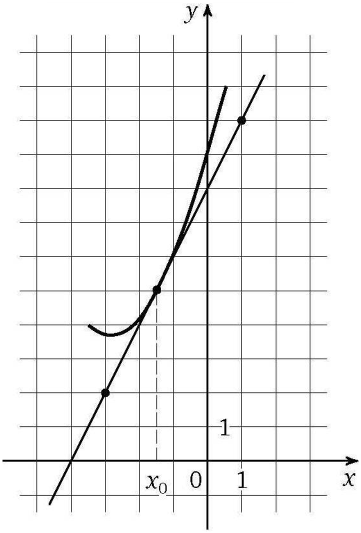
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

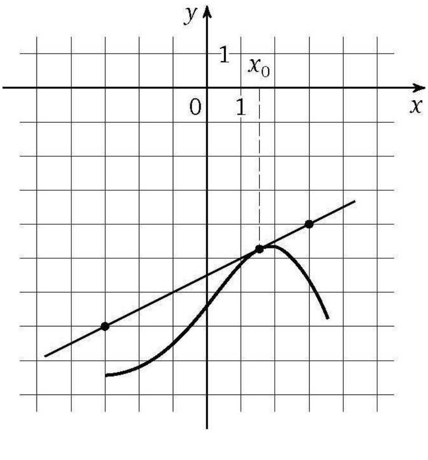
Вариант 2

1. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в его точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.



1

2. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в его точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.



2

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

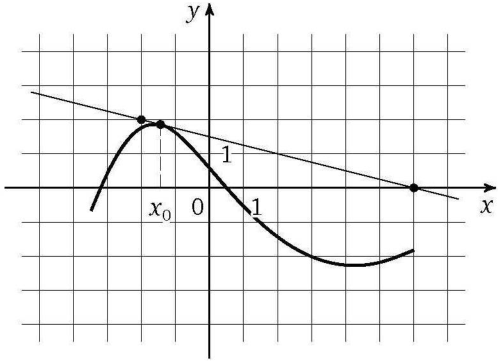
Ответы:

3

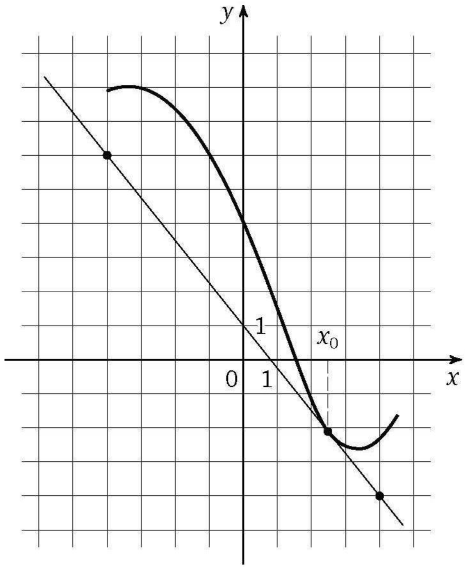
4

Образец написания: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

3. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в его точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.



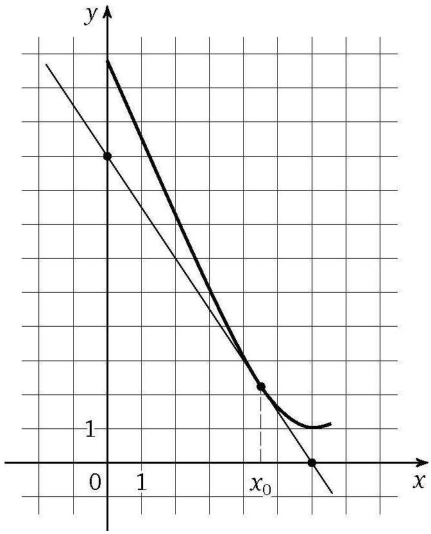
4. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в его точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.



Ответы:

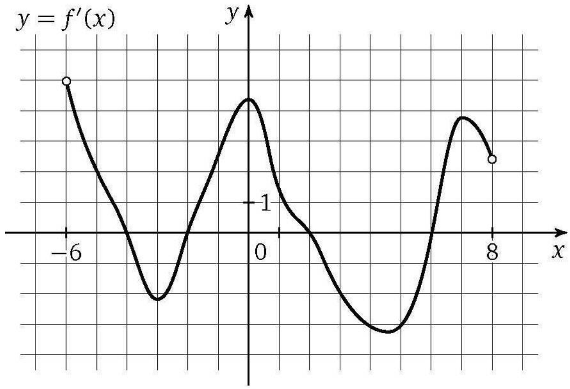
5. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в его точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

5



6. На рисунке изображён график производной $y = f'(x)$ функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 8)$. В скольких точках касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x + 4$ или совпадает с ней?

6

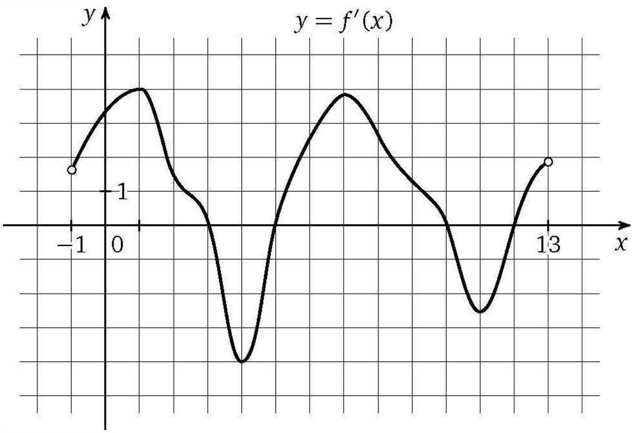


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

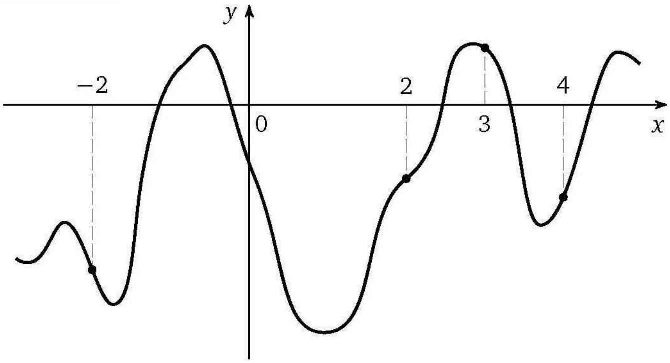
7

7. На рисунке изображён график производной $y = f'(x)$ функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-1; 13)$. В скольких точках касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 1 - 2x$ или совпадает с ней?



8

8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки -2; 2; 3; 4. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

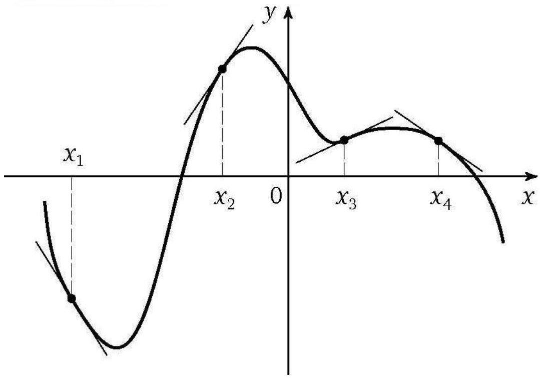


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

9. На рисунке изображён график гладкой функции $y = f(x)$ и касательные к этому графику, проведённые в точках с абсциссами x_1, x_2, x_3, x_4.



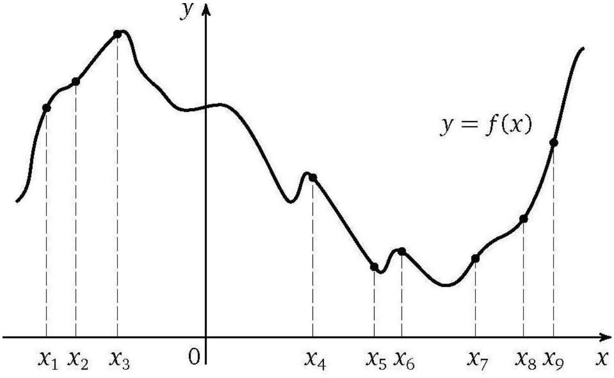
Известно, что значение производной функции в каждой из этих точек равно одному из следующих чисел: 1) $-2{,}1$; 2) $-0{,}8$; 3) $0{,}6$; 4) $1{,}2$. Заполните таблицу, указав под каждой из производных номер, соответствующий её значению.

$f'(x_1)$	$f'(x_2)$	$f'(x_3)$	$f'(x_4)$

В ответе запишите полученную последовательность номеров без скобок, запятых, пробелов и прочих символов.

9

10. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

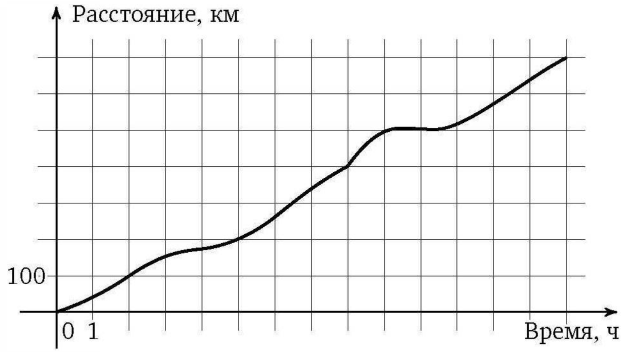
Ответы:

Диагностическая работа 2

Вариант 1

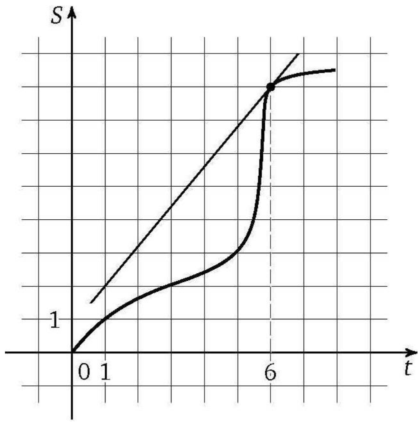
1

1. На рисунке изображён график движения автобуса по маршруту. По горизонтальной оси откладывается время, по вертикальной — пройденное автобусом расстояние от начала маршрута. Вычислите среднюю скорость движения автобуса по маршруту. Ответ дайте в километрах в час. Единицы измерения не пишите.



2

2. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела и касательная к этому графику в точке с абсциссой 6. По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите мгновенную скорость этого тела в момент времени $t = 6$. Ответ дайте в м/с.



Образец написания:

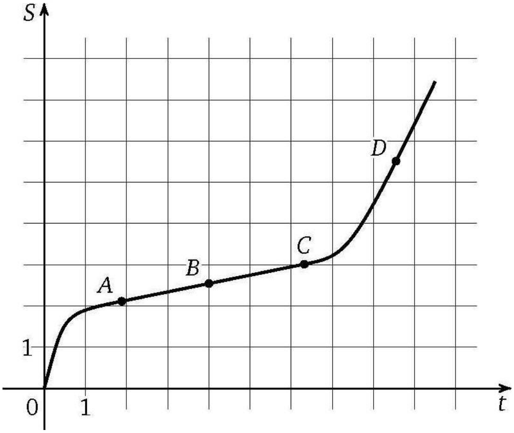
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

3. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела. На графике отмечены четыре точки: A, B, C, D, соответствующие четырём моментам времени движения этого тела:

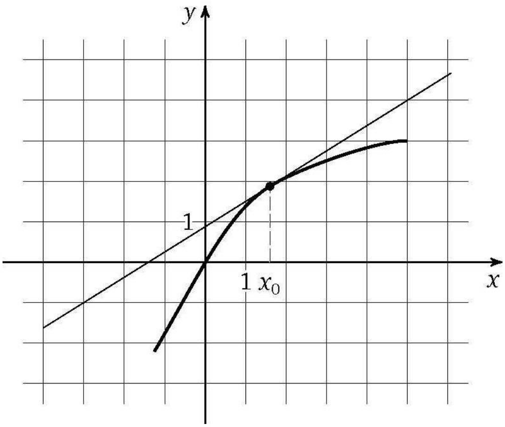
1) t_A; 2) t_B; 3) t_C; 4) t_D.

В какой из этих моментов времени скорость тела была наибольшей? В ответе укажите номер этого момента.



3

4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



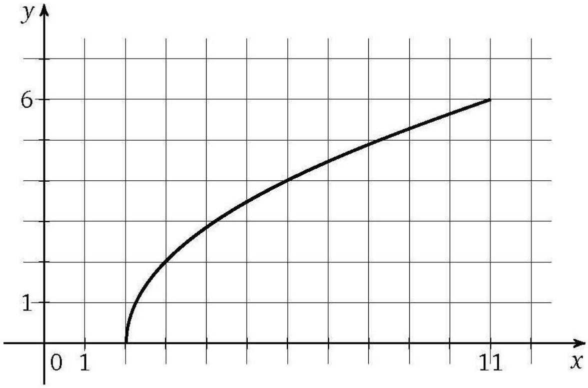
4

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

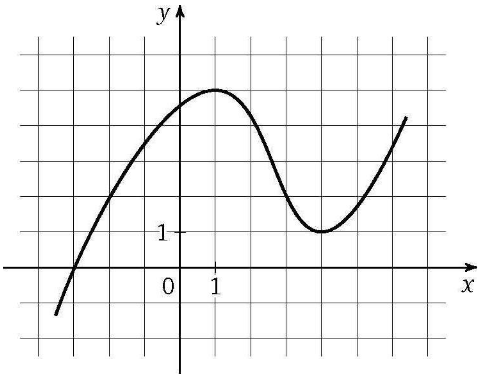
5

5. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(-4; 0)$, касается графика этой функции в точке с абсциссой 6. Найдите $f'(6)$.



6

6. На рисунке изображён график производной $y = f'(x)$ функции $y = f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -9$ или совпадает с этой прямой.



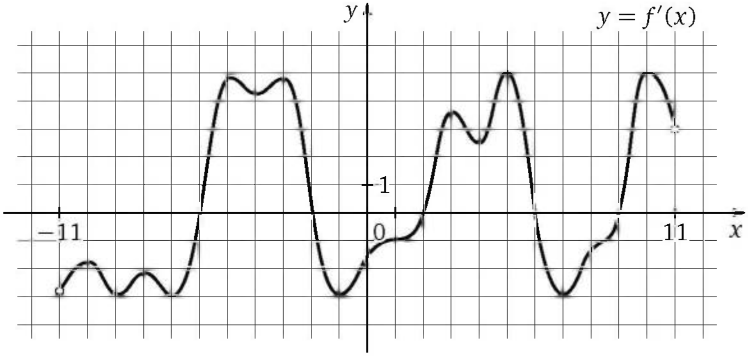
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

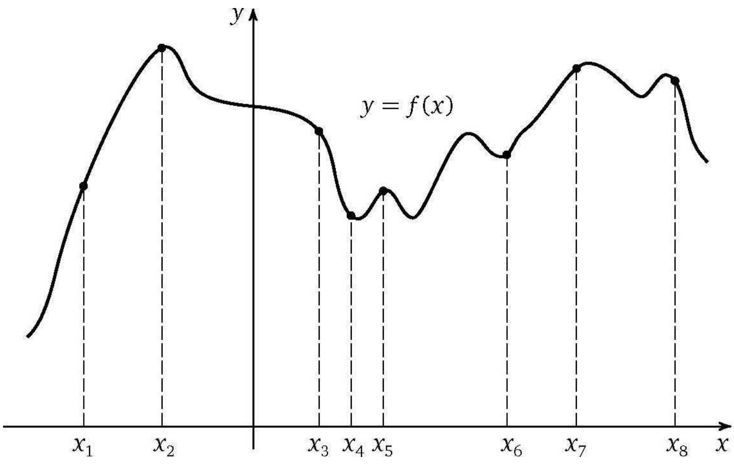
7. На рисунке изображён график производной $y = f'(x)$ функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-11; 11)$. Найдите количество точек, в каждой из которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -2{,}5x$ или совпадает с этой прямой.

7



8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены восемь точек на оси абсцисс. В скольких из этих точек производная функции отрицательна?

8



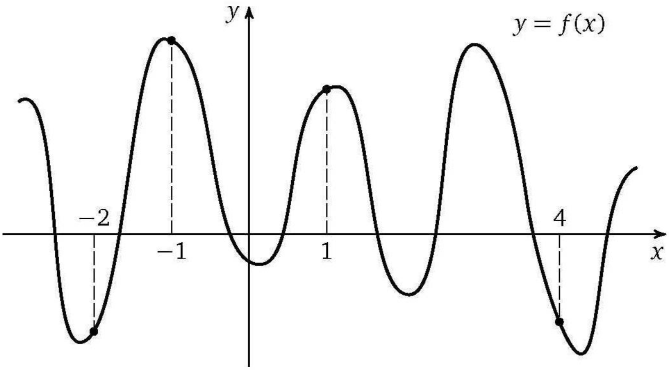
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

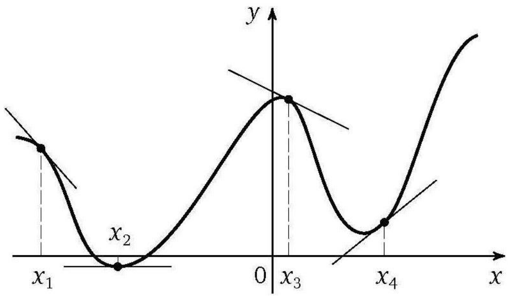
9

9. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -2, -1, 1, 4. В какой из этих точек значение производной функции наименьшее? В ответе укажите эту точку.



10

10. На рисунке изображён график гладкой функции $y = f(x)$ и касательные к этому графику, проведённые в точках с абсциссами x_1, x_2, x_3, x_4.



Известно, что значение производной функции в каждой из этих точек равно одному из следующих чисел:
1) $-1{,}02$; 2) $-0{,}32$; 3) 0; 4) $0{,}97$.
Заполните таблицу, указав под каждой из производных номер, соответствующий её значению.

$f'(x_1)$	$f'(x_2)$	$f'(x_3)$	$f'(x_4)$

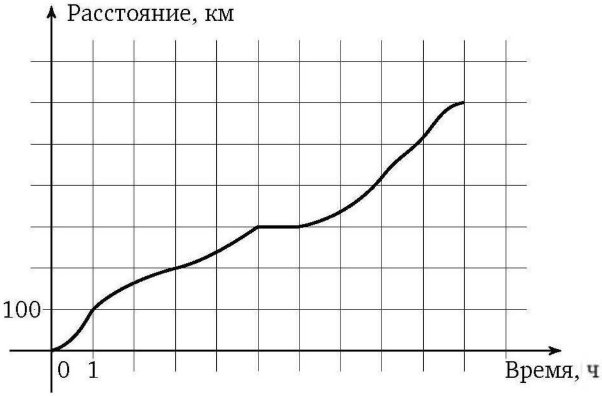
В ответе запишите полученную последовательность номеров без скобок, запятых, пробелов и прочих символов.

Образец написания:

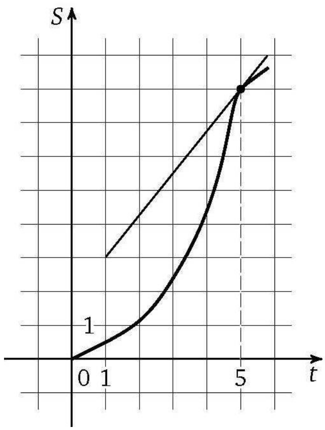
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вариант 2

1. На рисунке изображён график движения автобуса по маршруту. По горизонтальной оси откладывается время, по вертикальной — пройденное автобусом расстояние от начала маршрута. Вычислите среднюю скорость движения автобуса по маршруту. Ответ дайте в километрах в час. Единицы измерения не пишите.



2. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела и касательная к этому графику в точке с абсциссой 5. По оси абсцисс откладывается время в секундах, по оси ординат — расстояние в метрах. Найдите мгновенную скорость этого тела в момент времени $t = 5$. Ответ дайте в м/с.



Ответы:

1

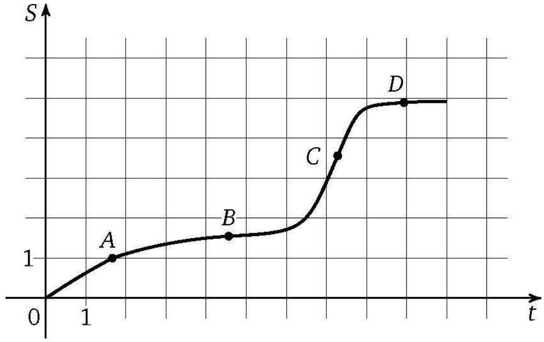
2

Образец написания:

1234567890–,

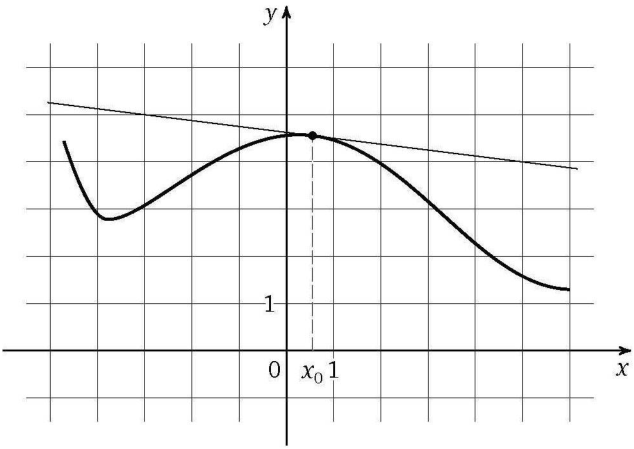
3

3. На рисунке изображён график неравномерного прямолинейного движения тела. На графике отмечены четыре точки: A, B, C, D, соответствующие четырём моментам времени движения этого тела: 1) t_A; 2) t_B; 3) t_C; 4) t_D. В какой из этих моментов времени скорость тела была наибольшей? В ответе укажите номер этого момента.



4

4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.



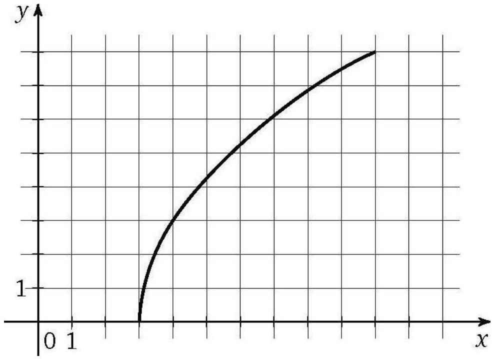
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

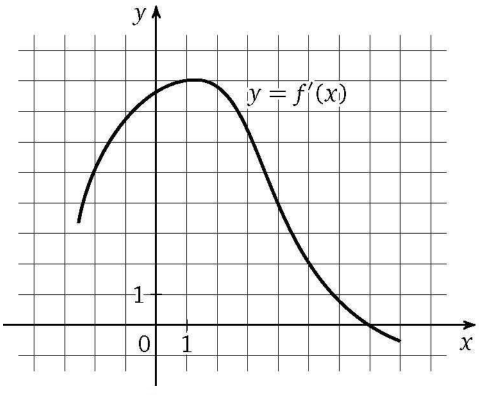
5. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(2; 0)$, касается графика этой функции в точке с абсциссой 4. Найдите $f'(4)$.

5



6. На рисунке изображён график производной $y = f'(x)$ функции $y = f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 3$ или совпадает с этой прямой.

6

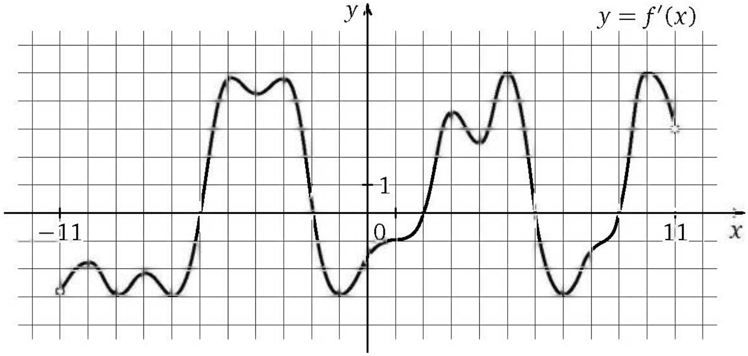


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

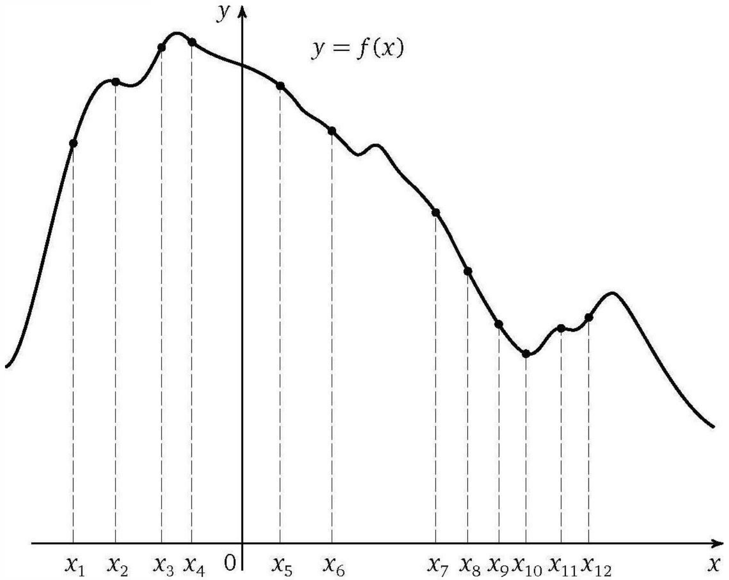
7

7. На рисунке изображён график производной $y = f'(x)$ функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-11; 11)$. Найдите количество точек, в каждой из которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 4{,}5x$ или совпадает с этой прямой.



8

8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и отмечены двенадцать точек на оси абсцисс. В скольких из этих точек производная функции положительна?

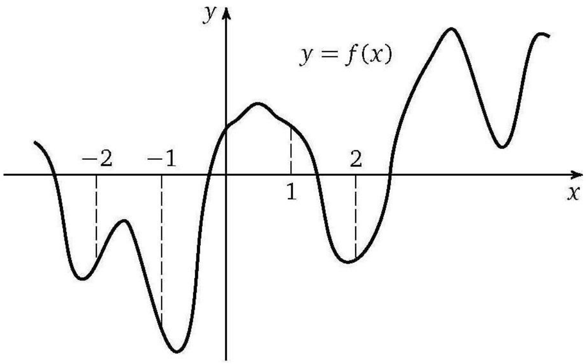


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

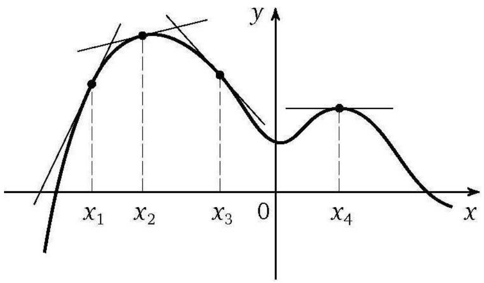
Ответы:

9. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -2, -1, 1, 2. В какой из этих точек значение производной функции наибольшее? В ответе укажите эту точку.



9

10. На рисунке изображён график гладкой функции $y = f(x)$ и касательные к этому графику, проведённые в точках с абсциссами x_1, x_2, x_3, x_4.



10

Известно, что значение производной функции в каждой из этих точек равно одному из следующих чисел:
1) $-1{,}09$; 2) 0; 3) $0{,}19$; 4) $2{,}1$.
Заполните таблицу, указав под каждой из производных номер, соответствующий её значению.

$f'(x_1)$	$f'(x_2)$	$f'(x_3)$	$f'(x_4)$

В ответе запишите полученную последовательность номеров без скобок, запятых, пробелов и прочих символов.

Образец написания:

Ответы:

1

2

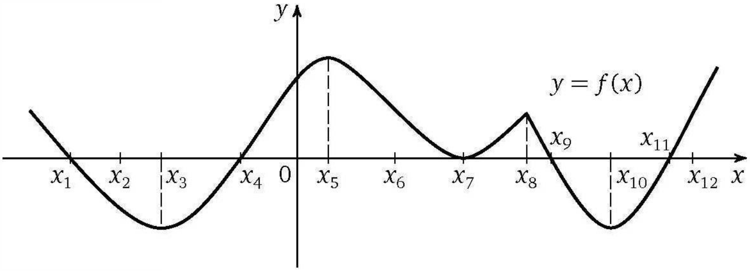
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

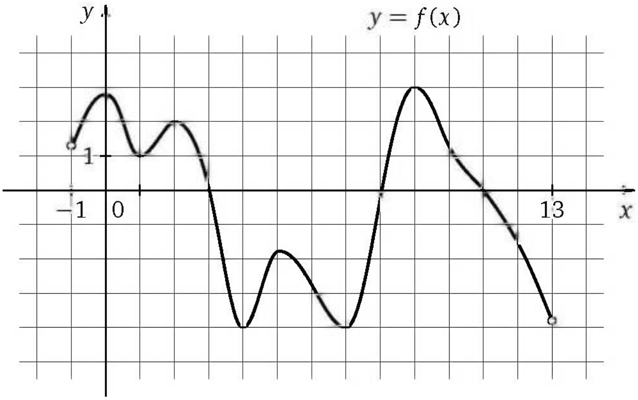
Диагностическая работа 3

Вариант 1

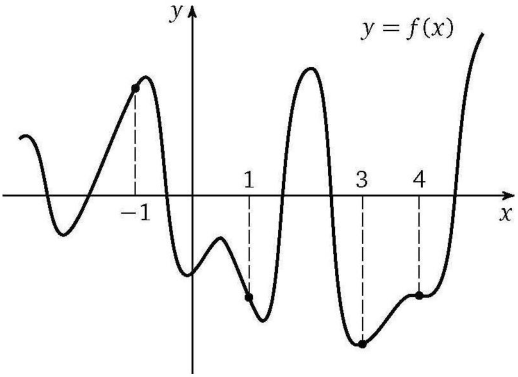
1. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и двенадцать точек $x_1, x_2, \dots, x_{12}$ оси абсцисс (точки $x_3, x_5, x_7, x_8, x_{10}$ являются точками экстремума). В скольких из этих двенадцати точек производная $f'(x)$ отрицательна, если известно, что функция $y=f(x)$ имеет производную в каждой точке числовой прямой за исключением, быть может, некоторых точек экстремума?



2. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-1;\ 13)$. Найдите число решений уравнения $f'(x)=0$ на отрезке $[3;\ 11]$.

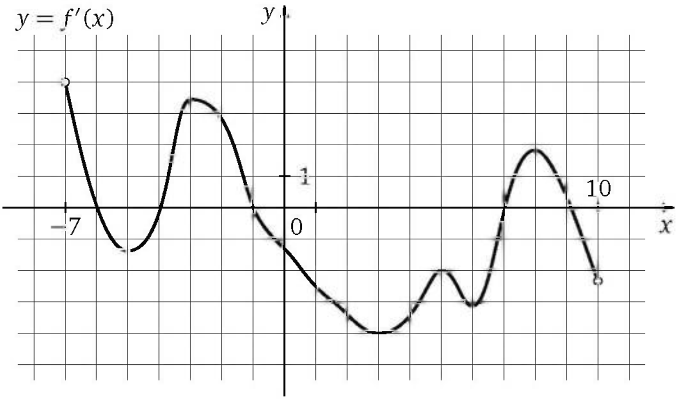


3. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки -1, 1, 3, 4.



В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

4. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 10)$. Найдите промежутки возрастания функции $y = f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Ответы:

3

4

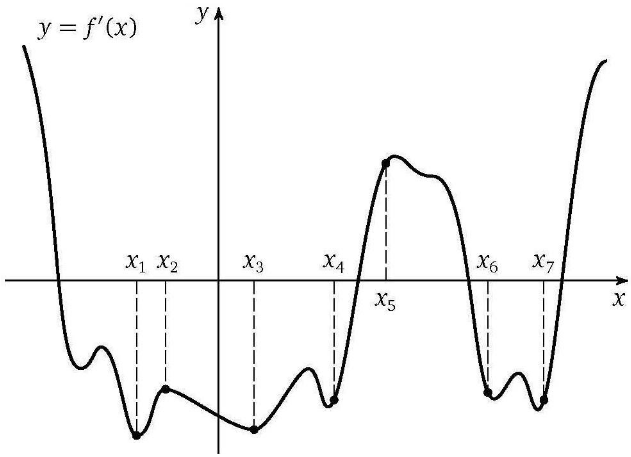
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

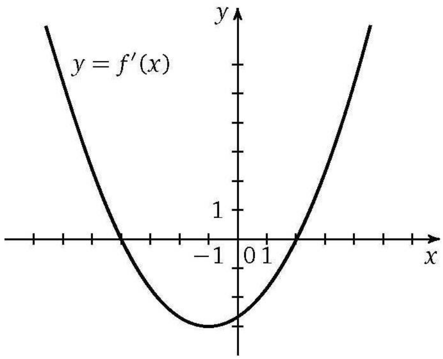
5

5. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены семь точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам убывания функции $f(x)$?



6

6. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$. В какой из точек -3; -2; -1; 0; 1 значение функции наибольшее? В ответе укажите эту точку.

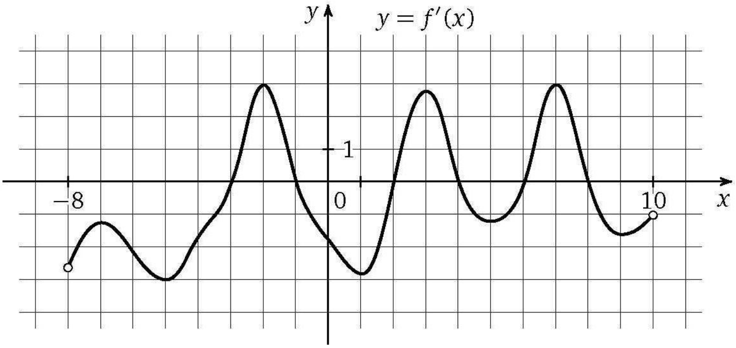


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

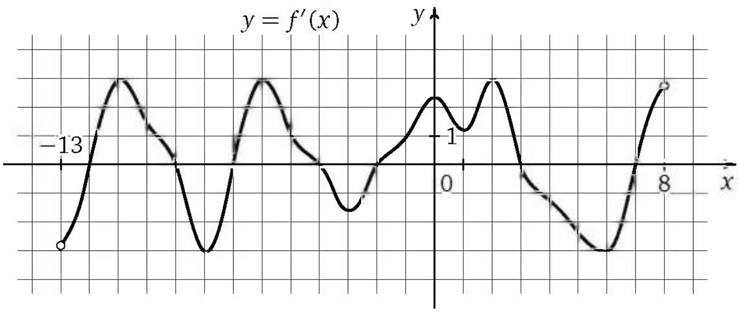
7. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 10)$.



Найдите число точек экстремума функции $y = f(x)$, принадлежащих отрезку $[-7; 7]$.

7

8. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-13; 8)$.



Найдите точки минимума функции $y = f(x)$. В ответе укажите наибольшую из них.

8

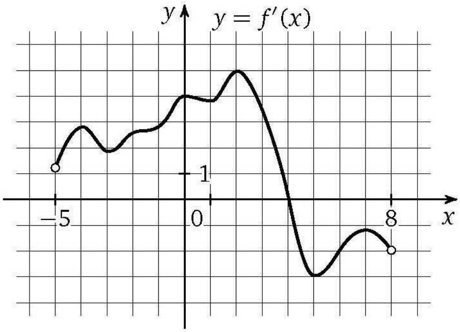
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

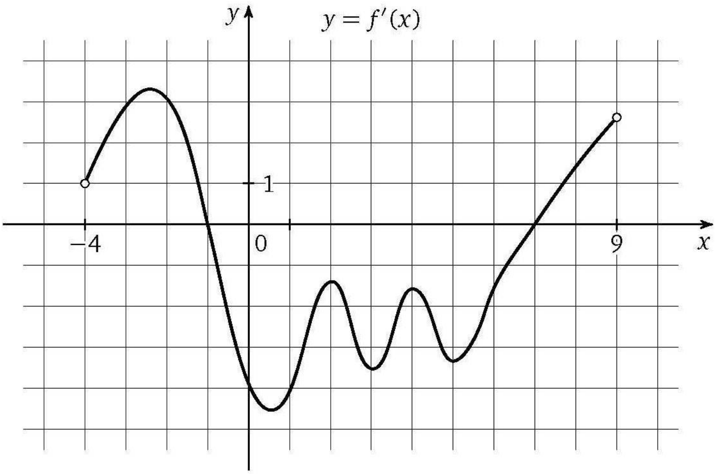
9

9. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 8)$. В какой точке отрезка $[-4; -1]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наименьшего на этом отрезке значения?



10

10. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 9)$. В какой точке отрезка $[-3; 6]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего на этом отрезке значения?



Образец написания:

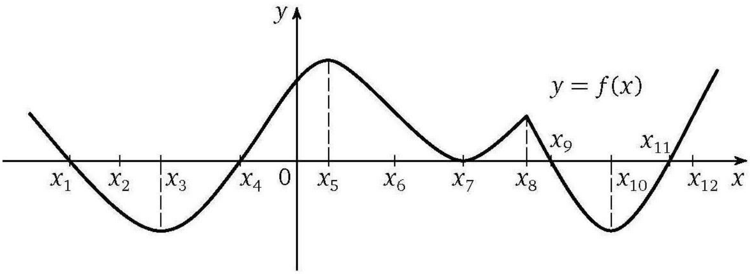
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Вариант 2

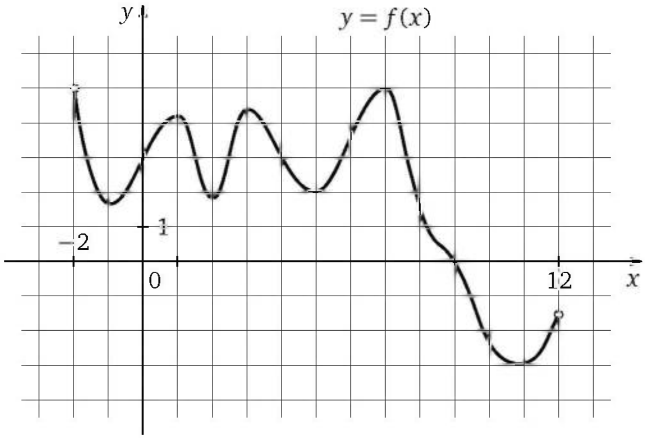
1. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и двенадцать точек x_1, x_2, x_3, ..., x_{12} оси абсцисс (точки $x_3, x_5, x_7, x_8, x_{10}$ являются точками экстремума). В скольких из этих двенадцати точек производная $f'(x)$ положительна, если известно, что функция $y=f(x)$ имеет производную в каждой точке числовой прямой за исключением, быть может, некоторых точек экстремума?

1



2. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой и дифференцируемой на интервале $(-2; 12)$. Найдите число решений уравнения $f'(x)=0$ на отрезке $[5{,}5; 10]$.

2



Образец написания:

1234567890–,

Ответы:

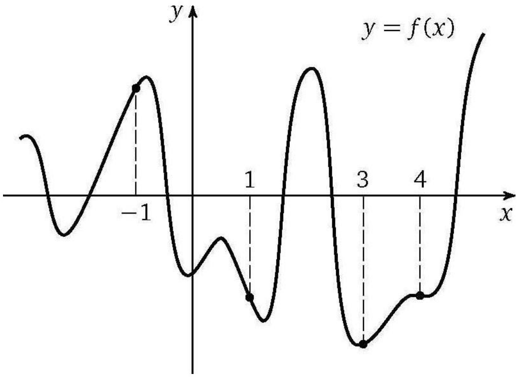
3

4

Образец написания:

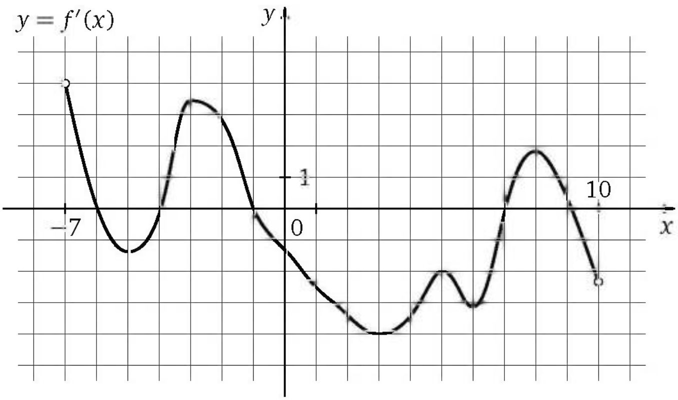
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

3. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки -1, 1, 3, 4.



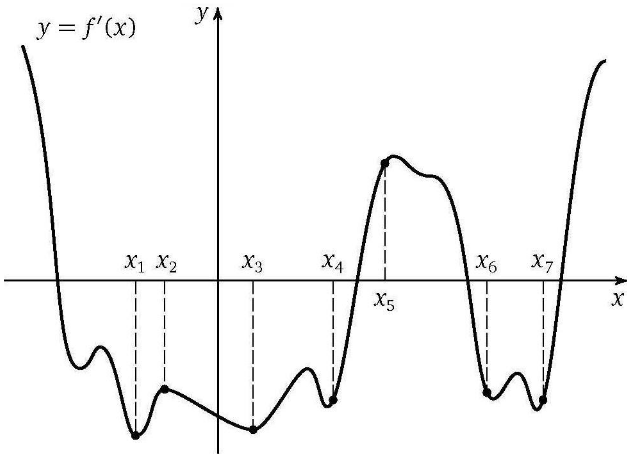
В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

4. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 10)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



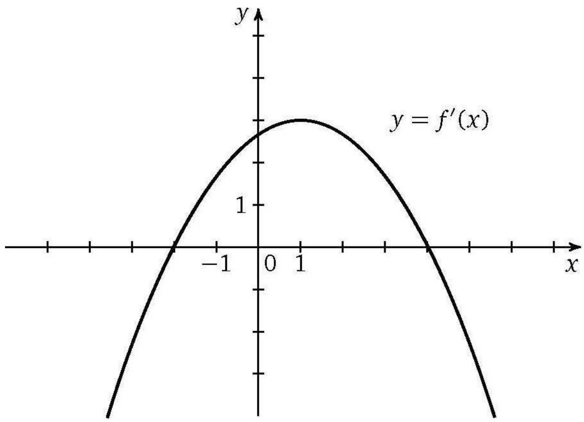
Ответы:

5. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены семь точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам возрастания функции $f(x)$?



5

6. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$. В какой из точек -1; 0; 1; 2; 3 значение функции наибольшее? В ответе укажите эту точку.



6

Образец написания:

1234567890–,

Ответы:

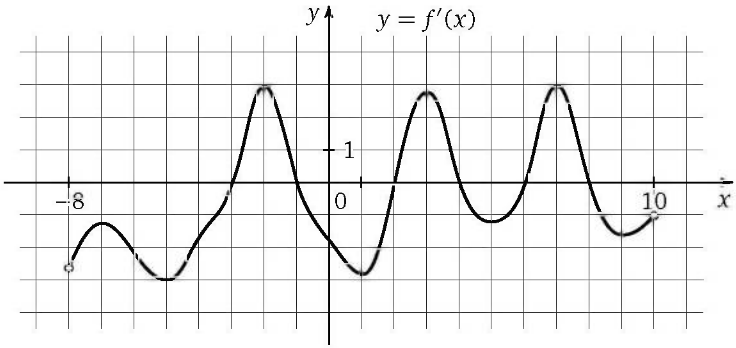
7

8

Образец написания:

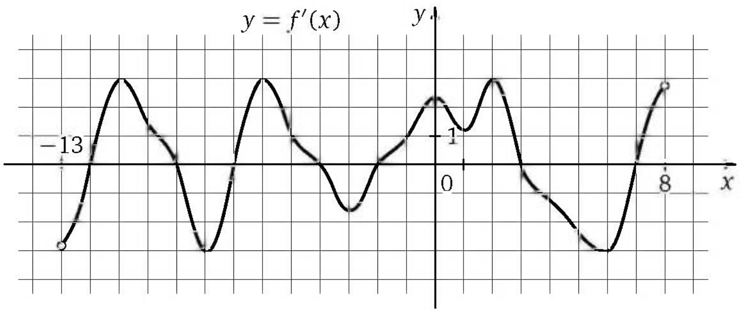
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

7. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 10)$.



Найдите число точек экстремума функции $y = f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2; 9]$.

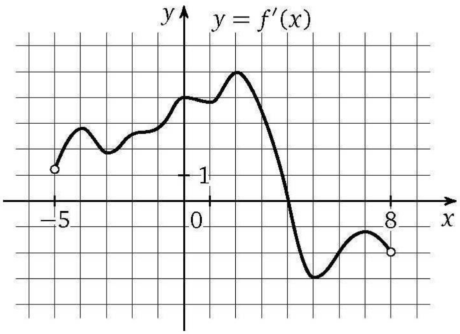
8. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-13; 8)$.



Найдите точки максимума функции $y = f(x)$. В ответе укажите наименьшую из них.

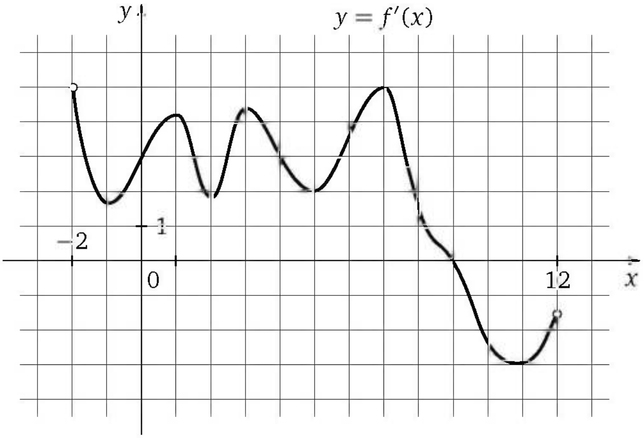
Ответы:

9. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 8)$. В какой точке отрезка $[-1; 3]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наименьшего на этом отрезке значения?



9

10. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 12)$. В какой точке отрезка $[-1; 11]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего на этом отрезке значения?



10

Образец написания:

2.1. Чтение свойств производной функции по графику этой функции

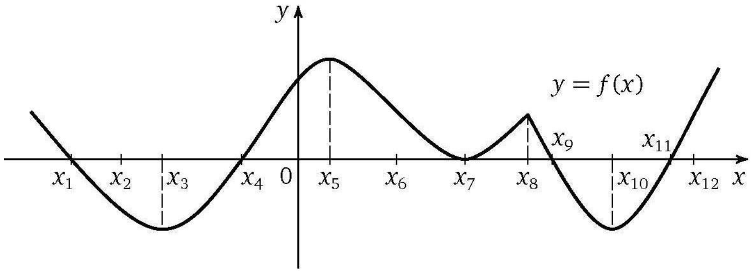
Эта часть пособия предназначена для отработки и закрепления навыков решения задач на применение производной. Варианты ЕГЭ по математике обычно содержат два задания по этой теме, каждое из которых можно отнести к одному из двух типов. Задание первого типа — это ставшая традиционной в ЕГЭ по математике задача на чтение графика функции для ответа на вопрос о каком-то из свойств производной этой функции, либо на чтение графика производной функции для ответа на вопрос о каком-то из свойств самой функции. Задание второго типа — это задание на вычисление с помощью производной точек экстремума данной функции, её экстремумов или наибольшего (наименьшего) значения данной функции на данном отрезке.

Что касается задач первого типа (функция или её производная задана графиком), то для их решения, как уже отмечалось, совершенно не обязательно владеть техникой вычисления производных, знать правила вычисления и таблицу производных основных элементарных функций. Достаточно даже интуитивного представления о том, что такое касательная к графику функции и как знак углового коэффициента касательной связан с возрастанием, убыванием и точками экстремума функции. Эти задачи — при правильном наглядном подходе к изложению темы — вполне по силам даже школьнику-«гуманитарию». Решение задач второго типа (функция задана формулой) предполагает умение вычислять производные, находить промежутки их знакопостоянства и нули (что, в свою очередь, требует умения решать уравнения и неравенства), применять стандартный алгоритм при нахождении наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке; эти задачи предназначены тем, кто сдаёт ЕГЭ по математике на профильном уровне (задание 12 ЕГЭ профильного уровня).

Прежде чем переходить к решению примеров, введем один термин. Если функция имеет производную в данной точке, то эта функция называется дифференцируемой в данной точке, а сама операция вычисления производной называется дифференцированием. Почему используется именно такой термин, можно узнать из книги «Производная и первообразная. Исследование функций. Задача 12 (профильный уровень)» (М.: МЦНМО, 2020); пока же достаточно понимать, что им удобно пользоваться для более компактной записи условия и решения.

Рассмотрим вначале, какую информацию о свойствах производной гладкой функции можно извлечь из данного графика этой функции. Все необходимые для этого выводы были сделаны ранее, осталось подвести краткий итог: в каждой точке промежутка возрастания дифференцируемой функции производная положительна, в каждой точке промежутка убывания дифференцируемой функции производная отрицательна, в точках экстремума дифференцируемой функции производная равна нулю.

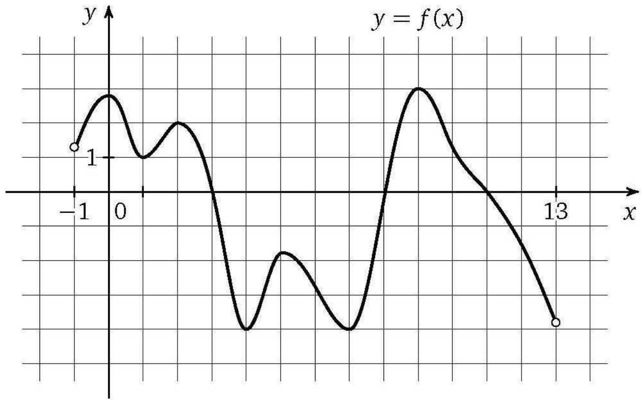
Пример 1 (задача 1 варианта 1 диагностической работы 3). На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{12}$ оси абсцисс (точки $x_3, x_5, x_7, x_8, x_{10}$ являются точками экстремума). В скольких из этих двенадцати точек производная $f'(x)$ положительна, если известно, что функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке числовой прямой за исключением, быть может, некоторых точек экстремума?



Решение. Точки $x_3, x_5, x_7, x_8, x_{10}$ являются точками экстремума функции, поэтому в этих точках производная либо равна нулю (точки x_3, x_5, x_7, x_{10}), либо не существует (точка x_8). Каждая из оставшихся точек принадлежит либо интервалу убывания функции (точки x_1, x_2, x_6, x_9), либо интервалу возрастания функции (точки x_4, x_{11}, x_{12}). Следовательно, отрицательные значения производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ принимает в точках x_1, x_2, x_6, x_9.

Ответ. 4.

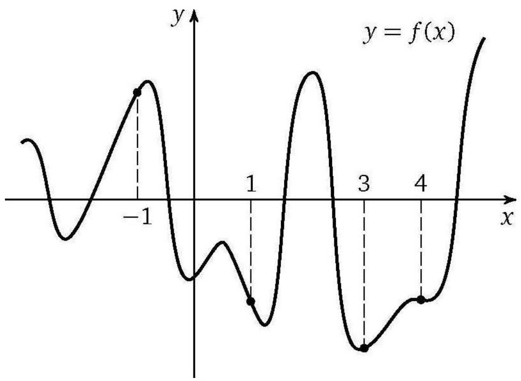
Пример 2 (задача 2 варианта 1 диагностической работы 3). На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-1; 13)$. Найдите число решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[3; 11]$.



Решение. Условие равенства нулю производной некоторой функции в данной точке означает, что угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции в данной точке, равен нулю, т. е. такая касательная параллельна оси абсцисс. Для данного графика таким свойством обладают все точки минимума и все точки максимума, т. е. все точки экстремума («вершины» и «впадины»). Таких точек в данном случае ровно 7. Отрезку [3; 11] из этих семи точек принадлежат ровно 4.

Ответ. 4.

Пример 3 (задача 3 варианта 1 диагностической работы 3)**.** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки -1, 1, 3, 4.



В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

Решение. В каждой точке промежутка возрастания дифференцируемой функции производная функции положительна, в каждой точке промежутка убывания — отрицательна. Для ответа на вопрос задачи достаточно сравнить положительные значения производной, т. е. числа $f'(-1)$ и $f'(3)$, равные угловым коэффициентам касательных, проведённых к графику функции $y = f(x)$ в точках с абсциссами -1 и 3. Понятно, что больший из углов (они в данном случае будут острыми) образует с положительным направлением оси абсцисс касательная, проведённая к графику функции в точке с абсциссой -1. Поэтому и угловой коэффициент этой прямой будет больше. Следовательно, $f'(-1) > f'(3)$.

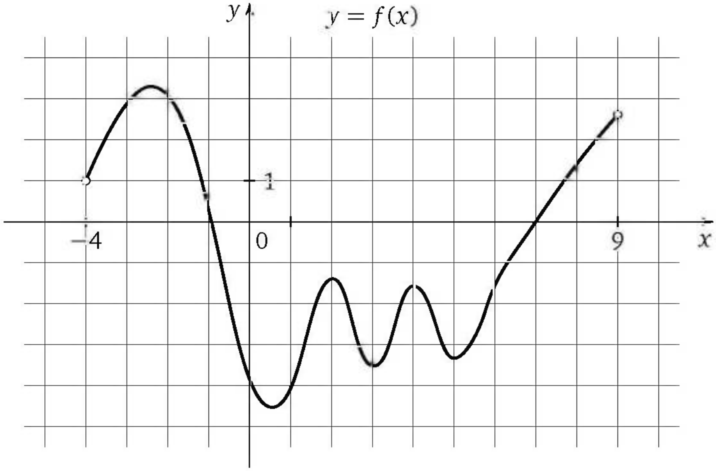
Ответ. -1.

Ответы:

Тренировочная работа 5

Вариант 1

1. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 9)$.

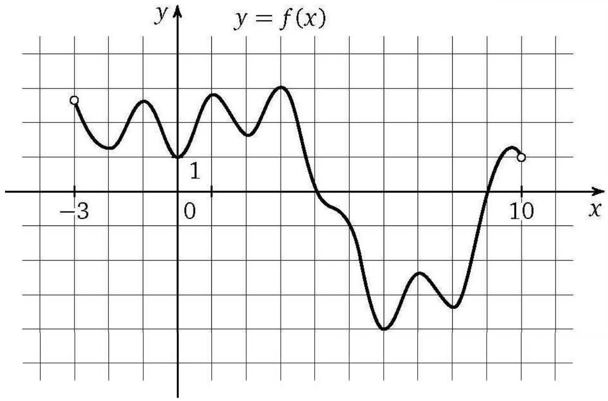


В скольких целых точках производная функции отрицательна?

1

2. На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 10)$. В скольких целых точках производная этой функции равна 0?

2

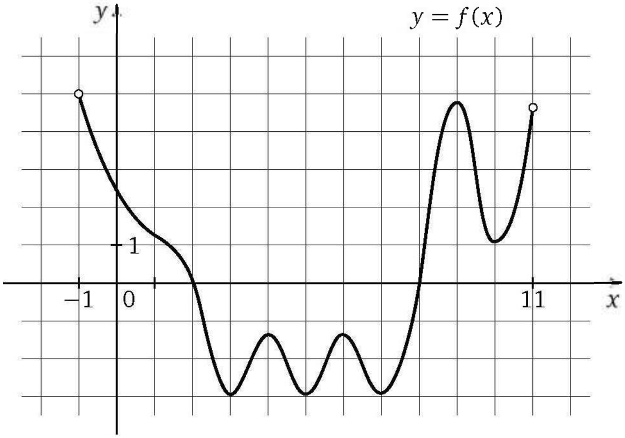


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

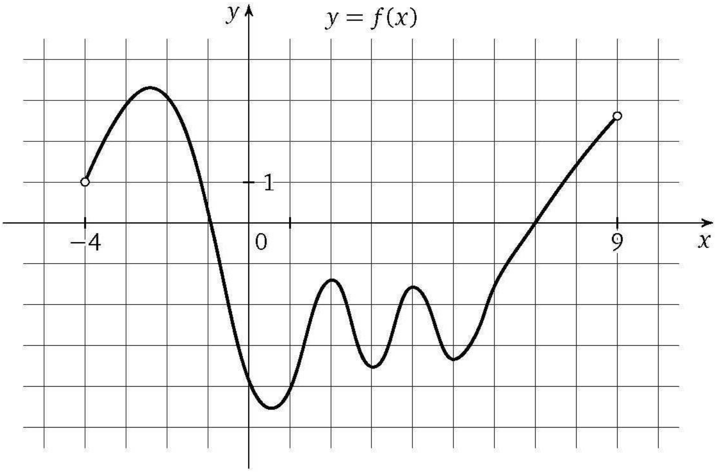
3

3. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-1; 11)$. Найдите число точек графика, в каждой из которых касательная к нему параллельна прямой $y = 15$ или совпадает с ней.



4

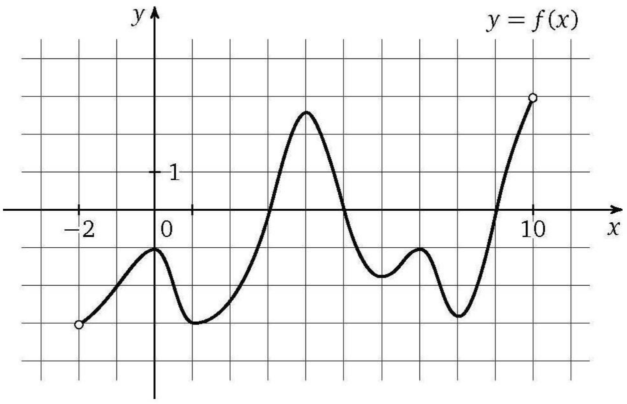
4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 9)$. Найдите число точек графика, в каждой из которых касательная к нему перпендикулярна прямой $x = -78$.



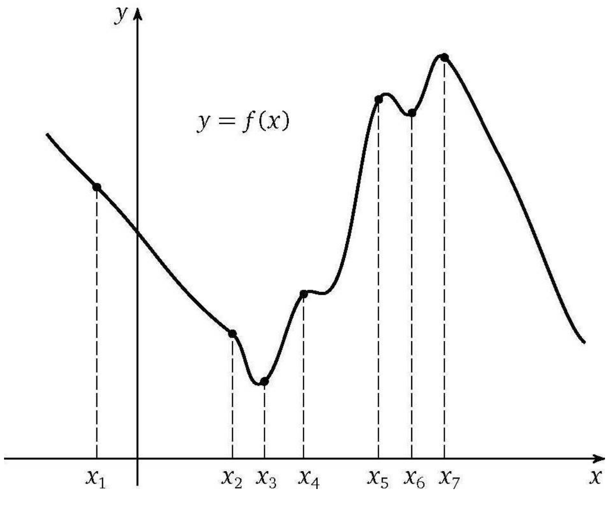
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 − ,

5. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 10)$. Найдите наибольшую из длин промежутков, в каждой точке которых производная этой функции неположительна.



6. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. В скольких из этих точек производная функции $y = f(x)$ положительна?



Ответы:

5

6

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

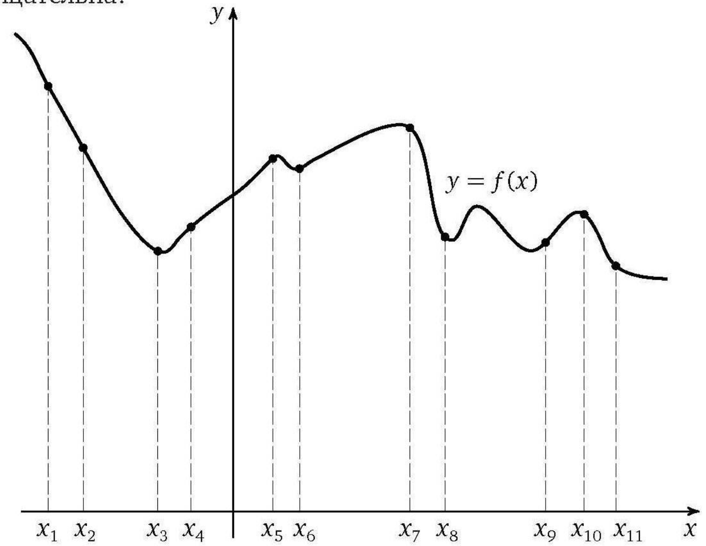
7

8

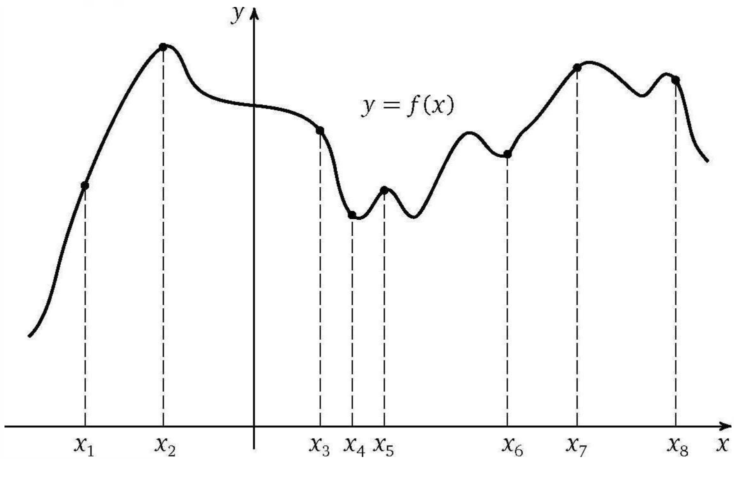
Образец написания:

1234567890-,

7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и одиннадцать точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}. В скольких из этих точек производная функции $y = f(x)$ отрицательна?



8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. Найдите наибольшее из чисел: 1) $f'(x_3)$, 2) $f'(x_4)$, 3) $f'(x_6)$, 4) $f'(x_8)$. В ответе укажите номер этого числа.

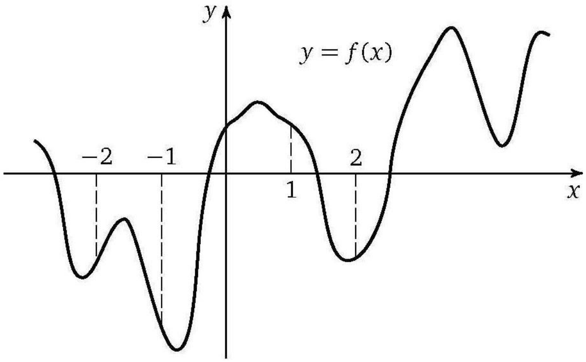


Ответы:

9. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки -2, -1, 1, 2. Какое из значений выражений:

1) $f'(-2) \cdot f'(-1)$,   3) $f'(-1) \cdot f'(1)$,
2) $f'(-2) \cdot f'(1)$,   4) $f'(-1) \cdot f'(2)$

является наибольшим? В ответе укажите номер этого выражения.

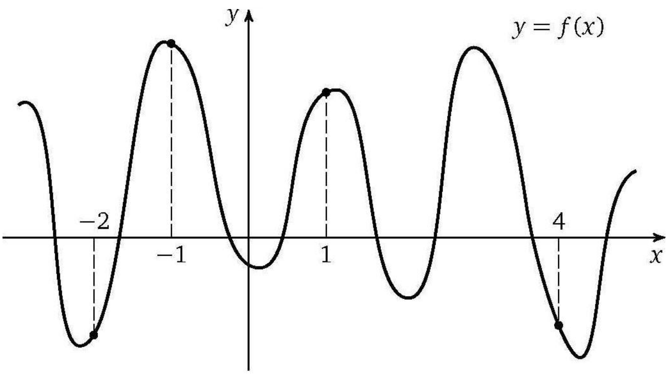


9

10. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки -2, -1, 1, 4. Какое из значений выражений:

1) $f'(-2) - f'(-1) - f'(4)$,   3) $f'(-1) - f'(1) - f'(-2)$,
2) $f'(-1) \cdot f'(4) + f'(1)$,   4) $f'(-1) \cdot f'(4) + f'(-2)$

является наименьшим? В ответе укажите номер этого выражения.



10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

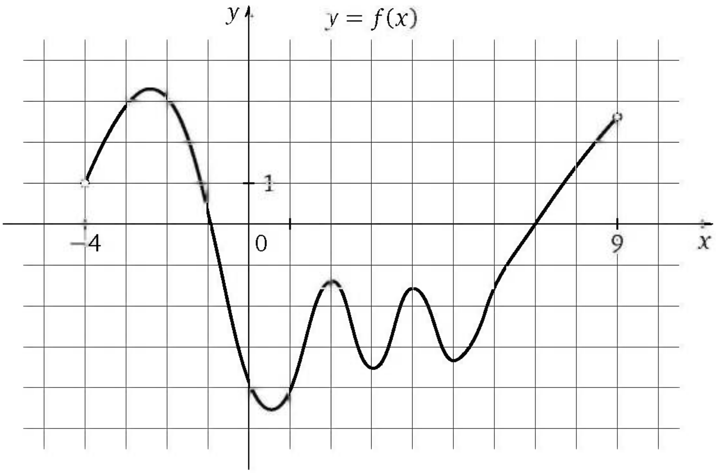
2

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

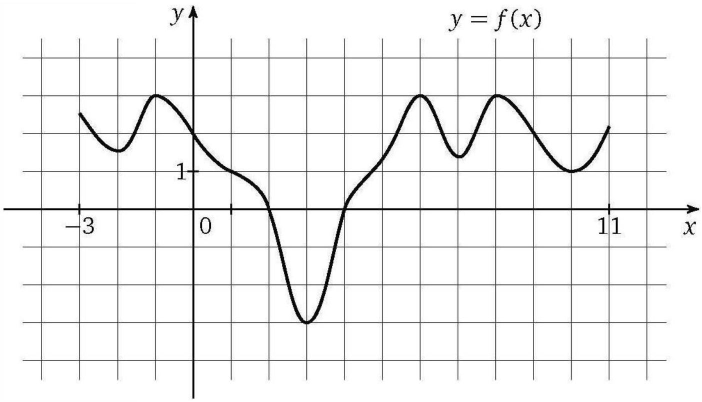
Вариант 2

1. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 9)$.



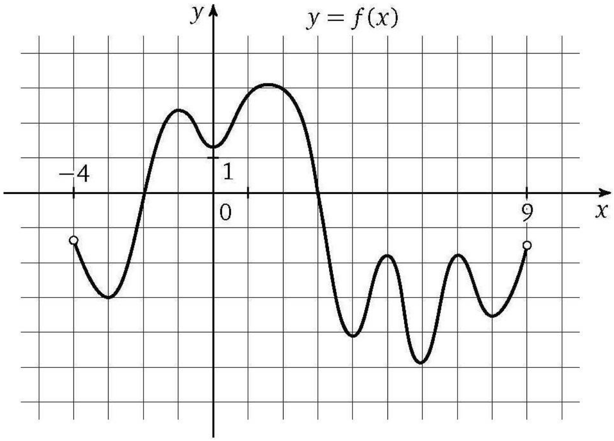
В скольких целых точках производная функции положительна?

2. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 11)$. В скольких целых точках производная этой функции равна 0?



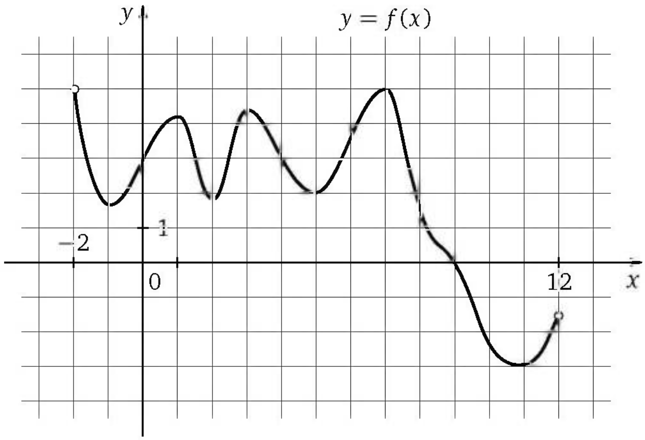
Ответы:

3. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 9)$. Найдите число точек графика, в каждой из которых касательная к нему параллельна прямой $y = 18$ или совпадает с ней.



3 ☐☐☐☐☐☐☐☐

4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 12)$. Найдите число точек графика, в каждой из которых касательная к нему перпендикулярна прямой $x = -87$.



4 ☐☐☐☐☐☐☐☐

Образец написания:

Ответы:

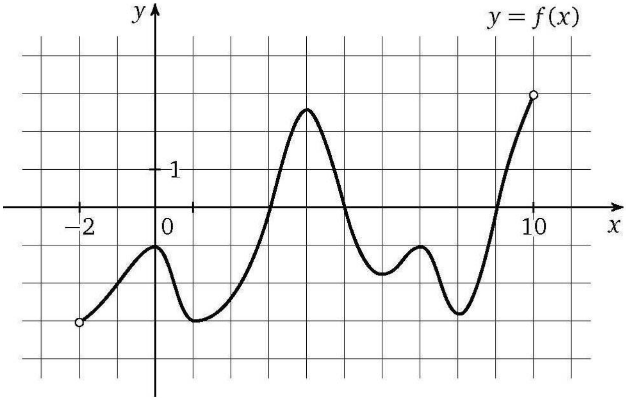
5

6

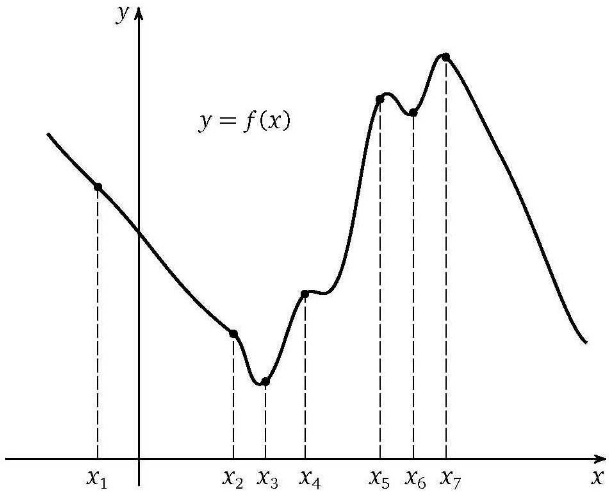
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

5. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 10)$. Найдите наибольшую из длин промежутков, в каждой точке которых производная этой функции неотрицательна.

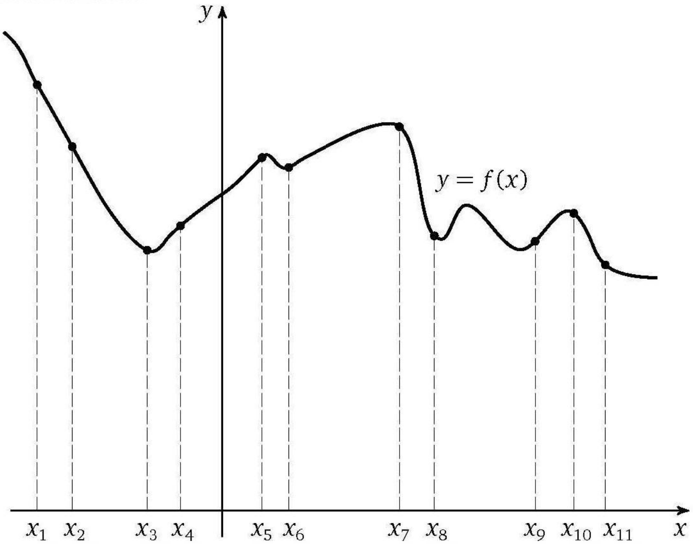


6. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. В скольких из этих точек производная функции $y = f(x)$ отрицательна?



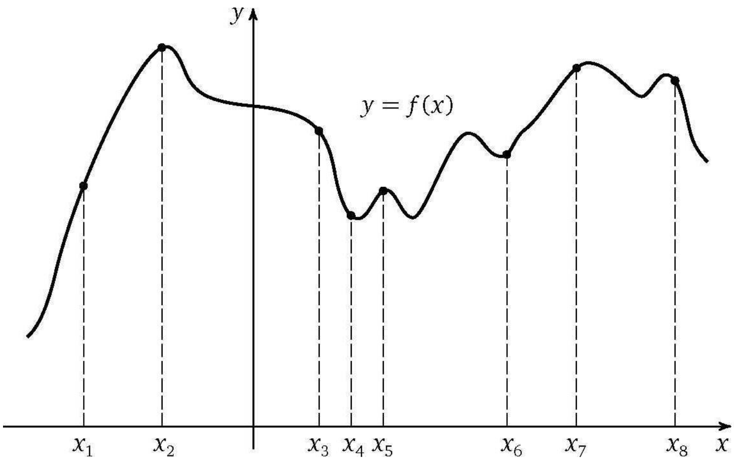
Ответы:

7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и одиннадцать точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}. В скольких из этих точек производная функции $y = f(x)$ положительна?



7

8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. Найдите наименьшее из чисел 1) $f'(x_1)$, 2) $f'(x_2)$, 3) $f'(x_7)$, 4) $f'(x_8)$. В ответе укажите номер этого числа.



8

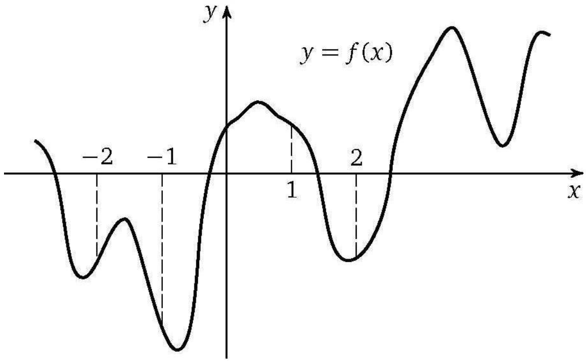
Образец написания:

9

9. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки -2, -1, 1, 2. Какое из значений выражений:

1) $f'(-2) \cdot f'(1)$,
2) $f'(-1) \cdot f'(2)$,
3) $f'(1) \cdot f'(2)$,
4) $f'(-2) \cdot f'(2)$

является наибольшим? В ответе укажите номер этого выражения.

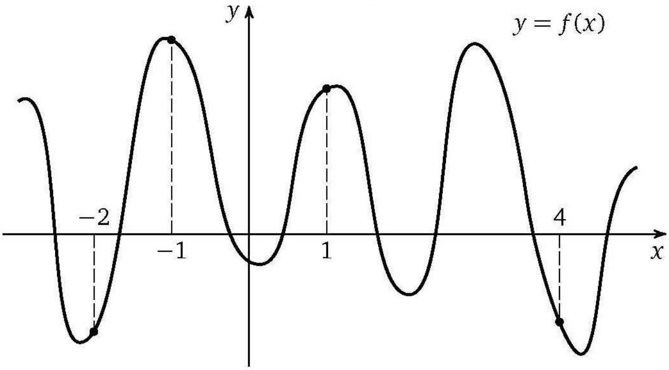


10

10. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки -2, -1, 1, 4. Какое из значений выражений:

1) $f'(4) - f'(-2) - f'(1)$,
2) $f'(-2) \cdot f'(1) - f'(-1)$,
3) $f'(1) - f'(4) - f'(-1)$,
4) $f'(-2) \cdot f'(1) - f'(4)$

является наименьшим? В ответе укажите номер этого выражения.



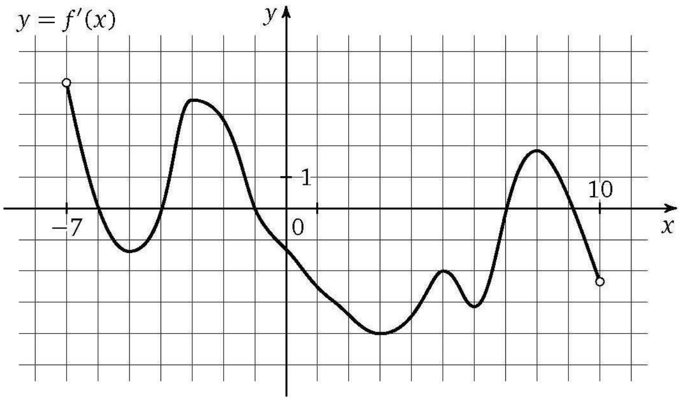
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

2.2. Чтение свойств функции по графику её производной. Возрастание и убывание функции

Эта часть пособия посвящена задачам, в которых по графику производной данной дифференцируемой функции нужно ответить на вопросы о промежутках возрастания и убывания самой функции. Промежутки знакоположительности производной функции (им соответствуют части графика производной, расположенные выше оси абсцисс) являются промежутками возрастания этой функции. Промежутки знакоотрицательности производной функции (им соответствуют части графика производной, расположенные ниже оси абсцисс) являются промежутками убывания функции. Если производная обращается в нуль в какой-то точке и меняет в ней знак (это точка, в которой график производной функции пересекает ось абсцисс), то такая точка включается как в промежуток возрастания, так и в промежуток убывания функции. Если производная обращается в нуль в какой-то точке и в не меняет в ней знак (это точка, в которой график производной функции касается прямой, содержащей ось абсцисс), то такая точка включается в соответствующий промежуток монотонности функции.

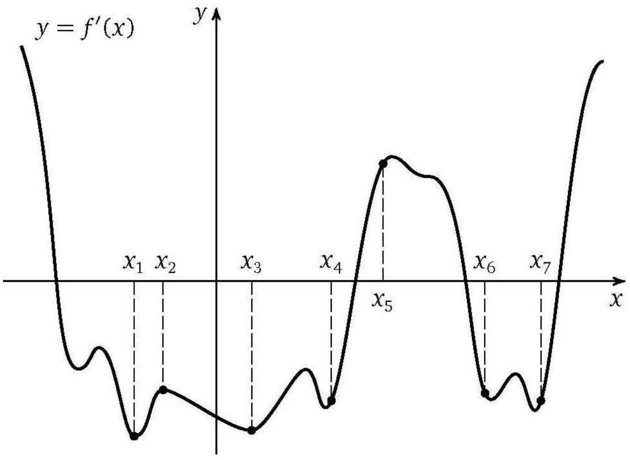
Пример 1 (задача 4 варианта 1 диагностической работы 3)**.** На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 10)$. Найдите промежутки возрастания функции $y = f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Решение. Части данного графика производной функции, расположенные не ниже оси абсцисс, соответствуют промежуткам возрастания этой функции. Это промежутки $(-7; -6]$, $[-4; -1]$, $[7; 9]$. Наибольшим из них является отрезок $[-4; -1]$, его длина равна 3.

Ответ. 3.

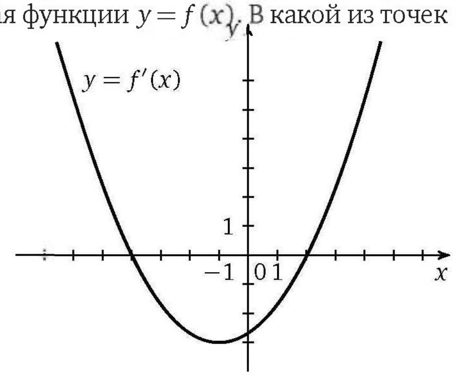
Пример 2 (задача 5 варианта 1 диагностической работы 3). На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y=f(x)$. На оси абсцисс отмечены семь точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам убывания функции $f(x)$?



Решение. Части данного графика производной функции, расположенные не выше оси абсцисс, соответствуют промежуткам убывания этой функции. Следовательно, промежуткам убывания данной функции принадлежат те из данных точек, которым соответствуют точки графика производной, лежащие ниже оси абсцисс. Таких точек ровно 6.

Ответ. 6.

Пример 2 (задача 6 варианта 1 диагностической работы 3). На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y=f(x)$. В какой из точек -3; -2; -1; 0; 1 значение функции наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Решение. Для решения задачи достаточно заметить, что все пять данных точек расположены на одной и той же лежащей ниже оси абсцисс части графика производной функции, а значит, принадлежат одному и тому же промежутку убывания функции. Поэтому наибольшее из значений функция принимает в меньшей из данных точек, т. е. в точке -3.

Ответ. -3.

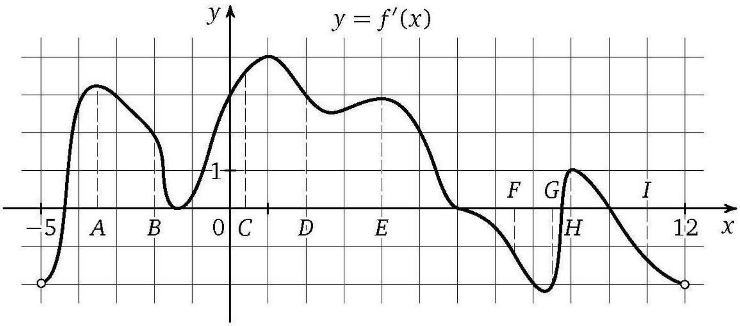
Ответы:

Тренировочная работа 6

Вариант 1

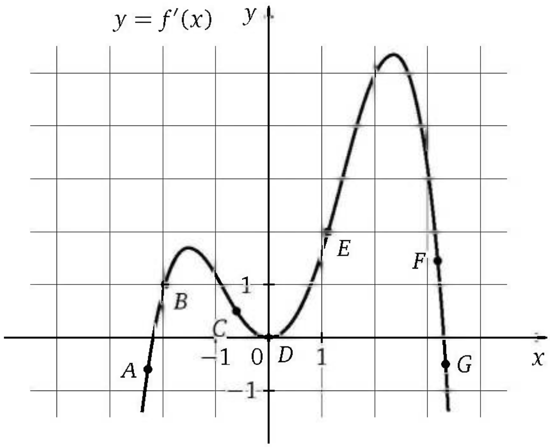
1. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 12)$, и отмечены 9 точек: $A, B, C, D, E, F, G, H, I$. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам убывания функции?

1



2. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, и отмечены 7 точек: A, B, C, D, E, F, G. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам возрастания функции?

2



Образец написания:

Ответы:

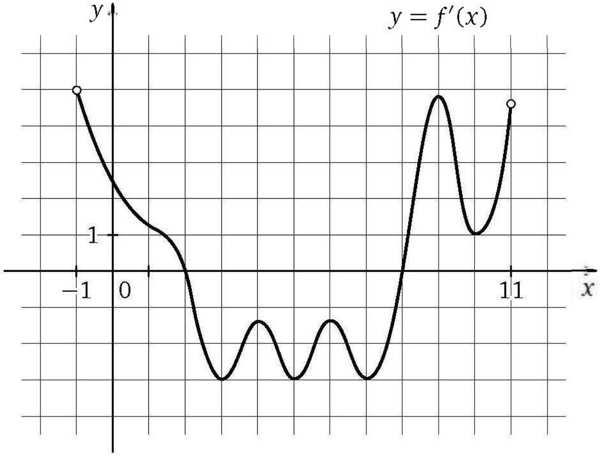
3

4

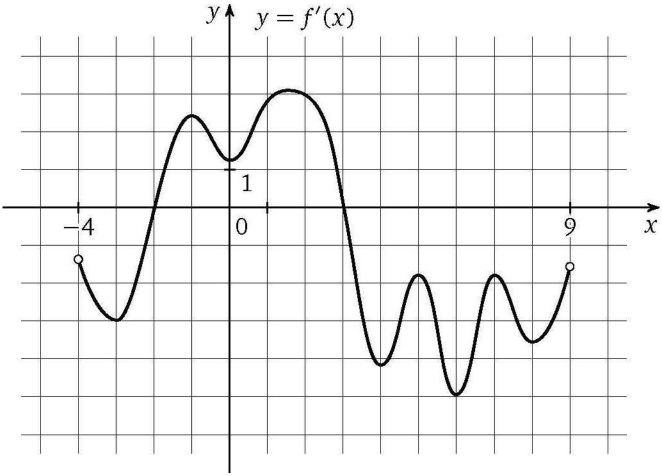
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

3. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-1; 11)$. Найдите длину промежутка убывания этой функции.

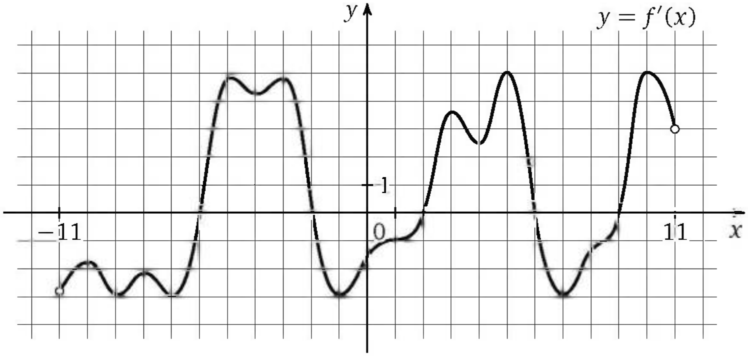


4. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 9)$. Найдите длину промежутка возрастания этой функции.



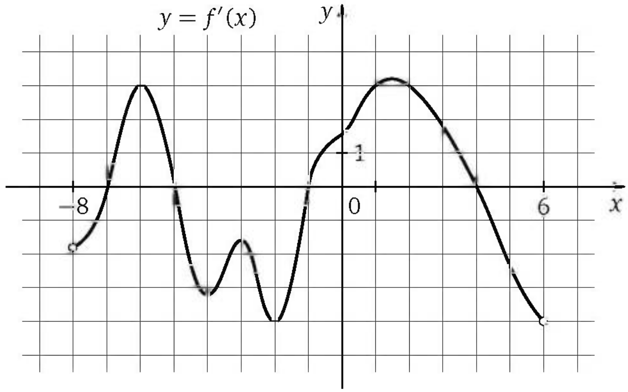
Ответы:

5. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-11; 11)$. Найдите промежутки убывания данной функции. В ответе укажите наименьшую из длин этих промежутков.



5

6. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 6)$. Найдите промежутки возрастания данной функции. В ответе укажите сумму длин этих промежутков.



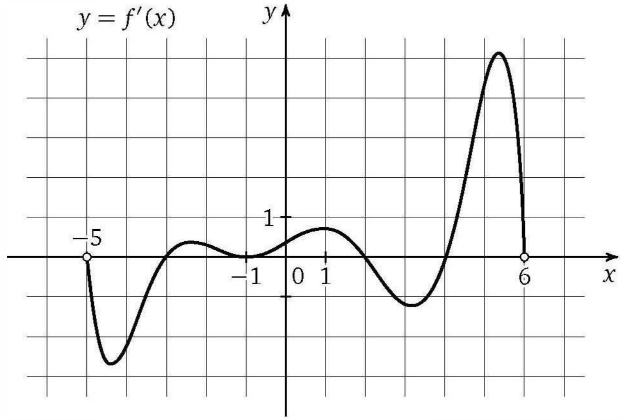
6

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

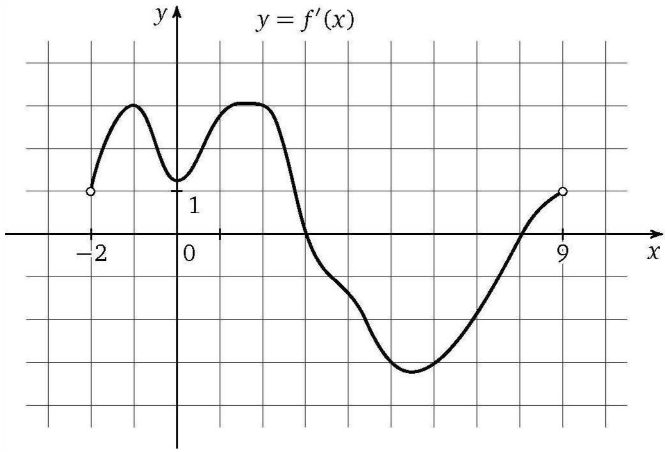
7

7. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 6)$. В какой из точек -2, -1, 0, 1 значение функции $y = f(x)$ будет наименьшим? В ответе укажите эту точку.



8

8. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 9)$. В какой из точек 4, 5, 6, 7 значение функции $y = f(x)$ будет наибольшим? В ответе укажите эту точку.



Образец написания:

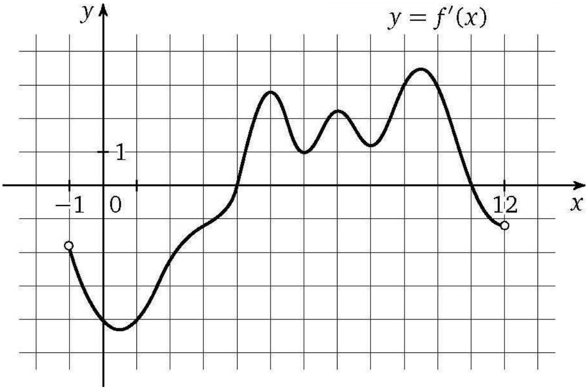
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

9. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-1; 12)$. Значение какой из сумм:

1) $f(8) + f(10)$;
2) $f(5) + f(7)$;
3) $f(6) + f(8)$;
4) $f(7) + f(9)$

будет наименьшим? В ответе укажите номер этой суммы.

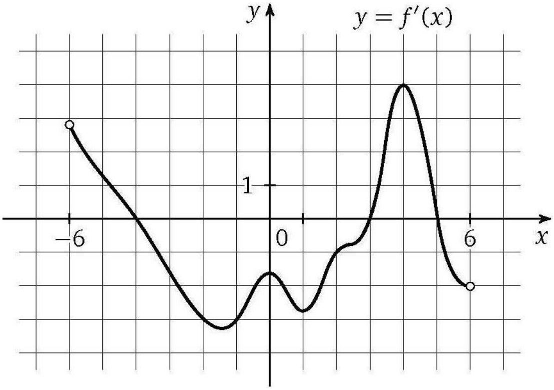


9

10. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Значение какой из сумм:

1) $f(2) + f(1) + f(0)$;
2) $f(1) + f(0) + f(-1)$;
3) $f(0) + f(-1) + f(-2)$;
4) $f(-1) + f(-2) + f(-3)$

будет наибольшим? В ответе укажите номер этой суммы.



10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

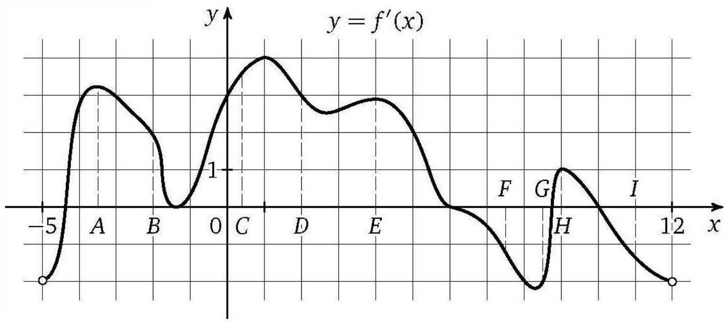
2

Образец написания:

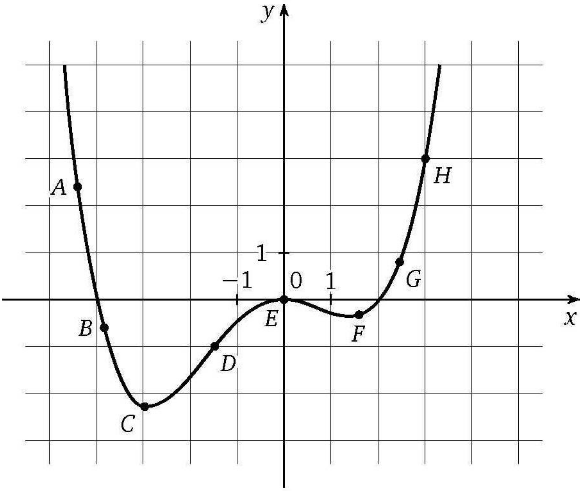
1234567890–,

Вариант 2

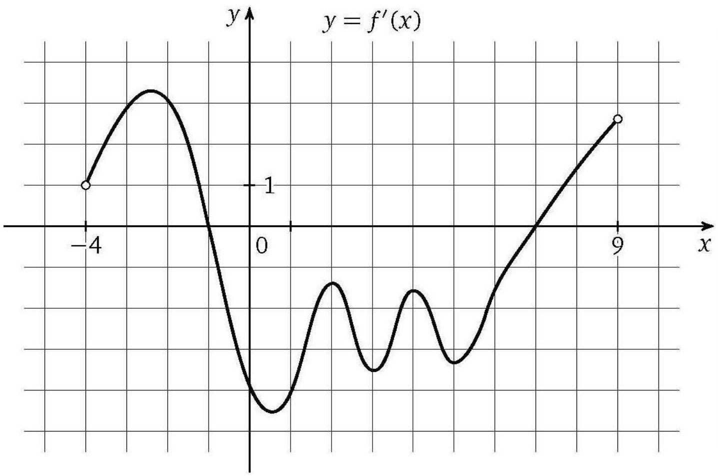
1. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 12)$, и отмечены 9 точек: A, B, C, D, E, F, G, H, I. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам возрастания функции?



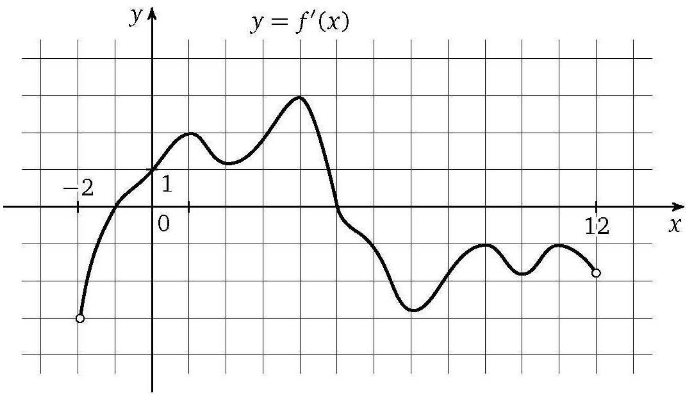
2. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, и отмечены 8 точек: A, B, C, D, E, F, G, H. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам убывания функции?



3. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 9)$. Найдите длину промежутка убывания этой функции.



4. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 12)$. Найдите длину промежутка возрастания этой функции.



Ответы:

3 ☐☐☐☐☐☐☐☐

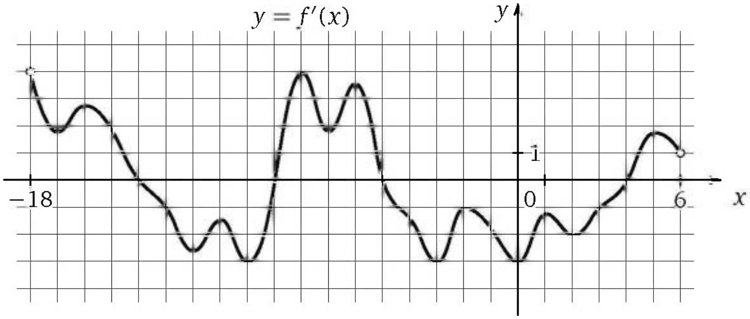
4 ☐☐☐☐☐☐☐☐

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

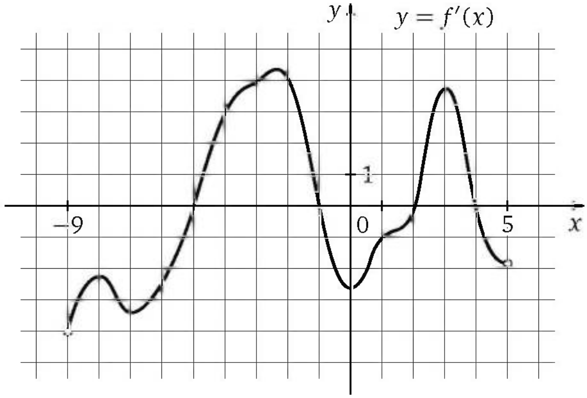
5

5. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-18; 6)$. Найдите промежутки убывания данной функции. В ответе укажите наибольшую из длин этих промежутков.



6

6. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 5)$. Найдите промежутки возрастания данной функции. В ответе укажите сумму длин этих промежутков.

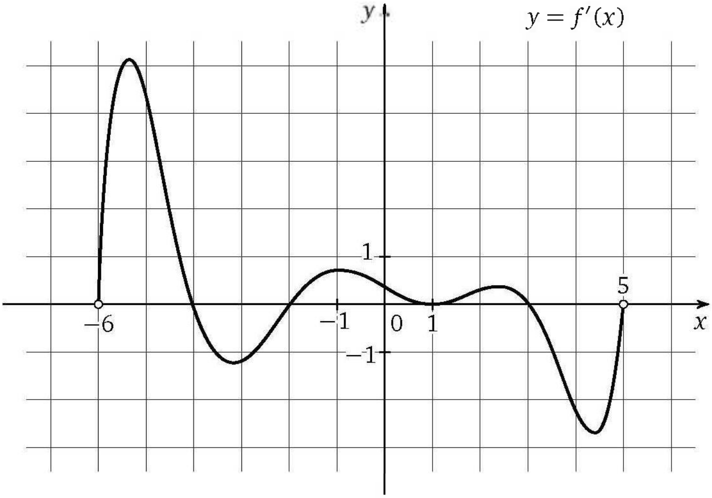


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

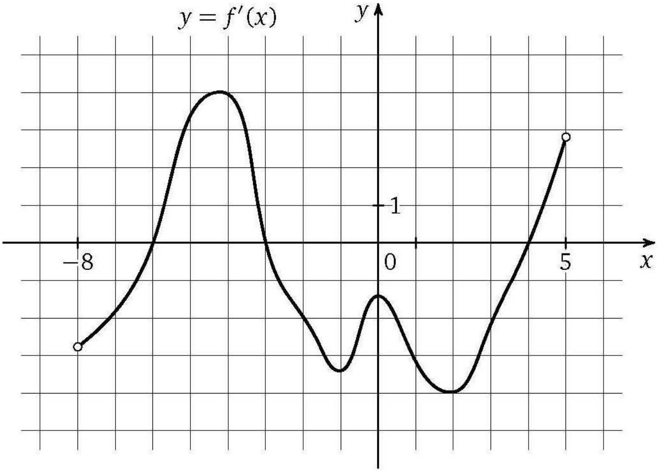
Ответы:

7. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. В какой из точек $-1, 0, 1, 2$ значение функции $y = f(x)$ будет наименьшим? В ответе укажите эту точку.



7

8. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 5)$. В какой из точек $-2, -1, 2, 3$ значение функции $y = f(x)$ будет наибольшим? В ответе укажите эту точку.



8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

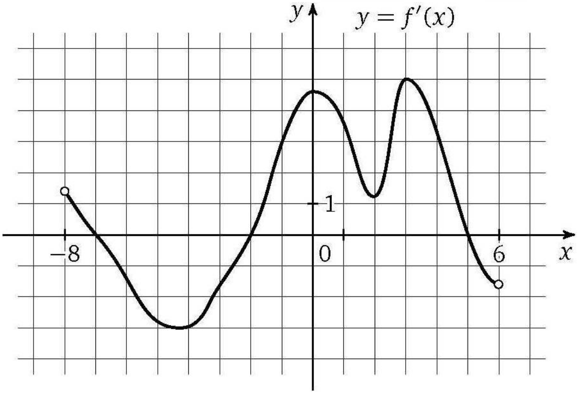
Ответы:

9

9. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 6)$. Значение какой из сумм:

1) $f(2) + f(4)$;
2) $f(1) + f(3)$;
3) $f(-1) + f(1)$;
4) $f(0) + f(2)$

будет наименьшим? В ответе укажите номер этой суммы.

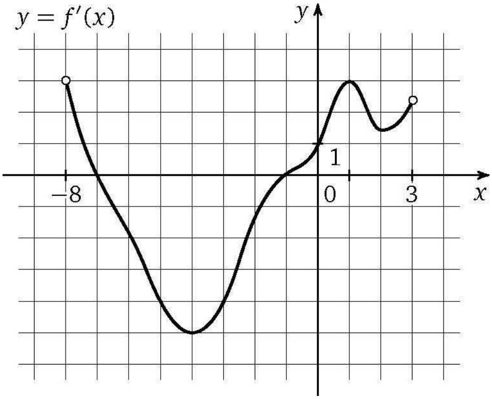


10

10. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 3)$. Значение какой из сумм:

1) $f(-7) + f(-6) + f(-5)$;
2) $f(-6) + f(-5) + f(-4)$;
3) $f(-5) + f(-4) + f(-3)$;
4) $f(-4) + f(-3) + f(-2)$

будет наибольшим? В ответе укажите номер этой суммы.



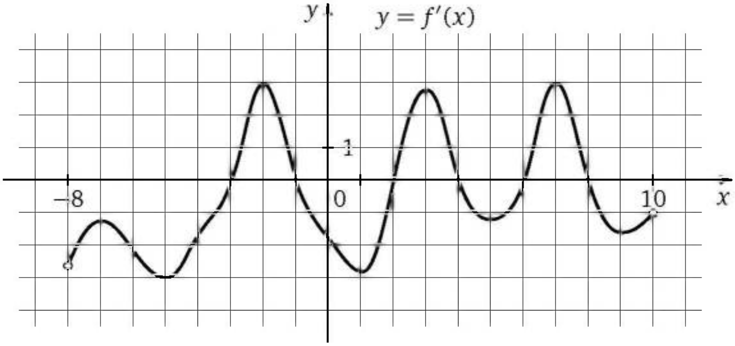
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

2.3. Чтение свойств функции по графику её производной. Точки экстремума

Напомним, что точки экстремума дифференцируемой функции — это те точки её области определения, в которых производная этой функции меняет знак, т. е. точки графика производной, в которых он пересекает ось абсцисс. Если в такой точке знак производной меняется с плюса на минус (возрастание функции сменяется убыванием), то это — точка максимума функции. Если в такой точке знак производной меняется с минуса на плюс (убывание функции сменяется возрастанием), то это — точка минимума функции. Это означает, что если смотреть на график производной функции «слева направо», то точки, в которых он пересекает ось абсцисс в направлении «сверху вниз», являются точками максимума этой функции, а точки, в которых график производной пересекает ось абсцисс в направлении «снизу вверх» — её точками минимума.

Пример 1 (задача 7 варианта 1 диагностической работы 3). На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 10)$.

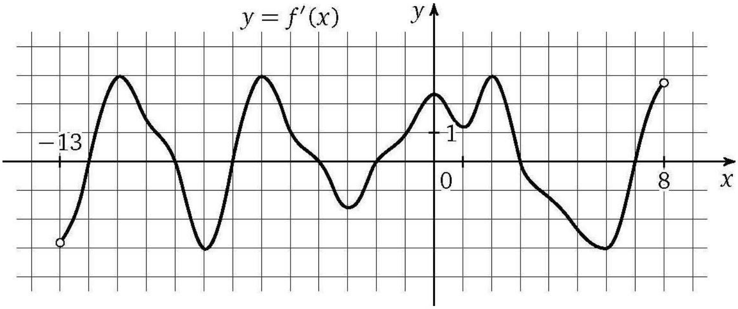


Найдите число точек экстремума функции $y = f(x)$, принадлежащих отрезку $[-7; 7]$.

Решение. Точки экстремума дифференцируемой функции — это те точки её области определения, в которых производная этой функции меняет знак, т. е. точки графика производной, в которых он пересекает ось абсцисс. Таких точек в данном случае ровно 6, но отрезку $[-7; 7]$ принадлежат только 5 из них.

Ответ. 5.

Пример 2 (задача 8 варианта 1 диагностической работы 3). На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-13; 8)$.



Найдите точки минимума функции $y = f(x)$. В ответе укажите наибольшую из них.

Решение. Если в некоторой точке знак производной меняется с минуса на плюс (убывание функции сменяется возрастанием), то это — точка минимума функции. Это точки, в которых график производной пересекает ось абсцисс в направлении «снизу вверх», если смотреть на график производной функции «слева направо». Таких точек в данном случае ровно 4; это точки -12, -7, -2, 7. Наибольшей из них является 7.

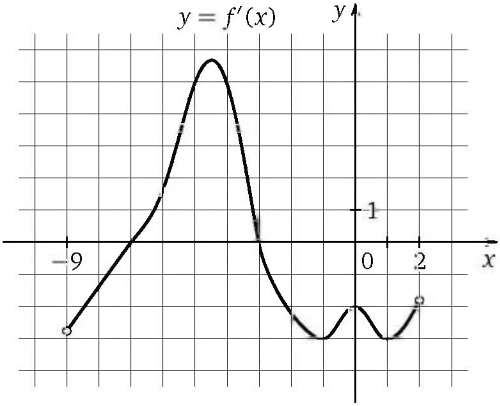
Ответ. 7.

Ответы:

Тренировочная работа 7

Вариант 1

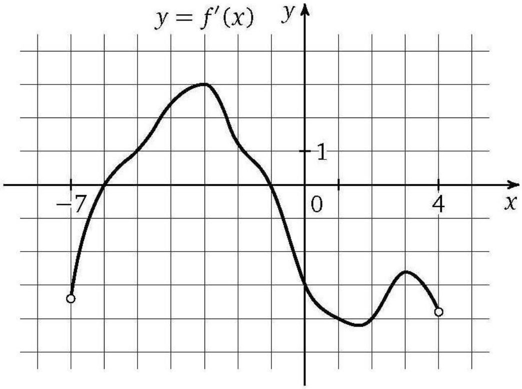
1. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 2)$.



Найдите точку минимума функции $y = f(x)$.

1

2. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 4)$.



Найдите точку максимума функции $y = f(x)$.

2

Образец написания:

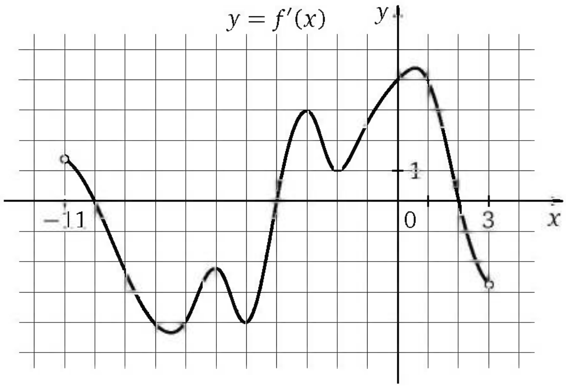
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

3

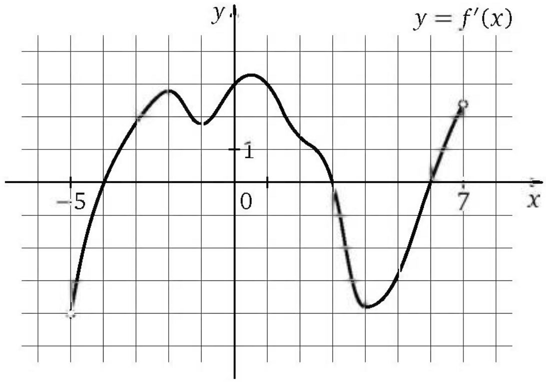
4

3. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-11; 3)$.



Найдите точку минимума функции $y = f(x)$.

4. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 7)$.

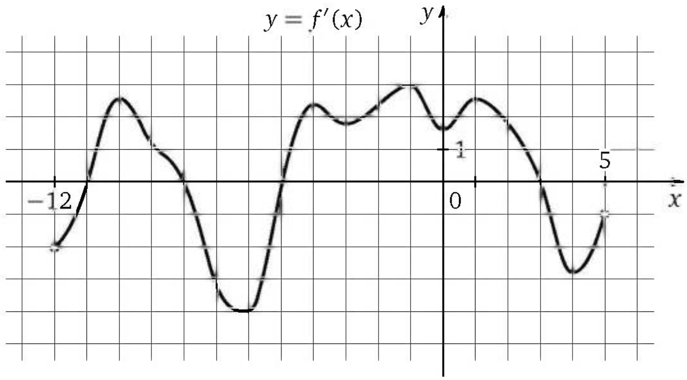


Найдите точку максимума функции $y = f(x)$.

Образец написания:

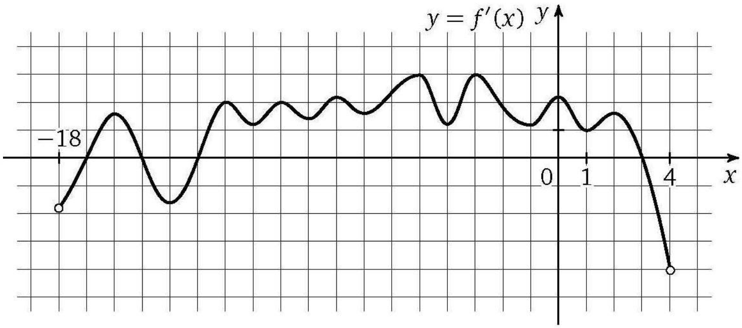
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

5. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-12; 5)$.



Найдите точки минимума функции $y = f(x)$. В ответ запишите их сумму.

6. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-18; 4)$.



Найдите точки максимума функции $y = f(x)$. В ответ запишите их сумму.

Ответы:

5

6

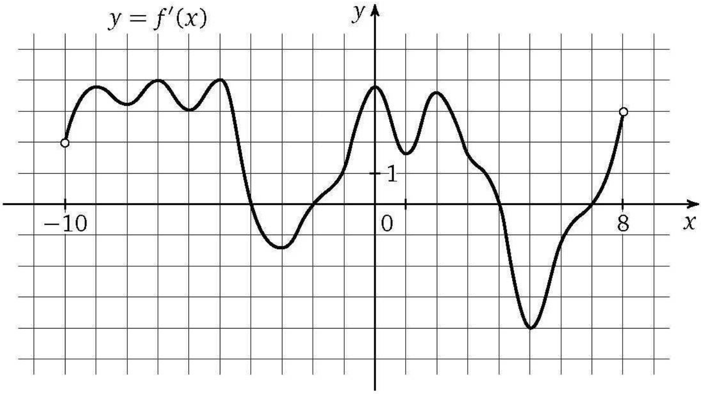
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

7

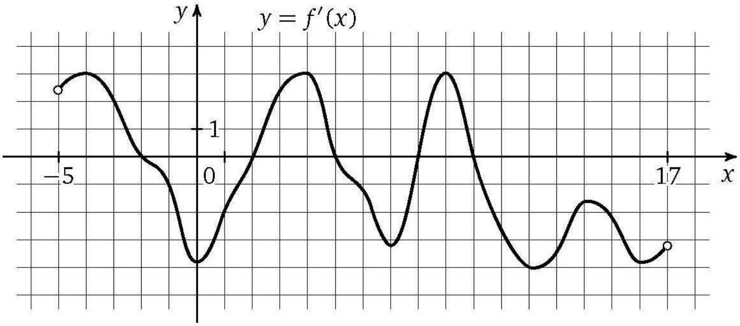
7. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-10; 8)$.



Найдите точки экстремума функции $y = f(x)$. В ответ запишите их сумму.

8

8. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 17)$.



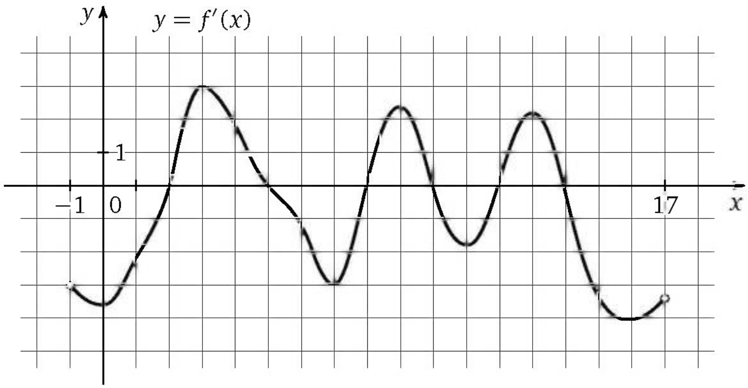
Найдите наибольшую из точек минимума функции $y = f(x)$.

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

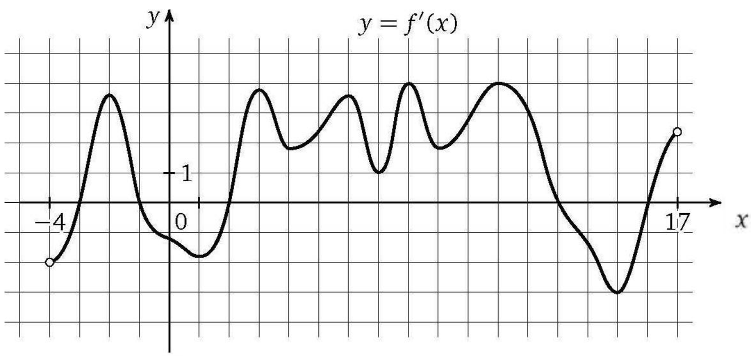
9. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-1; 17)$.



Найдите наименьшую из точек максимума функции $y = f(x)$.

9

10. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 17)$.



Найдите число точек экстремума функции $y = f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2; 14]$.

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

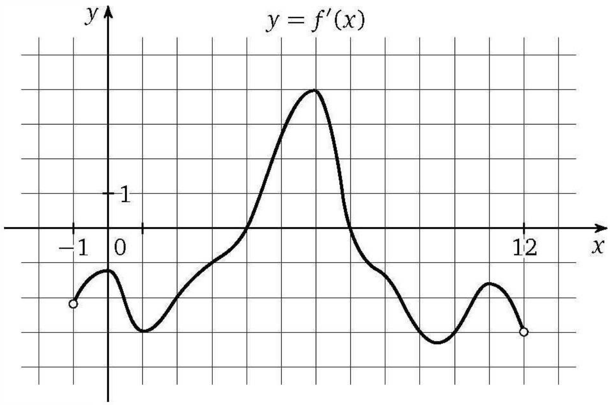
Ответы:

1

2

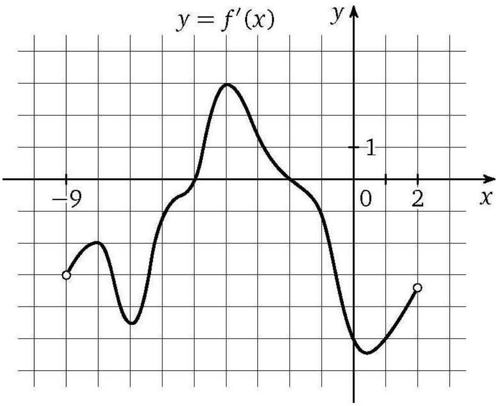
Вариант 2

1. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-1; 12)$.



Найдите точку минимума функции $y = f(x)$.

2. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 2)$.



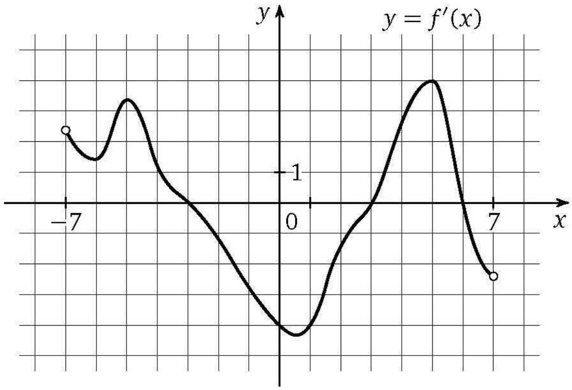
Найдите точку максимума функции $y = f(x)$.

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

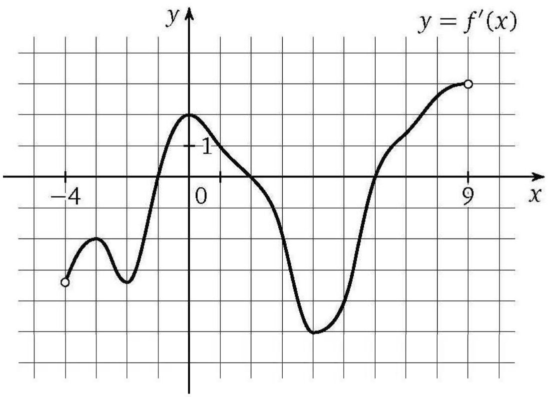
3. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$.



Найдите точку минимума функции $y = f(x)$.

3

4. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 9)$.



Найдите точку максимума функции $y = f(x)$.

4

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

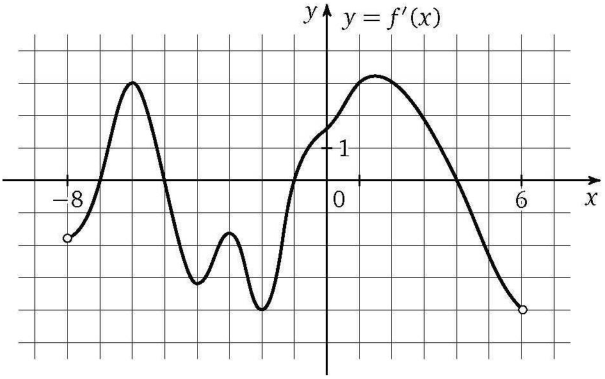
5

6

Образец написания:

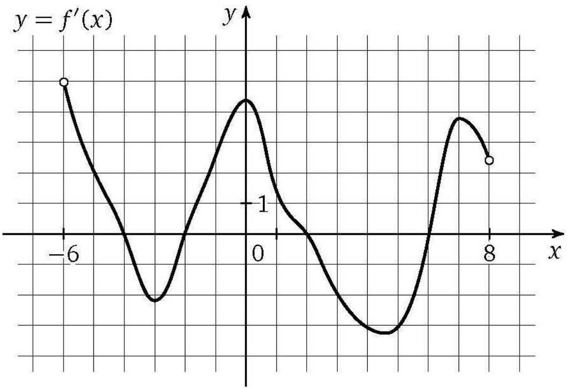
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

5. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 6)$.



Найдите точки минимума функции $y = f(x)$. В ответ запишите их сумму.

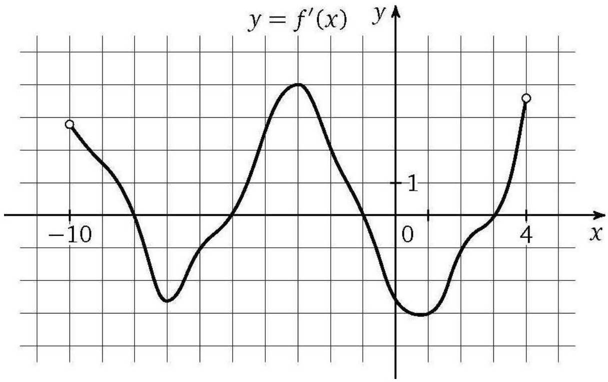
6. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 8)$.



Найдите точки максимума функции $y = f(x)$. В ответ запишите их сумму.

Ответы:

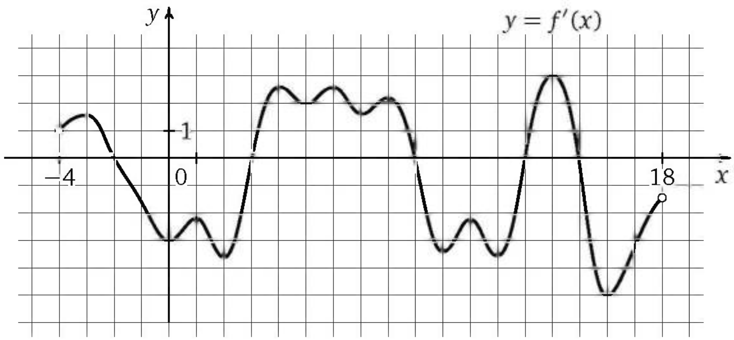
7. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-10; 4)$.



Найдите точки экстремума функции $y = f(x)$. В ответ запишите их сумму.

7

8. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 18)$.



Найдите наибольшую из точек максимума функции $y = f(x)$.

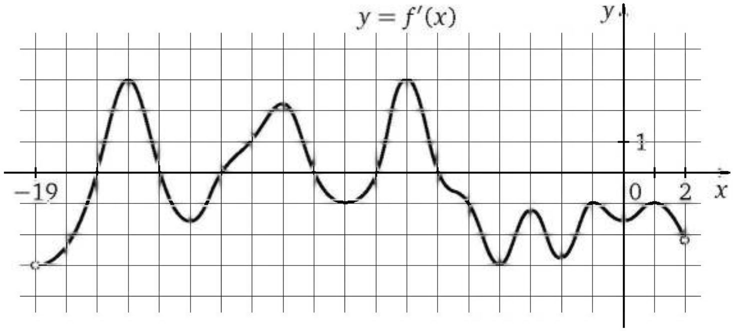
8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

9

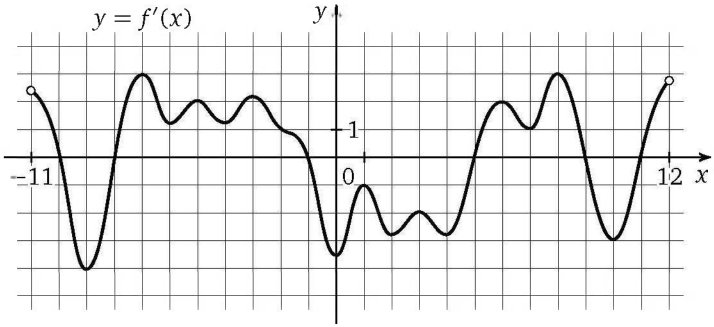
9. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-19; 2)$.



Найдите наибольшую из точек максимума функции $y = f(x)$.

10

10. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-11; 12)$.



Найдите число точек экстремума функции $y = f(x)$, принадлежащих отрезку $[-9; 10]$.

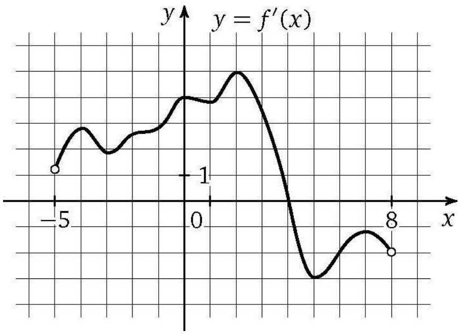
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

2.4. Чтение свойств функции по графику её производной. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Для любой непрерывной на отрезке функции можно указать точки, в которых она достигает своего наибольшего и своего наименьшего значения на этом отрезке. Если такой отрезок не содержит ни одной точки экстремума функции и функция возрастает на этом отрезке, то её наибольшее значение достигается в правом конце отрезка, а наименьшее — в левом. Если такой отрезок не содержит ни одной точки экстремума функции и функция монотонно убывает на этом отрезке, то её наибольшее значение достигается в левом конце отрезка, а наименьшее — в правом. Если такому отрезку принадлежит ровно одна точка максимума, то наибольшее значение функции достигается в этой точке, а наименьшее — в одном из концов отрезка. Если такому отрезку принадлежит ровно одна точка минимума, то наименьшее значение функции достигается в этой точке, а наибольшее — в одном из концов отрезка. Если точек экстремума, принадлежащих данному отрезку, более одной, то график производной не позволяет ответить на вопрос, в какой из них или в каком из концов отрезка функция достигает наибольшего (наименьшего) значений: в таких случаях обычно функция задаётся формулой, позволяющей найти её производную, вычислить точки экстремума и значения функции в них и на концах отрезка, после чего остаётся выбрать наибольшее (наименьшее) из найденных значений (см. задание 12 ЕГЭ по математике профильного уровня).

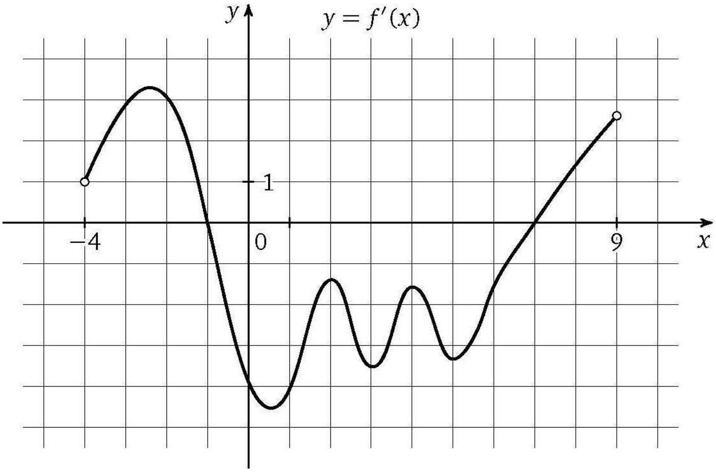
Пример 1 (задача 9 варианта 1 диагностической работы 3). На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 8)$. В какой точке отрезка $[-4; -1]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наименьшего на этом отрезке значения?



Решение. На отрезке $[-4; -1]$ производная функции принимает только положительные значения. Значит, эта функция монотонно возрастает на отрезке $[-4; -1]$ и достигает своего наименьшего на этом отрезке значения в его левом конце, т. е. в точке -4.

Ответ. -4.

Пример 2 (задача 10 варианта 1 диагностической работы 3)**.** На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 9)$. В какой точке отрезка $[-3; 6]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего на этом отрезке значения?



Решение. График производной функции пересекает ось абсцисс в точке -1, принадлежащей отрезку $[-3; 6]$, причём в этой точке производная меняет знак с плюса на минус, т. е. точка -1 является точкой максимума функции и единственной точкой экстремума на этом отрезке: функция возрастает на отрезке $[-3; -1]$ и убывает на отрезке $[-1; 6]$. Значит, своего наибольшего значения на отрезке $[-3; 6]$ функция достигает в точке -1.

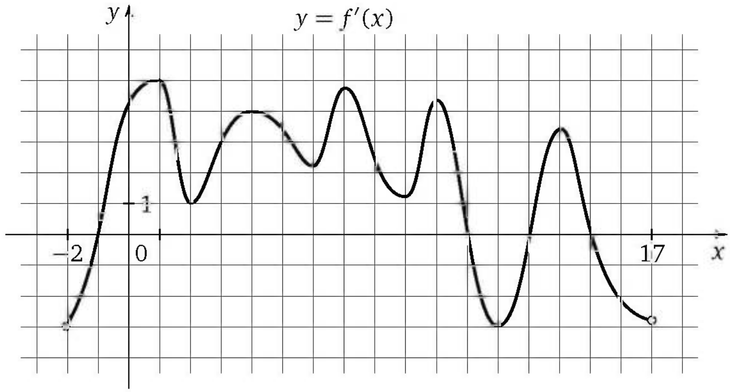
Ответ. -1.

Ответы:

Тренировочная работа 8

Вариант 1

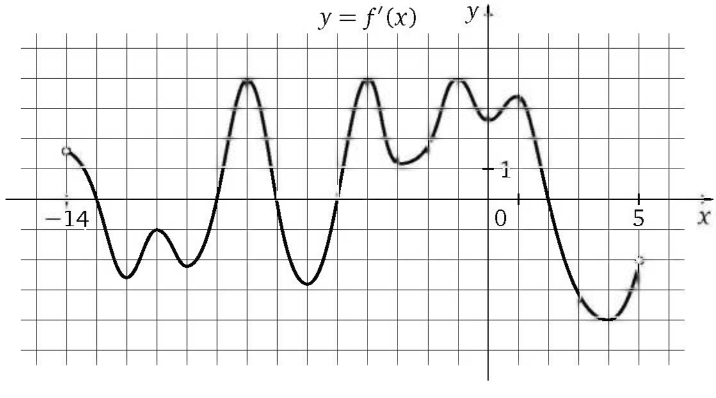
1. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 17)$.



В какой точке отрезка $[-1; 9]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего на этом отрезке значения?

1

2. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-14; 5)$.



В какой точке отрезка $[-4; 1]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наименьшего на этом отрезке значения?

2

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

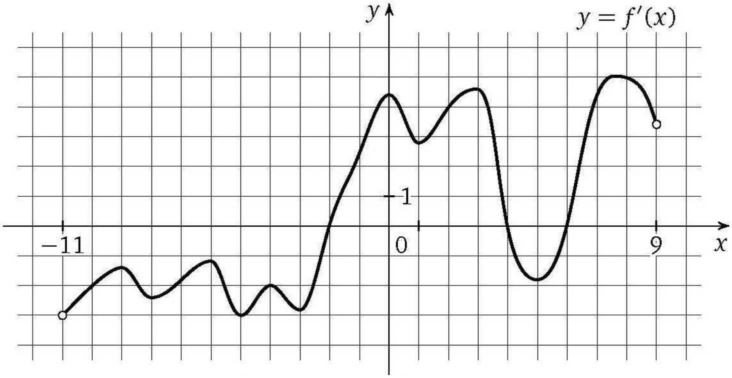
3

4

Образец написания:

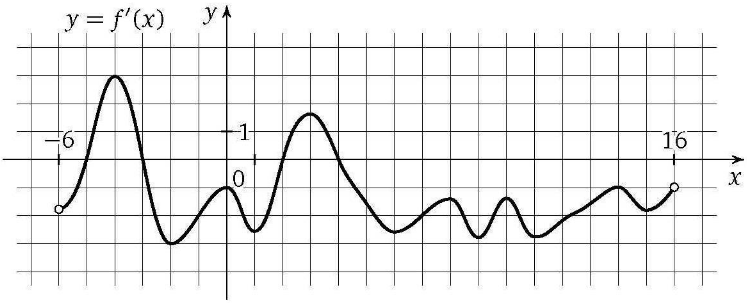
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

3. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-11; 9)$.



В какой точке отрезка $[-10; -3]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего на этом отрезке значения?

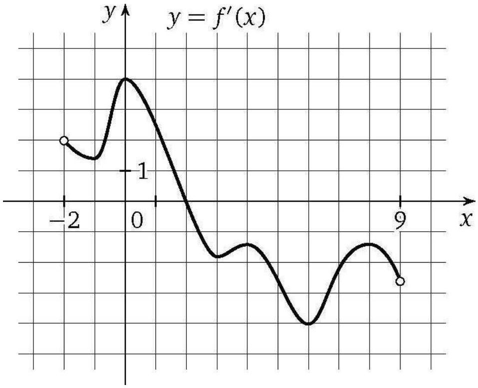
4. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 16)$.



В какой точке отрезка $[5; 15]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наименьшего на этом отрезке значения?

Ответы:

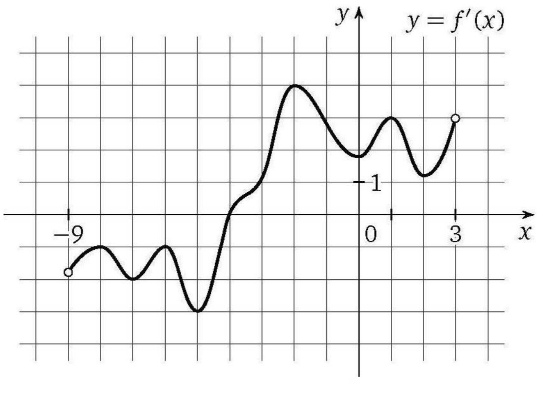
5. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 9)$.



В какой точке отрезка $[-1; 8]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего на этом отрезке значения?

5

6. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 3)$.



В какой точке отрезка $[-8; 2]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наименьшего на этом отрезке значения?

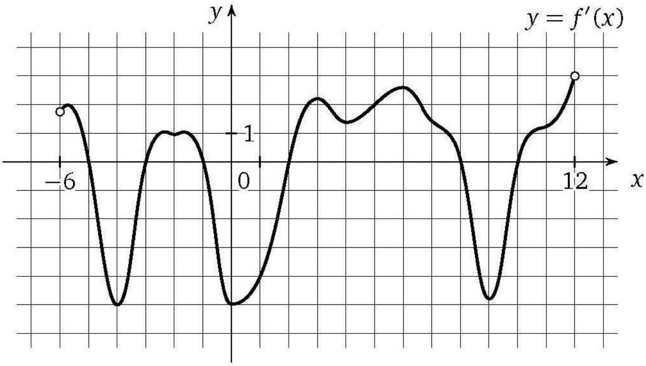
6

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

7

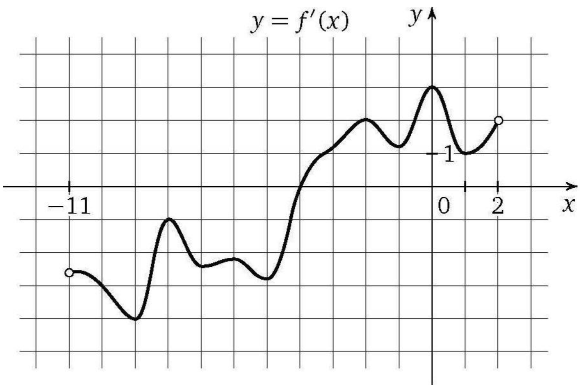
7. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 12)$.



В какой точке отрезка $[2; 8]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего на этом отрезке значения?

8

8. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-11; 2)$.



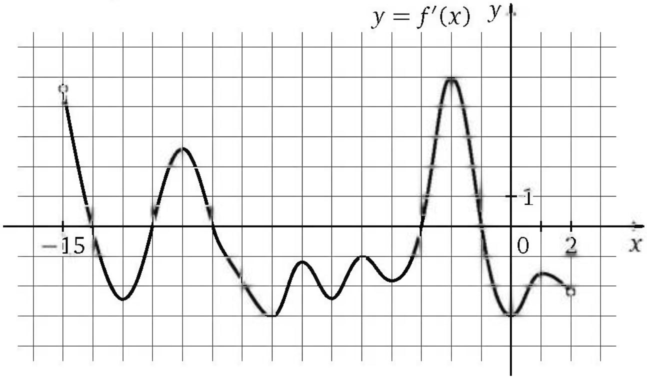
В какой точке отрезка $[-10; -4]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наименьшего на этом отрезке значения?

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

9. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-15; 2)$.



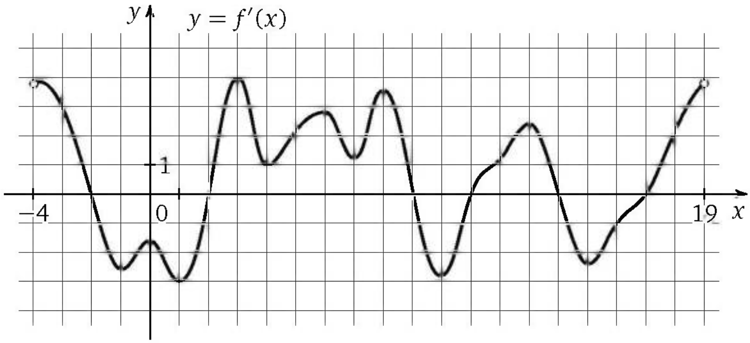
Определите, значение какой из четырёх следующих разностей будет наименьшим:

1) $f(-7) - f(-6)$;
2) $f(-8) - f(-5)$;
3) $f(-9) - f(-4)$;
4) $f(-10) - f(-3)$.

В ответе укажите номер этой разности.

9

10. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 19)$.



Определите, значение какой из четырёх следующих разностей будет наибольшим:

1) $f(8) - f(3)$;
2) $f(9) - f(2)$;
3) $f(7) - f(4)$;
4) $f(6) - f(5)$.

В ответе укажите номер этой разности.

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

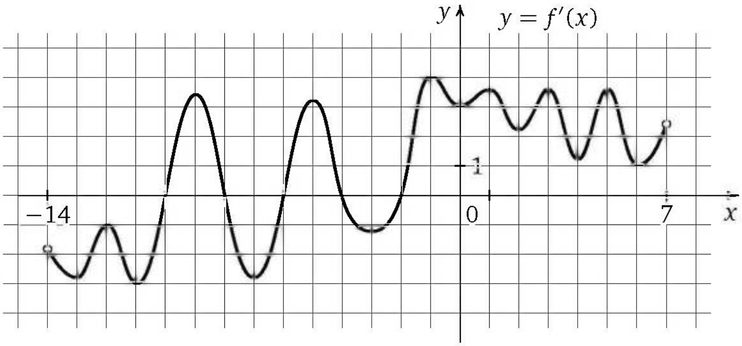
2

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

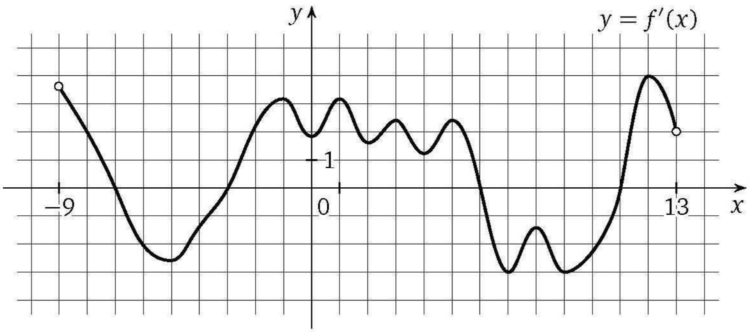
Вариант 2

1. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-14; 7)$.



В какой точке отрезка $[-1; 6]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего на этом отрезке значения?

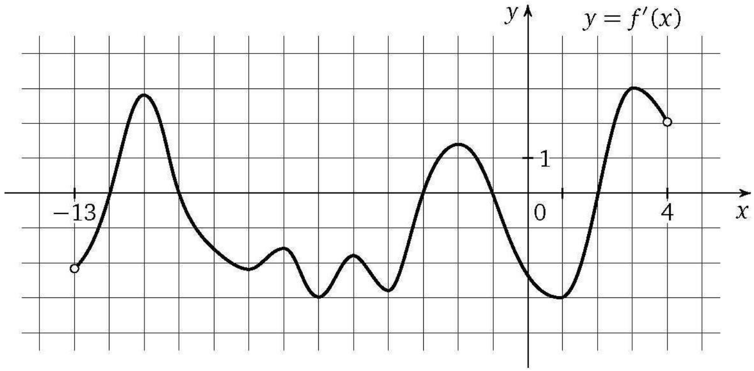
2. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 13)$.



В какой точке отрезка $[-2; 5]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наименьшего на этом отрезке значения?

Ответы:

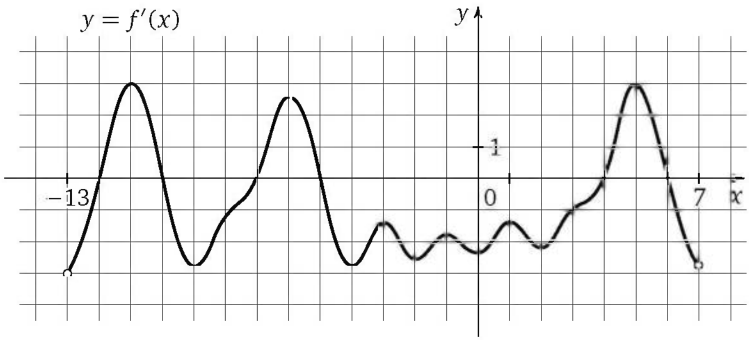
3. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-13; 4)$.



В какой точке отрезка $[-9; -4]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего на этом отрезке значения?

3

4. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-13; 7)$.



В какой точке отрезка $[-4; 3]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наименьшего на этом отрезке значения?

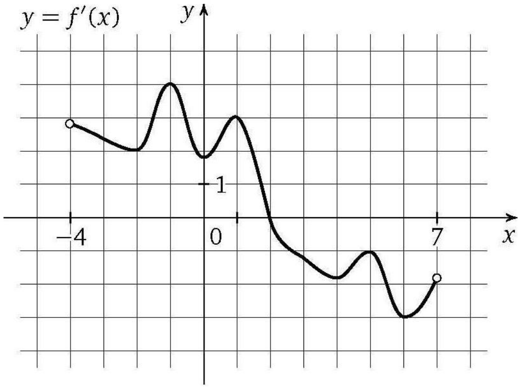
4

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

5

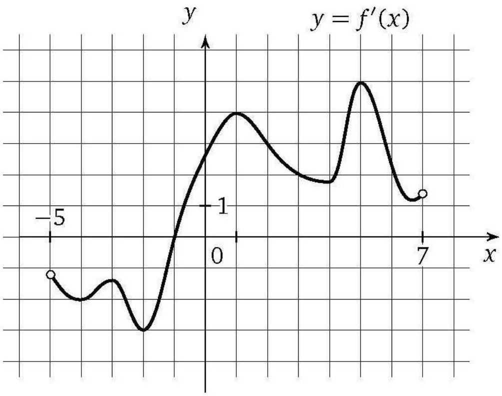
5. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 7)$.



В какой точке отрезка $[-3; 6]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего на этом отрезке значения?

6

6. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 7)$.



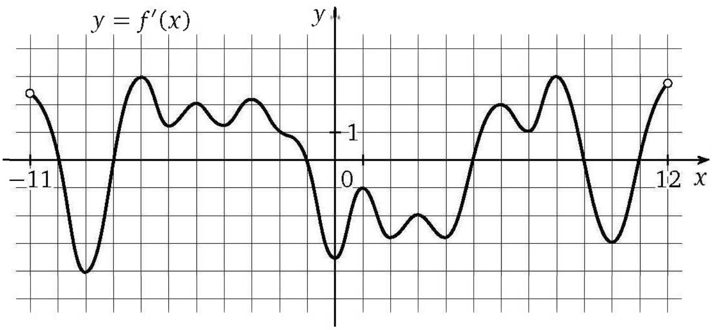
В какой точке отрезка $[-4; 6]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наименьшего на этом отрезке значения?

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

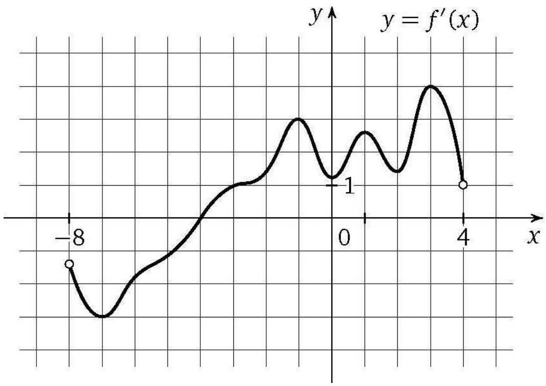
7. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-11; 12)$.



В какой точке отрезка $[-1; 5]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего на этом отрезке значения?

7

8. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 4)$.



В какой точке отрезка $[-4; 3]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наименьшего на этом отрезке значения?

8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

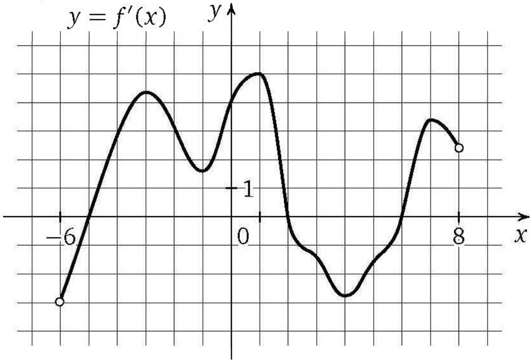
9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

9. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 8)$.

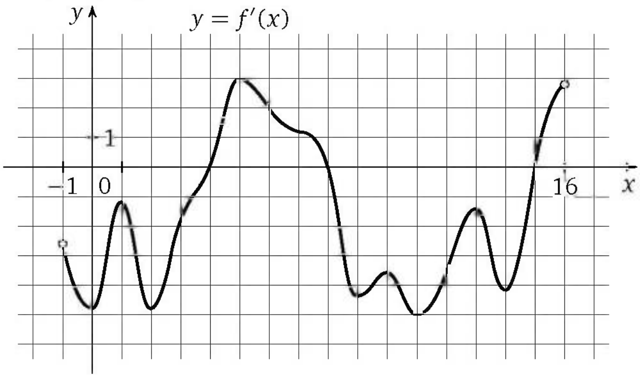


Определите, значение какой из четырёх следующих разностей будет наименьшим:

1) $f(-5) - f(2)$;
3) $f(-3) - f(0)$;
2) $f(-4) - f(1)$;
4) $f(-2) - f(1)$.

В ответе укажите номер этой разности.

10. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-1; 16)$.



Определите, значение какой из четырёх следующих разностей будет наибольшим:

1) $f(15) - f(8)$;
3) $f(12) - f(11)$;
2) $f(13) - f(10)$;
4) $f(14) - f(9)$.

В ответе укажите номер этой разности.

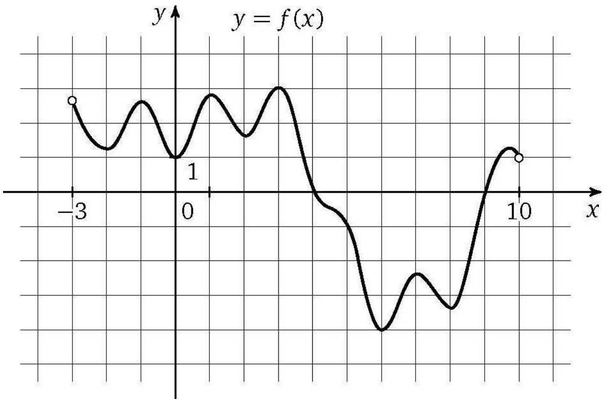
Диагностическая работа 4

Вариант 1

Ответы:

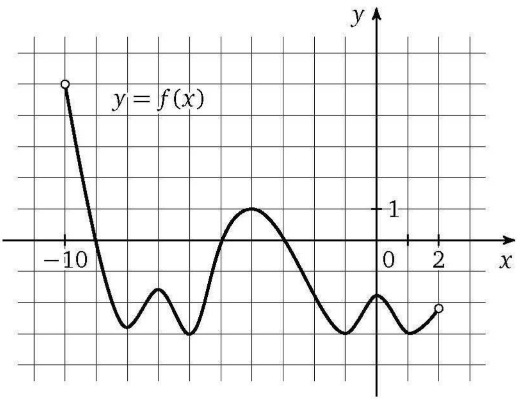
1. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой и дифференцируемой на интервале $(-3; 10)$. Найдите число точек графика, в каждой из которых касательная к нему параллельна прямой $y = 2021$ или совпадает с ней.

1



2. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой и дифференцируемой на интервале $(-10; 2)$. Найдите наименьшую из длин промежутков, в каждой точке каждого из которых производная этой функции неотрицательна.

2

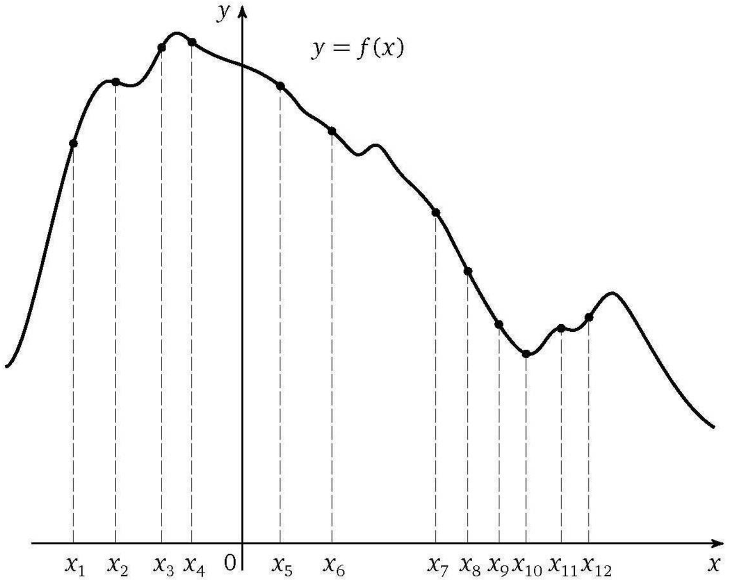


Образец написания:

Ответы:

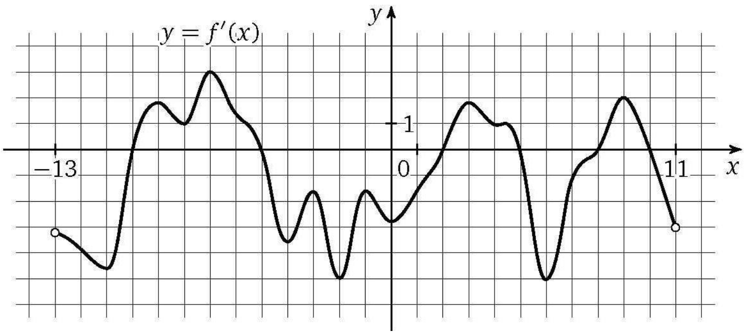
3

3. На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{10}, x_{11}, x_{12}. В скольких из этих точек производная функции $y = f(x)$ отрицательна?



4

4. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-13; 11)$. Найдите промежутки убывания функции $y = f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

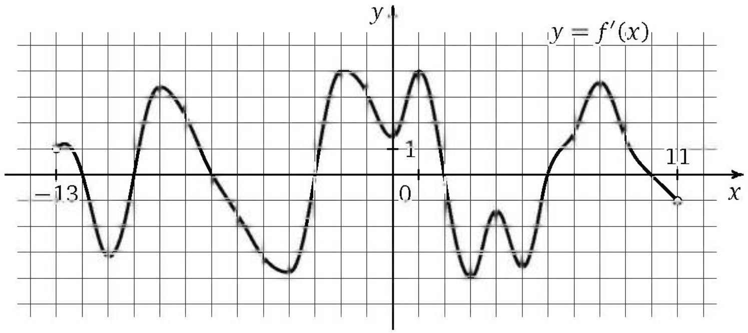


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

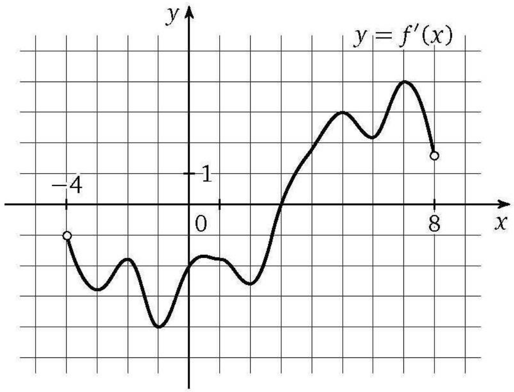
5. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-13; 11)$.



Найдите точки максимума функции $y = f(x)$. В ответе укажите их сумму.

5

6. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 8)$. В какой точке отрезка $[3; 7]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наименьшего на этом отрезке значения?



6

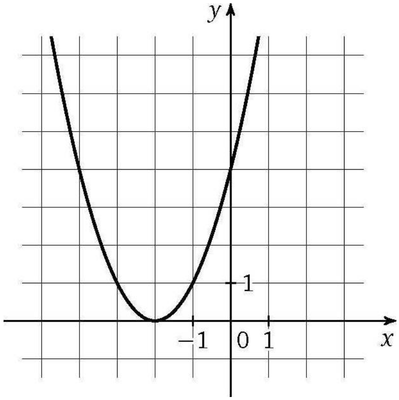
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

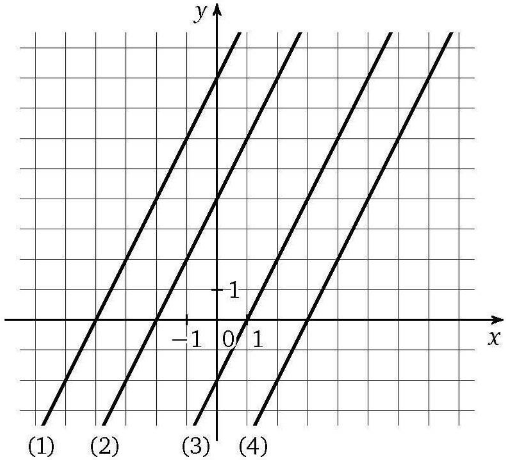
Ответы:

7

7. Функция задана графиком:



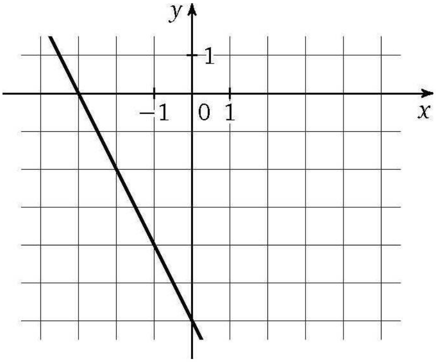
Один из графиков, изображённых на рисунке ниже, является графиком её производной:



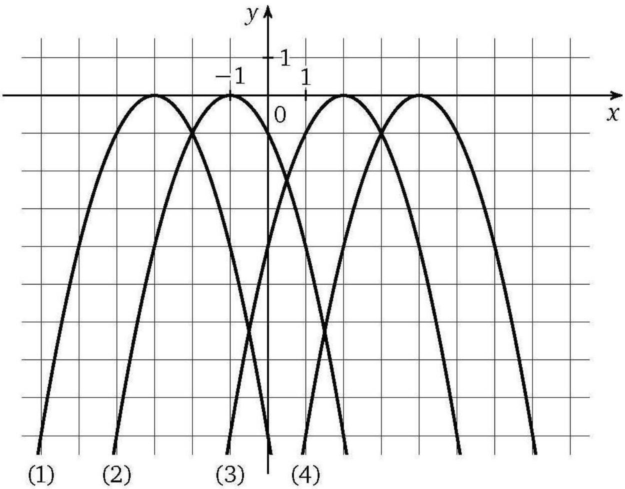
Какой это график? В ответе укажите его номер.

Образец написания:

8. Производная функции задана графиком:



Один из графиков, изображённых на рисунке ниже, является графиком этой функции:



Какой это график? В ответе укажите его номер.

Ответы:

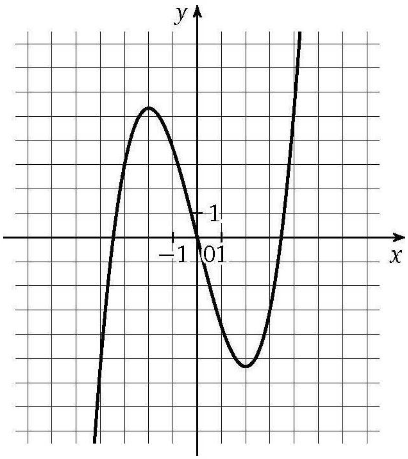
8

Образец написания:

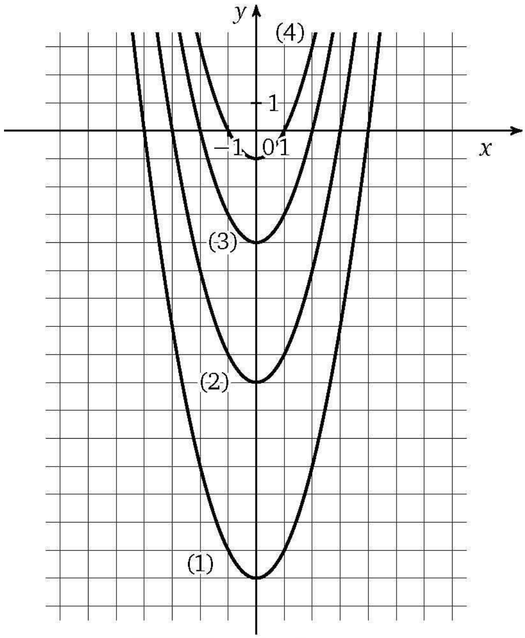
Ответы:

9

9. Функция задана графиком:



Один из графиков, изображённых на рисунке, является графиком её производной:

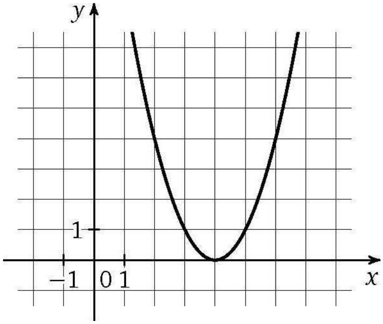


Какой это график? В ответе укажите его номер.

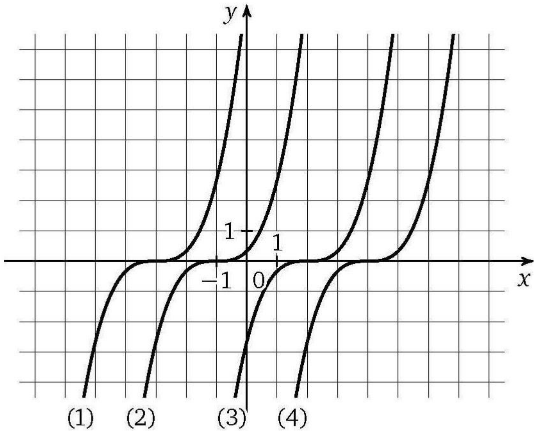
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 − ,

10. Производная функции задана графиком:



Один из графиков, изображённых на рисунке ниже, является графиком этой функции:



Какой это график? В ответе укажите его номер.

Ответы:

10

Образец написания:

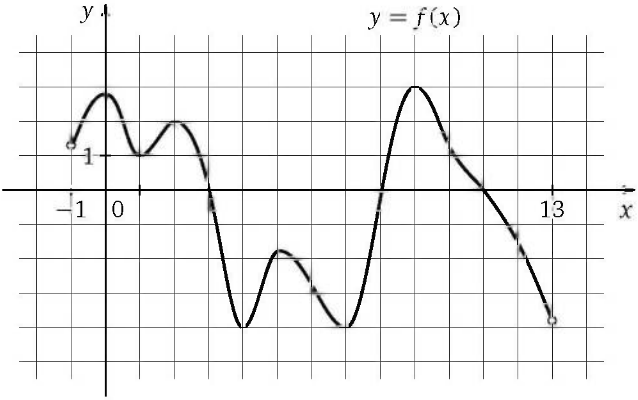
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Вариант 2

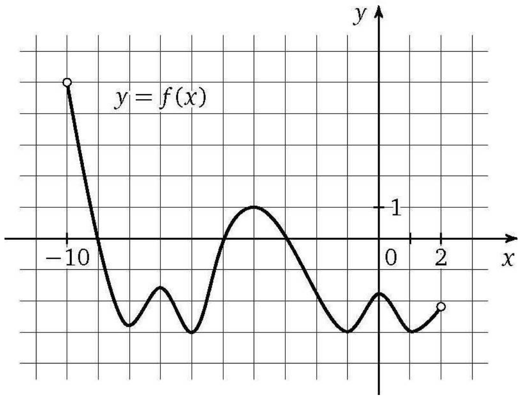
1

1. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой и дифференцируемой на интервале $(-1; 13)$. Найдите число точек графика, в каждой из которых касательная к нему параллельна прямой $y = 2022$ или совпадает с ней.



2

2. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой и дифференцируемой на интервале $(-10; 2)$. Найдите наименьшую из длин промежутков, в каждой точке каждого из которых производная этой функции неположительна.



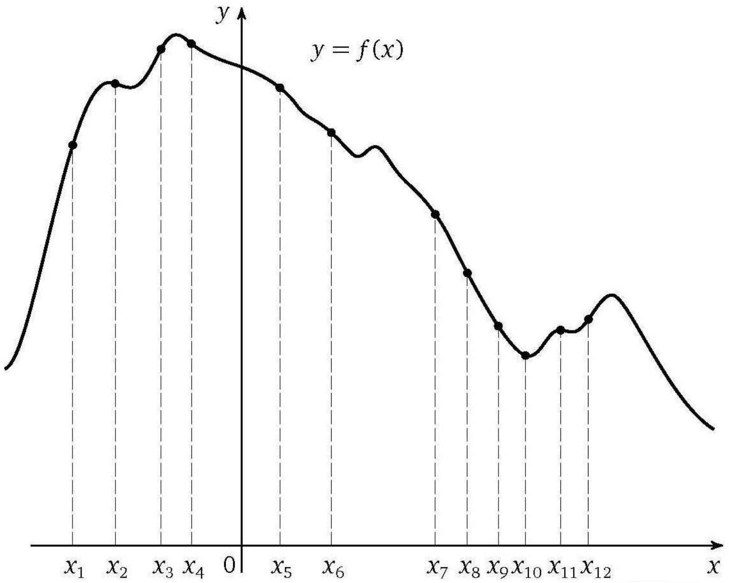
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

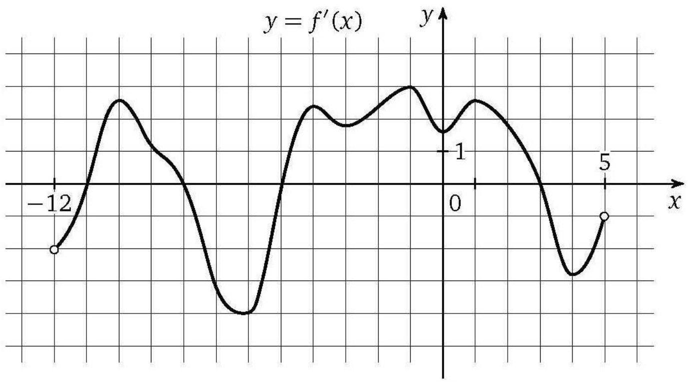
3. На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}. В скольких из этих точек производная функции $y = f(x)$ положительна?

3

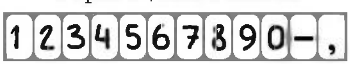


4. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-12; 5)$. Найдите промежутки возрастания функции $y = f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

4



Образец написания:



Ответы:

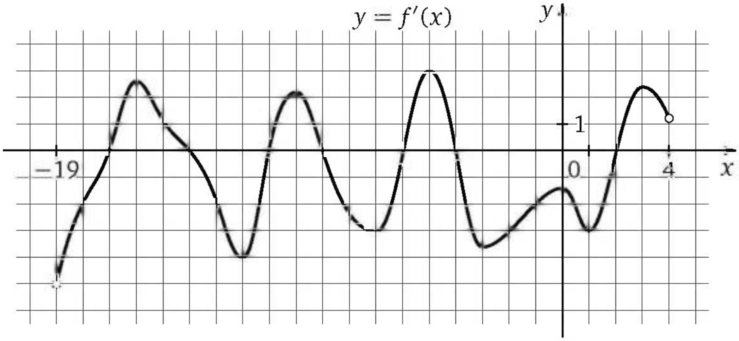
5

6

Образец написания:

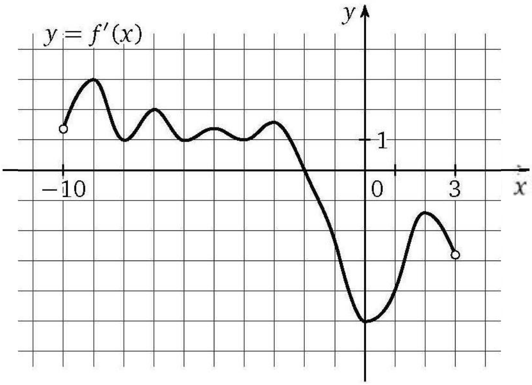
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

5. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-19; 4)$.

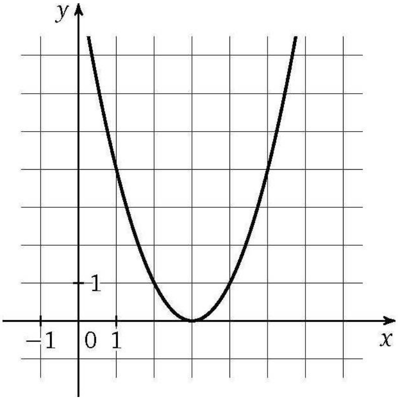


Найдите точки минимума функции $y = f(x)$. В ответе укажите их сумму.

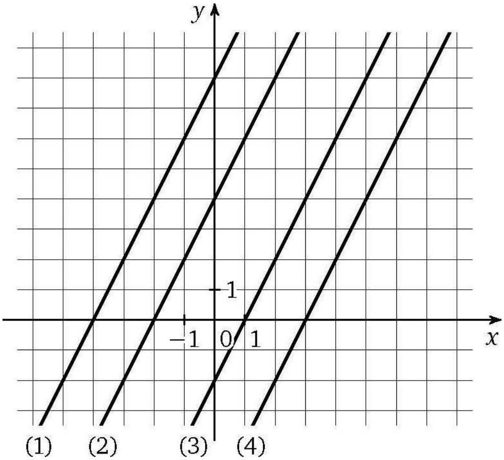
6. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-10; 3)$. В какой точке отрезка $[-9; 2]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего на этом отрезке значения?



7. Функция задана графиком:



Один из графиков, изображённых на рисунке, является графиком её производной:



Какой это график? В ответе укажите его номер.

Ответы:

7

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

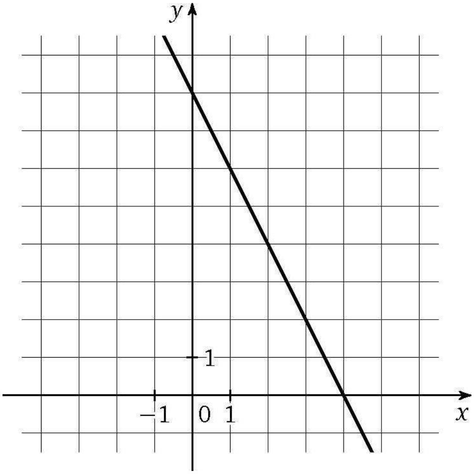
Ответы:

8

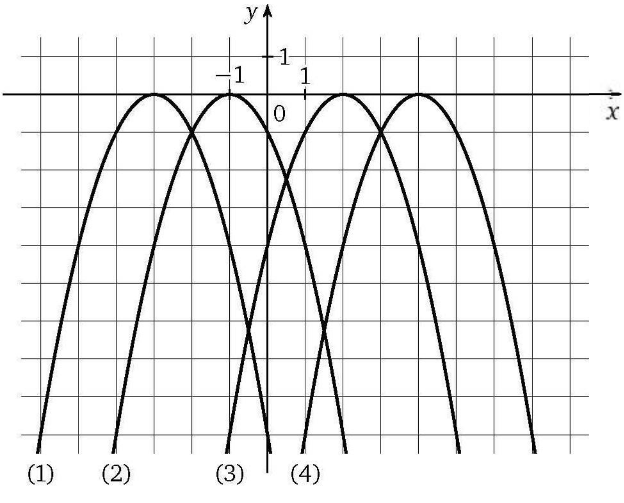
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

8. Производная функции задана графиком:



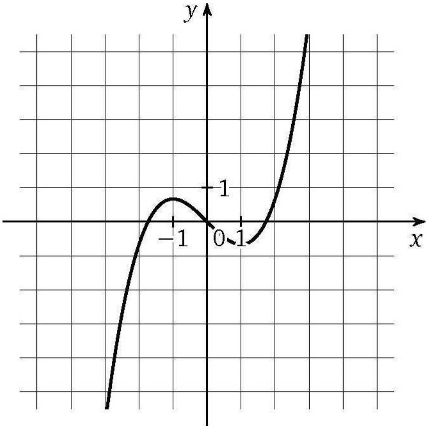
Один из графиков, изображённых на рисунке ниже, является графиком этой функции:



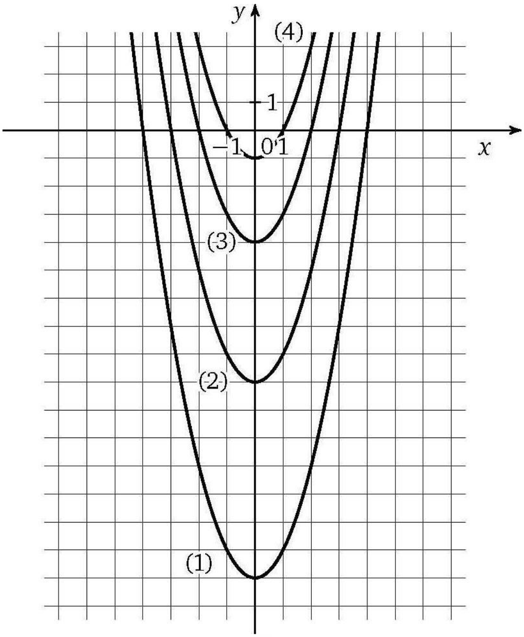
Какой это график? В ответе укажите его номер.

Ответы:

9. Функция задана графиком:



Один из графиков, изображённых на рисунке, является графиком её производной:



Какой это график? В ответе укажите его номер.

9

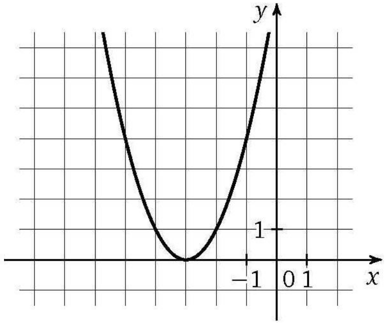
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

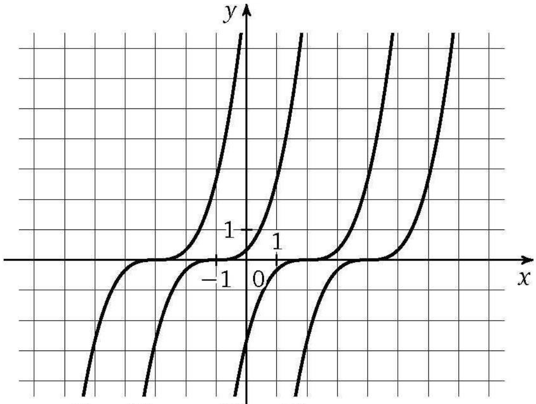
Ответы:

10

10. Производная функции задана графиком:



Один из графиков, изображённых на рисунке ниже, является графиком этой функции:



Какой это график? В ответе укажите его номер.

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы

Часть 1. Понятие производной. Геометрический и физический смысл производной

Диагностическая работа 1

Вариант 1. **1.** 0,625. **2.** −0,25. **3.** 3412. **4.** 1243. **5.** 1,98. **6.** 1342. **7.** 0,625. **8.** 1. **9.** −0,6. **10.** 2134.

Вариант 2. **1.** 0,375. **2.** −1,75. **3.** 2341. **4.** 1324. **5.** 1,44. **6.** 4231. **7.** 1,25. **8.** 2. **9.** 0. **10.** 4312.

Тренировочная работа 1

Вариант 1. **1.** 0,6. **2.** −4. **3.** −1,5. **4.** 1,75. **5.** −0,8. **6.** −0,375. **7.** 4321. **8.** 1234. **9.** 4321. **10.** 4132.

Вариант 2. **1.** 2,5. **2.** −3. **3.** −2,5. **4.** 0,75. **5.** −1,4. **6.** −0,625. **7.** 4321. **8.** 2143. **9.** 1234. **10.** 4321.

Тренировочная работа 2

Вариант 1. **1.** 0,3. **2.** 0,4. **3.** 0,875. **4.** 1,44. **5.** 1,8. **6.** 6,3. **7.** 1423. **8.** 4132. **9.** 1243. **10.** 3421.

Вариант 2. **1.** 3. **2.** 1,6. **3.** 0,375. **4.** 2,88. **5.** 7,2. **6.** 2,16. **7.** 1432. **8.** 1324. **9.** 1243. **10.** 2134.

Тренировочная работа 3

Вариант 1. **1.** 1. **2.** 0,6. **3.** 4. **4.** 6,3. **5.** 2,16. **6.** 0,25. **7.** 0,5. **8.** 2. **9.** 4. **10.** 3.

Вариант 2. **1.** 2. **2.** 0,2. **3.** 2. **4.** 4,2. **5.** 2,7. **6.** 0,8. **7.** 1. **8.** 0,625. **9.** 3. **10.** 2.

Тренировочная работа 4

Вариант 1. **1.** 0,75. **2.** 1,5. **3.** −2. **4.** −0,5. **5.** −1,75. **6.** 4. **7.** 3. **8.** −1. **9.** 1243. **10.** 3.

Вариант 2. **1.** 2. **2.** 0,5. **3.** −0,25. **4.** −1,25. **5.** −1,5. **6.** 5. **7.** 4. **8.** 4. **9.** 1432. **10.** 6.

Диагностическая работа 2

Вариант 1. **1.** 50. **2.** 1,2. **3.** 4. **4.** 0,625. **5.** 0,4. **6.** −3. **7.** 9. **8.** 3. **9.** −4. **10.** 1324.

Вариант 2. **1.** 60. **2.** 1,25. **3.** 3. **4.** −0,125. **5.** 1,5. **6.** 5. **7.** 8. **8.** 5. **9.** −2. **10.** 4312.

Часть 2. Применение производной

Диагностическая работа 3

Вариант 1. **1.** 4. **2.** 4. **3.** −1. **4.** 3. **5.** 6. **6.** −3. **7.** 5. **8.** 7. **9.** −4. **10.** −1.

Вариант 2. **1.** 3. **2.** 1. **3.** 1. **4.** 8. **5.** 1. **6.** 3. **7.** 5. **8.** −9. **9.** −1. **10.** 9.

Тренировочная работа 5

Вариант 1. **1.** 3. **2.** 10. **3.** 7. **4.** 6. **5.** 2. **6.** 4. **7.** 7. **8.** 3. **9.** 3. **10.** 3.

Вариант 2. **1.** 5. **2.** 7. **3.** 9. **4.** 7. **5.** 3. **6.** 3. **7.** 3. **8.** 4. **9.** 4. **10.** 1.

Ответы

Тренировочная работа 6

Вариант 1. **1.** 3. **2.** 5. **3.** 6. **4.** 5. **5.** 3. **6.** 7. **7.** −2. **8.** 4. **9.** 2. **10.** 4.

Вариант 2. **1.** 6. **2.** 5. **3.** 8. **4.** 6. **5.** 9. **6.** 6. **7.** −1. **8.** −2. **9.** 3. **10.** 1.

Тренировочная работа 7

Вариант 1. **1.** −7. **2.** −1. **3.** −4. **4.** 3. **5.** −16. **6.** −12. **7.** 5. **8.** 8. **9.** 5. **10.** 3.

Вариант 2. **1.** 4. **2.** −2. **3.** 3. **4.** 2. **5.** −8. **6.** −2. **7.** −11. **8.** 15. **9.** −17. **10.** 4.

Тренировочная работа 8

Вариант 1. **1.** 9. **2.** −4. **3.** −10. **4.** 15. **5.** 2. **6.** −4. **7.** 8. **8.** −4. **9.** 4. **10.** 2.

Вариант 2. **1.** 6. **2.** −2. **3.** −9. **4.** 3. **5.** 2. **6.** −1. **7.** −1. **8.** −4. **9.** 1. **10.** 3.

Диагностическая работа 4

Вариант 1. **1.** 10. **2.** 1. **3.** 7. **4.** 7. **5.** −7. **6.** 3. **7.** 2. **8.** 1. **9.** 3. **10.** 4.

Вариант 2. **1.** 7. **2.** 1. **3.** 5. **4.** 8. **5.** −32. **6.** −2. **7.** 4. **8.** 4. **9.** 4. **10.** 1.

Оглавление

Учебно-методическое пособие

Сергей Алексеевич Шестаков
Иван Валериевич Ященко

ЕГЭ 2020. Математика. Функции, заданные графиками, и их производные.
Задача 7 (профильный уровень). Задача 14 (базовый уровень). Рабочая тетрадь

Под редакцией И. В. Ященко

Подписано к печати 17.07.2019 г. Формат 60 × 90/16. Печать офсетная.
Объем 10 печ. л. Тираж 3000 экз. Заказ №

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89. E-mail: mittelpress@mail.ru