

# ЕГЭ

Под редакцией  
И. В. Яценко

# 2020

**14**

Профильный

Р. К. Гордин

**ГЕОМЕТРИЯ.  
СТЕРЕОМЕТРИЯ**

**ФГОС**

# МАТЕМАТИКА

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

---

Р. К. Гордин

ЕГЭ 2020. Математика  
Геометрия. Стереометрия  
Задача 14 (профильный уровень)

Под редакцией И. В. Яценко

Издание соответствует Федеральному государственному  
образовательному стандарту (ФГОС)

Москва  
Издательство МЦНМО  
2020

УДК 373:51  
ББК 22.1я72  
Г68

**Гордин Р. К.**

Г68 ЕГЭ 2020. Математика. Геометрия. Стереометрия. Задача 14 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2020. — 144 с.

ISBN 978-5-4439-1414-5

Пособия по математике серии «ЕГЭ 2020. Математика» ориентированы на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче Единого государственного экзамена по математике. В данном учебном пособии представлен материал для подготовки к решению задачи 14 профильного уровня.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровеньный подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль знаний по стереометрии.

Пособие предназначено для учителей математики, учащихся старшей школы и их родителей.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72



ISBN 978-5-4439-1414-5

© Гордин Р. К., 2020.  
© МЦНМО, 2020.

## Предисловие

Это учебное пособие предназначено для подготовки к решению задачи 14 ЕГЭ по математике на профильном уровне.

Предполагается, что школьник освоил школьный курс стереометрии с оценкой не ниже 4. Перед работой с этим задачником необходимо повторить основные определения и теоремы из школьного учебника. Это также полезно и в процессе работы с пособием.

Пособие начинается с основных сведений о многогранниках. В первом параграфе собраны задачи, связанные с изображением пространственных фигур на плоскости и построением сечений многогранников. Следующие восемь параграфов содержат методы решения задач на доказательство и вычисление по стандартным темам ЕГЭ: угол между прямыми, угол между плоскостями, расстояния от точки до прямой и до плоскости, угол между прямой и плоскостью, расстояние между прямыми, площадь сечения, объёмы, фигуры вращения.

Каждый параграф начинается с повторения теории и нескольких примеров решения задач. Затем идут подготовительные задачи для самостоятельного решения. Как правило, эти задачи взяты из пособия В. А. Смирнова «Задача С2», издававшегося в предыдущие годы. Далее расположены задачи на доказательство (или на построение) и вычисление.

В § 10 рассматриваются задачи на вычисление элементов правильных пирамид и задачи повышенной трудности (задачи со звёздочкой).

В приложении рассматриваются примеры решения стереометрических задач методом координат.

Пособие завершают шесть диагностических работ, каждая из которых содержит по шесть задач, расположенных по возрастанию сложности. Если школьник решает четыре задачи за два часа, это можно считать вполне хорошим результатом.

## Краткий список основных сведений о многогранниках

*Диагональю* многогранника называется отрезок, соединяющий две вершины, не лежащие в одной грани.

*n*-*угольной призмой* называется многогранник, две грани которого — равные *n*-угольники, лежащие в параллельных плоскостях (основания), а остальные *n* граней (боковые грани) — параллелограммы.

Призма называется *прямой*, если её боковые рёбра перпендикулярны плоскости основания. В противном случае призма называется *наклонной*. Во всех задачах, связанных с призмой, будем считать, что  $AA_1, BB_1, \dots$  — боковые рёбра призмы  $AB\dots A_1B_1\dots$ .

Прямая призма называется *правильной*, если её основание — правильный *n*-угольник.

*Параллелепипедом* называется призма, основание которой — параллелограмм.

Противоположные грани параллелепипеда попарно равны и параллельны. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Параллелепипед называется *прямым*, если его боковые рёбра перпендикулярны плоскости основания.

Параллелепипед называется *прямоугольным*, если все его грани — прямоугольники. Длины трёх рёбер, исходящих из одной вершины, называются измерениями прямоугольного параллелепипеда.

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

*Куб* — это прямоугольный параллелепипед с равными измерениями.

*n*-*угольной пирамидой* с вершиной *S* называется многогранник  $SA_1\dots A_n$ , грань  $A_1A_2\dots A_n$  которого — *n*-угольник (основание пирамиды), а остальные *n* граней — треугольники  $A_1SA_2, A_2SA_3, \dots, A_nSA_1$  с общей вершиной *S*, лежащей вне плоскости основания (боковые грани).

Пирамида называется *правильной*, если её основание — правильный *n*-угольник, а высота пирамиды проходит через центр основания.

Боковые рёбра правильной пирамиды равны, боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Двугранные углы при основании равны, двугранные углы при боковых рёбрах равны.

Треугольную пирамиду называют также *тетраэдром* (четырёхгранником), а правильную треугольную пирамиду, все шесть рёбер которой равны, — *правильным тетраэдром*.

## §1. Построения на проекционном чертеже (параллельная проекция)

Изображение пространственной фигуры на плоскости — это параллельная проекция этой фигуры на плоскость.

В дальнейшем используются свойства параллельных проекций, а также следующие факты.

1. Если две различные точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая лежит в этой плоскости (аксиома стереометрии).

2. Если две различные плоскости имеют общую точку, то их пересечение — прямая, проходящая через эту точку (аксиома стереометрии).

3. Если плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $a$ , параллельную плоскости  $\beta$ , и пересекает эту плоскость, то прямая пересечения параллельна прямой  $a$ .

4. Если пересекающиеся плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  проходят через параллельные прямые  $a$  и  $b$  соответственно, то прямая пересечения этих плоскостей параллельна прямым  $a$  и  $b$ .

5. Прямые пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны.

6. Наклонная пересекает плоскость в точке, лежащей на любой параллельной проекции наклонной на эту плоскость.

### Подготовительные задачи

Построение прямой пересечения двух плоскостей

1. Дана четырёхугольная призма  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Постройте прямую пересечения плоскостей  $AA_1 C_1$  и  $BB_1 D_1$  (т. е. на изображении призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  построьте изображение прямой пересечения плоскостей  $AA_1 C_1$  и  $BB_1 D_1$ ).

2. Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Постройте прямую пересечения плоскостей  $BB_1 D_1$  и  $ABC_1$ .

3. Дана треугольная призма  $ABCA_1 B_1 C_1$ ,  $M$  — точка пересечения медиан основания  $ABC$ . Постройте прямую пересечения плоскостей  $ABC$  и  $A_1 MC_1$ .

4. Четырёхугольник  $ABCD$  — основание пирамиды  $SABCD$ . Постройте прямую пересечения плоскостей  $ASB$  и  $CSD$ , если: а) прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются; б) прямые  $AB$  и  $CD$  параллельны.

5. Основание пирамиды  $SABCD$  — трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . Точка  $M$  лежит на ребре  $SB$ . Постройте прямую пересечения плоскостей  $ADM$  и  $SBC$ .

6. Дана треугольная пирамида  $ABCD$ ,  $M$  — точка пересечения медиан грани  $ABC$ . Постройте прямую пересечения плоскости  $ADC$  с плоскостью, проходящей через точку  $M$  параллельно прямым  $AC$  и  $BD$ .

7. Дана треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ ,  $M$  — точка, лежащая на ребре  $CC_1$ . Постройте прямую пересечения плоскостей  $ABC$  и  $BMA_1$ .

8. Дан параллелепипед  $ABCA_1B_1C_1D_1$ . Точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  лежат на рёбрах  $AD$ ,  $CD$  и  $BB_1$  соответственно. Постройте прямую пересечения плоскостей  $KLM$  и  $BB_1D_1D$ .

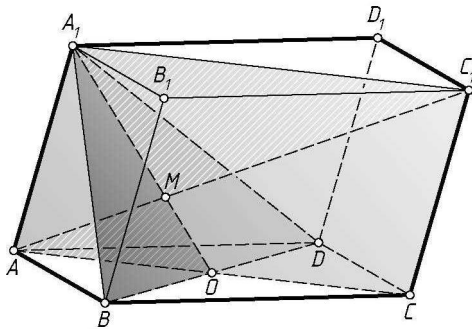
9. Основание пирамиды  $SABCDEF$  — шестиугольник  $ABCDEF$ , противоположные стороны которого попарно равны и параллельны. Постройте прямую пересечения плоскостей  $ASD$  и  $CSF$ .

10. Дана шестиугольная призма  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ , основания которой — правильные шестиугольники. Точка  $O$  — центр основания  $ABCDEF$ ,  $M$  — середина бокового ребра  $DD_1$ . Постройте прямую пересечения плоскости  $A_1B_1C_1$  с плоскостью, проходящей через точки  $O$  и  $M$  параллельно прямой  $AE$ .

Построение точки пересечения прямой с плоскостью

**Пример 1.** Докажите, что в параллелепипеде  $ABCA_1B_1C_1D_1$  диагональ  $AC_1$  проходит через точку пересечения медиан треугольника  $BA_1D$  и делится ею в отношении  $1:2$ , считая от точки  $A$ .

**Решение.** Пусть  $O$  — центр параллелограмма  $ABCD$ . Тогда  $A_1O$  — медиана треугольника  $BA_1D$ . Поскольку  $A_1$  и  $O$  — общие точки плоскостей  $BA_1D$  и  $AA_1C_1C$ , эти плоскости пересекаются по прямой  $A_1O$ . Прямые  $AC_1$  и  $A_1O$ , лежащие в плоскости  $AA_1C_1C$ , пересекаются



в некоторой точке  $M$ . Тогда  $M$  — точка пересечения прямой  $AC_1$  с плоскостью  $BA_1D$ .

Из подобия треугольников  $AMO$  и  $C_1MA_1$  следует, что

$$\frac{AM}{MC_1} = \frac{OM}{MA_1} = \frac{OA}{A_1C_1} = \frac{OA}{AC} = \frac{1}{2}.$$

Точка  $M$  лежит на медиане  $A_1O$  треугольника  $BA_1D$  и делит эту медиану в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины. Следовательно,  $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $BA_1D$ .  $\triangleleft$

1. Дана треугольная пирамида  $ABCD$ . Точка  $M$  лежит на ребре  $BC$ , причём  $BM : MC = 1 : 2$ . Постройте точку пересечения прямой, проходящей через точку  $M$  и середину ребра  $CD$ , с плоскостью  $ABD$ .

2. Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точка  $M$  лежит на ребре  $AA_1$ . Постройте точку пересечения прямой  $DM$  с плоскостью  $A_1 B_1 C_1$ .

3. Дана треугольная призма  $ABCA_1 B_1 C_1$ ,  $M$  — точка пересечения медиан грани  $ABC$ , точка  $N$  лежит на боковом ребре  $CC_1$ . Постройте точку пересечения прямой  $MN$  с плоскостью  $A_1 B_1 C_1$ .

4. Дана четырёхугольная пирамида  $SABCD$ , основание которой — параллелограмм  $ABCD$ . Точка  $M$  лежит на боковом ребре  $SC$ . Постройте точку пересечения прямой  $BM$  с плоскостью  $ASD$ .

5. Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точка  $M$  лежит на ребре  $AA_1$ . Постройте точку пересечения прямой  $CM$  с плоскостью  $A_1 B_1 C_1$ .

6. Дана треугольная пирамида  $ABCD$ ,  $M$  — точка пересечения медиан грани  $ABC$ . Постройте точку пересечения прямой, проходящей через точку  $B$  и середину отрезка  $DM$ , с плоскостью  $ACD$ .

7. Дана треугольная пирамида  $ABCD$ . Точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  лежат на рёбрах  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  соответственно. Постройте точку пересечения прямой  $KM$  с плоскостью  $ALD$ .

8. Дана четырёхугольная пирамида  $SABCD$  с вершиной  $S$ . Точка  $M$  лежит на боковом ребре  $SD$ . Постройте точку пересечения прямой  $BM$  с плоскостью  $ASC$ .

9. Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точка  $M$  лежит на ребре  $DD_1$ . Постройте точку пересечения прямой  $DB_1$  с плоскостью  $AMC$ .

10. Основание пирамиды  $SABCDEF$  — шестиугольник  $ABCDEF$ , противоположные стороны  $BC$  и  $EF$  которого параллельны. Точка  $M$  лежит на ребре  $SC$ . Постройте точку пересечения прямой  $BM$  с плоскостью  $ESF$ .



## Построение сечений многогранников

1. Постройте сечение треугольной пирамиды  $DABC$  плоскостью, проходящей через следующие точки:

- а)  $B$ ,  $D$  и середину  $M$  ребра  $AC$ ;
- б)  $B$  и середины рёбер  $AD$  и  $CD$ ;
- в) середину  $K$  ребра  $AD$  и точки  $L$  и  $M$ , лежащие на продолжениях рёбер  $AB$  и  $AC$  за точки  $B$  и  $C$ ;
- г) середины рёбер  $BC$ ,  $AD$  и точку  $L$ , лежащую на продолжении ребра  $AC$  за точку  $C$ ;
- д) середины  $K$ ,  $L$  и  $M$  рёбер  $AD$ ,  $AB$  и  $BC$ ;
- е)  $A$ ,  $C$  и точку пересечения медиан грани  $ABD$ ;
- ж) середины рёбер  $AD$ ,  $CD$  и точку  $L$ , лежащую на ребре  $BC$ , если  $BL : LC = 1 : 2$ ;
- з)  $K$ ,  $L$  и  $M$ , лежащие на рёбрах  $AD$ ,  $AB$  и  $BC$  соответственно, если  $AK : KD = BL : LA = BM : MC = 1 : 2$ ;
- и) точки пересечения медиан граней  $ABD$ ,  $BCD$  и  $ABC$ ;
- к) середины рёбер  $BC$ ,  $CD$  и точку, лежащую на медиане  $DM$  грани  $ABD$ .

2. Постройте сечение параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через следующие точки:

- а) середины рёбер  $AB$ ,  $AD$  и  $AA_1$ ;
- б)  $B$ ,  $C$  и середину ребра  $A_1 B_1$ ;
- в)  $A$ ,  $C$  и середину ребра  $A_1 B_1$ ;
- г) середины рёбер  $AA_1$ ,  $AD$  и центр грани  $BB_1 C_1 C$ ;
- д) центры граней  $ABCD$ ,  $AA_1 B_1 B$  и  $BB_1 C_1 C$ ;
- е) середины рёбер  $AB$ ,  $BC$  и  $DD_1$ ;
- ж) середины рёбер  $A_1 B_1$ ,  $CC_1$  и вершину  $A$ ;
- з) середину ребра  $CC_1$  и точки  $K$ ,  $L$ , лежащие на рёбрах  $AB$  и  $A_1 B_1$ , если  $BK : KA = A_1 L : LB_1 = 1 : 2$ ;
- и) середину ребра  $A_1 B_1$ , вершину  $A$  и точку  $M$  на ребре  $B_1 C_1$ , если  $B_1 M : MC_1 = 1 : 3$ ;
- к) середины рёбер  $AD$ ,  $CD$  и  $A_1 B_1$ ;
- л) середины рёбер  $AB$ ,  $BC$  и  $CC_1$ ;
- м) вершину  $B_1$ , центр грани  $ABCD$  и середину ребра  $AA_1$ ;
- н) середины рёбер  $CD$ ,  $BC$  и точку  $M$ , лежащую на продолжении ребра  $AA_1$  за точку  $A_1$ , если  $MA_1 = \frac{1}{2} AA_1$ ;
- о)\* середины рёбер  $AD$ ,  $CC_1$  и  $A_1 B_1$ .

3. Постройте сечение треугольной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  плоскостью, проходящей через следующие точки:

- а) середину ребра  $AA_1$  и вершины  $B$  и  $C_1$ ;

- б) середины рёбер  $AA_1$ ,  $B_1C_1$  и вершину  $B$ ;
- в) центры граней  $AA_1B_1B$ ,  $BB_1C_1C$  и точку  $M$  ребра  $BC$ , если  $CM : MB = 1 : 2$ ;
- г) середины рёбер  $AB$ ,  $A_1C_1$  и  $CC_1$ ;
- д) середины рёбер  $AA_1$ ,  $A_1C_1$  и точку пересечения медиан основания  $ABC$ ;
- е) центр грани  $AA_1B_1B$ , середину ребра  $B_1C_1$  и точку  $M$  ребра  $A_1C_1$ , если  $A_1M : MC_1 = 1 : 2$ .
- ж) центр основания  $ABC$  и центры боковых граней  $AA_1B_1B$  и  $BB_1C_1C$ .

4. Основание пирамиды  $SABCD$  — параллелограмм  $ABCD$ . Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через следующие точки:

- а)  $A$ ,  $B$  и середина ребра  $SD$ ;
- б) середины рёбер  $AB$ ,  $BC$  и  $SC$ ;
- в) середины рёбер  $AB$ ,  $BC$  и  $SD$ ;
- г) середины рёбер  $AB$ ,  $AD$  параллельно ребру  $SC$ ;
- д) середины рёбер  $AD$ ,  $SC$  и точку  $B$ ;
- е) середины рёбер  $AB$ ,  $AD$  и  $SC$ ;
- ж) центр основания, середину ребра  $SD$  и точку  $M$  ребра  $SA$ , если  $AM : MS = 1 : 3$ ;
- з) середину ребра  $SA$  и точки  $M$  и  $N$  рёбер  $SB$  и  $SC$ , если  $BM : MS = SN : NC = 1 : 2$ .

5. Основание шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  — правильный шестиугольник  $ABCDEF$ . Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через следующие точки:

- а)  $A$ ,  $B$  и  $F_1$ ;
- б)  $A$ ,  $C$  и  $D_1$ ;
- в)  $B$ ,  $E$  и середину ребра  $FF_1$ ;
- г)  $B$ ,  $D$  и середину ребра  $AA_1$ ;
- д)  $B$ ,  $C$  и  $E_1$ ;
- е)  $B$ ,  $C$  и середину ребра  $DD_1$ ;
- ж)  $B$ ,  $D$  и середину ребра  $FF_1$ .

6. Основание шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$  — правильный шестиугольник  $ABCDEF$ . Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через следующие точки:

- а)  $C$ ,  $F$  и середину ребра  $SD$ ;
- б)  $A$ ,  $B$  и середину ребра  $SD$ ;
- в) центр основания параллельно плоскости  $ASB$ ;
- г)  $A$ ,  $C$  и середину ребра  $SD$ ;

- д)  $B$  и середины рёбер  $AS$  и  $CS$ ;
- е)  $B$ ,  $C$  и середину отрезка, соединяющего вершину пирамиды с центром основания.

### Задачи на построение на проекционном чертеже и вычисление отношений отрезков

**1.1.** Точка  $M$  лежит на ребре  $AB$  треугольной пирамиды  $ABCD$ , причём  $AM : MB = 1 : 2$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку  $M$  и середины рёбер  $BC$  и  $AD$ .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро  $CD$ ?

**1.2.** Точка  $M$  — середина ребра  $AD$  треугольной пирамиды  $ABCD$ . Точки  $K$  и  $L$  лежат на прямых  $AB$  и  $AC$  соответственно, причём  $B$  — середина отрезка  $AK$ , а  $C$  — середина отрезка  $AL$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки  $M$ ,  $K$  и  $L$ .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро  $BD$ ?

**1.3.** Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер соответственно  $AB$  и  $BC$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки  $M$ ,  $N$  и  $D_1$ .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро  $AA_1$ ?

**1.4.** Точка  $M$  — середина ребра  $CD$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки  $M$ ,  $A_1$  и  $C_1$ .

б) Пусть секущая плоскость пересекает прямую  $DD_1$  в точке  $P$ . Найдите отношение  $PD : PD_1$ .

**1.5.** Основание пирамиды  $SABCD$  — параллелограмм  $ABCD$  с центром  $O$ . Точка  $M$  лежит на отрезке  $SO$ , причём  $OM : MS = 1 : 2$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую  $AM$  параллельно прямой  $BD$ .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро  $SC$ ?

**1.6.** Основание пирамиды  $SABCD$  — параллелограмм  $ABCD$  с центром  $O$ . Точка  $M$  — середина отрезка  $AO$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку  $M$  параллельно прямым  $SA$  и  $BD$ .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро  $SC$ ?

**1.7.** Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер соответственно  $CC_1$  и  $AB$  треугольной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$ .

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки  $M$ ,  $N$  и  $A_1$ .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро  $BC$ ?

**1.8.** Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер соответственно  $AA_1$  и  $AB$  треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ .

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки  $M$ ,  $N$  и  $C_1$ .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро  $BC$ ?

**1.9.** Основания шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 E_1 F_1$  — правильные шестиугольники. Точка  $M$  — середина ребра  $AA_1$ .

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки  $C$ ,  $D$  и  $M$ .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро  $BB_1$ ?

**1.10.** Основания шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 E_1 F_1$  — правильные шестиугольники.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки  $A$ ,  $B$  и  $D_1$ .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро  $FF_1$ ?

**1.11.** Основание шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$  — правильный шестиугольник  $ABCDEF$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $BC$  и  $EF$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую  $MN$  параллельно ребру  $SA$ .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро  $SC$ ?

**1.12.** Основание шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$  — правильный шестиугольник  $ABCDEF$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую  $BF$  параллельно ребру  $SA$ .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро  $SC$ ?

**1.13.** Точка  $M$  — середина ребра  $AD$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку  $M$  параллельно прямым  $BD$  и  $CB_1$ .

б) В каком отношении плоскость сечения делит диагональ  $AC_1$  параллелепипеда?

**1.14.** Точка  $M$  — середина ребра  $AD$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки  $M$  и  $B_1$  параллельно прямой  $A_1 C_1$ .

б) В каком отношении плоскость сечения делит диагональ  $BD_1$  параллелепипеда?

**1.15.** Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер соответственно  $AB$  и  $CD$  треугольной пирамиды  $ABCD$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку пересечения медиан треугольника  $ABC$  параллельно прямым  $AB$  и  $CD$ .

б) В каком отношении плоскость сечения делит отрезок  $MN$ ?

**1.16.** Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер соответственно  $AB$  и  $CD$  треугольной пирамиды  $DABC$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра  $AD$  параллельно прямым  $AB$  и  $CD$ .

б) В каком отношении плоскость сечения делит отрезок  $MN$ ?

**1.17.** Дана четырёхугольная пирамида  $SABCD$ , основание которой параллелограмм  $ABCD$ . Точка  $M$  — середина ребра  $AB$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку  $M$  параллельно прямым  $AC$  и  $SB$ .

б) В каком отношении плоскость сечения делит отрезок, соединяющий точку  $D$  с серединой ребра  $SB$ ?

**1.18.** Дана четырёхугольная пирамида  $SABCD$ , основание которой параллелограмм  $ABCD$ . Точка  $M$  — середина ребра  $SD$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую  $BM$  параллельно прямой  $AC$ .

б) В каком отношении плоскость сечения делит отрезок, соединяющий точку  $S$  с центром параллелограмма  $ABCD$ ?

**1.19.** Точка  $M$  — середина ребра  $AB$  треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ .

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через прямую  $A_1M$  параллельно прямой  $AC$ .

б) В каком отношении плоскость сечения делит отрезок, соединяющий точку  $B_1$  с серединой ребра  $AC$ ?

**1.20.** Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер соответственно  $AC$  и  $BB_1$  треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ .

а) Постройте прямую пересечения плоскостей  $MNC_1$  и  $A_1B_1C_1$ .

б) В каком отношении плоскость  $MNC_1$  делит ребро  $AB$ ?

**1.21.** Основания шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1B_1C_1E_1F_1$  — правильные шестиугольники. Точка  $M$  — середина ребра  $CC_1$ ,  $O$  — центр грани  $ABCDEF$ .

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки  $M$ ,  $O$  и  $E_1$ .

б) В каком отношении плоскость сечения делит ребро  $EF$ ?

**1.22.** Основания шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 E_1 F_1$  — правильные шестиугольники. Точка  $M$  — середина ребра  $CC_1$ .

а) Постройте прямую пересечения плоскостей  $D_1 M E_1$  и  $ABC$ .

б) В каком отношении плоскость  $D_1 M E_1$  делит диагональ  $B_1 E$  призмы?

**1.23.** Основание шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$  — правильный шестиугольник  $ABCDEF$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $SA$  и  $SC$  соответственно.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки  $M$ ,  $N$  и  $B$ .

б) В каком отношении плоскость сечения делит отрезок, соединяющий вершину  $S$  с центром основания пирамиды?

**1.24.** Основание шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$  — правильный шестиугольник  $ABCDEF$ . Точка  $M$  — середина ребра  $BC$ .

а) Постройте прямую пересечения плоскостей  $FSM$  и  $ASB$ .

б) В каком отношении плоскость  $FSM$  делит отрезок, соединяющий точку  $A$  с серединой ребра  $SD$ ?

## § 2. Угол между прямыми

Углом между пересекающимися прямыми называется градусная мера наименьшего из углов, образованных при пересечении прямых.

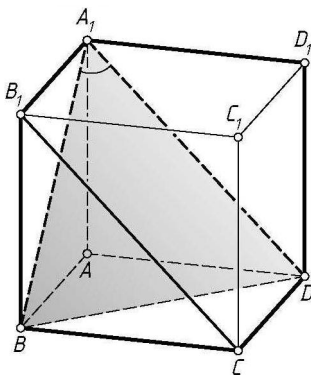
Угол между скрещивающимися прямыми определяется так. Либо через точку  $M$ , лежащую на одной из прямых, проводится прямая, параллельная второй, либо через точку  $M$ , не лежащую ни на одной из данных прямых, проводятся прямые, соответственно параллельные данным. В каждом из этих случаев углом между скрещивающимися прямыми называют угол между полученными пересекающимися прямыми.

В курсе геометрии доказывается, что угол между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки  $M$ .

**Пример 1.** Найдите угол между скрещивающимися диагоналями соседних граней куба.

*Ответ:*  $60^\circ$ .

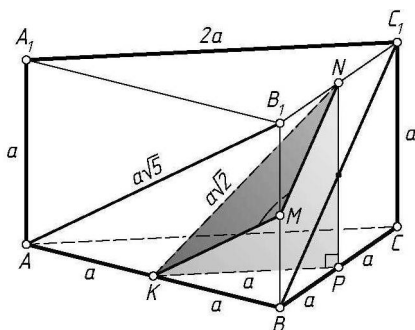
**Решение.** Рассмотрим куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдём угол между прямыми  $BA_1$  и  $CB_1$ . Заметим, что  $DA_1 \parallel CB_1$ , значит, угол между скрещивающимися прямыми  $BA_1$  и  $CB_1$  равен углу между пересекающимися прямыми  $BA_1$  и  $DA_1$ , т. е. углу  $BA_1 D$  — углу равностороннего треугольника  $BA_1 D$ . Следовательно, угол между скрещивающимися прямыми  $BA_1$  и  $CB_1$  равен  $60^\circ$ .  $\triangleleft$



**Пример 2.** Найдите угол между скрещивающимися диагоналями двух боковых граней правильной треугольной призмы, боковое ребро которой вдвое меньше стороны основания.

*Ответ:*  $\arccos \frac{1}{5}$ .

**Решение.** Пусть  $ABCA_1B_1C_1$  — правильная треугольная призма с основаниями  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , причём  $AA_1 = a$ ,  $AB = 2a$ . Найдём угол между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$ . Для этого отметим середины  $K$ ,  $M$  и  $N$  рёбер  $AB$ ,  $BB_1$  и  $B_1C_1$ . Тогда  $KM$  и  $MN$  — средние линии треугольников  $ABB_1$  и  $BB_1C_1$  соответственно, поэтому  $KM \parallel AB_1$  и  $MN \parallel BC_1$ . Значит, угол между скрещивающимися прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$  равен углу между пересекающимися прямыми  $KM$  и  $MN$ .



Пусть  $P$  — ортогональная проекция точки  $N$  на плоскость  $ABC$ . Тогда  $P$  — середина ребра  $BC$ , а  $KP$  — средняя линия треугольника  $ABC$ ,  $KP = \frac{1}{2}AC = a$ . Из прямоугольного треугольника  $KPN$  находим, что  $KN = a\sqrt{2}$ , а поскольку

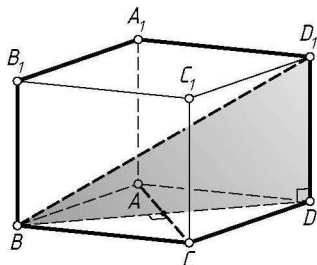
$$KM = MN = \frac{1}{2}BC_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2},$$

то по теореме косинусов

$$\cos \angle KMN = \frac{\frac{5a^2}{4} + \frac{5a^2}{4} - 2a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{5}. \quad \triangleleft$$

**Пример 3.** Основание прямого параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — ромб  $ABCD$ . Найдите угол между прямыми  $BD_1$  и  $AC$ .

*Ответ:*  $90^\circ$ .





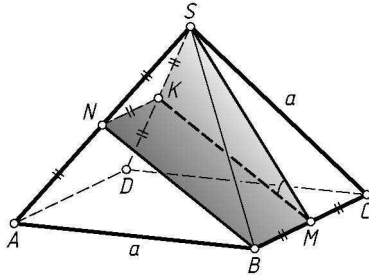
**Решение.** Диагональ  $BD$  ромба  $ABCD$  — ортогональная проекция диагонали  $BD_1$  параллелепипеда на плоскость  $ABC$ . Диагонали ромба перпендикулярны, значит, по теореме о трёх перпендикулярах  $BD_1 \perp AC$ .  $\triangleleft$

**Пример 4.** Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  равны. Точка  $M$  — середина стороны  $BC$  основания  $ABCD$ , точка  $N$  — середина бокового ребра  $SA$ . Найдите угол между прямыми  $SM$  и  $BN$ .

**Ответ:**  $\arccos \frac{5}{6}$ .

**Решение.** Пусть все рёбра пирамиды равны  $a$ . Отметим середину  $K$  бокового ребра  $SD$ . Отрезок  $NK$  — средняя линия треугольника  $ASD$ , поэтому  $NK = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = BM$  и  $NK \parallel AD \parallel BM$ . Значит,  $BMKN$  — параллелограмм. Тогда  $MK \parallel BN$ , следовательно, угол между скрещивающимися прямыми  $SM$  и  $BN$  равен углу между пересекающимися прямыми  $SM$  и  $MK$ , т. е. углу при вершине  $M$  треугольника  $SMK$  со сторонами  $MK = SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  и  $SK = \frac{a}{2}$ . По теореме косинусов

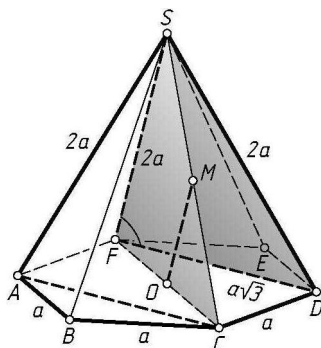
$$\cos \angle SMK = \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{6}. \quad \triangleleft$$



**Пример 5.** Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды  $SAB CDEF$  вдвое больше стороны основания  $ABCDEF$ . Точка  $O$  — центр основания, точка  $M$  — середина бокового ребра  $SC$ . Найдите угол между прямыми  $OM$  и  $AC$ .

**Ответ:**  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

**Решение.** Положим  $AB = a$ , тогда  $SA = 2a$ . Угол между скрещивающимися прямыми  $OM$  и  $AC$  равен углу между пересекающимися прямыми  $SF$  и  $FD$ , соответственно параллельными  $OM$  и  $AC$  ( $OM$  —



средняя линия треугольника  $CSF$ ). Поскольку  $SF = SD = SA = 2a$ , треугольник  $FDS$  равнобедренный с основанием  $DF = a\sqrt{3}$ . Следовательно, косинус искомого угла равен

$$\frac{\frac{1}{2}DF}{SF} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad \triangleleft$$

### Подготовительные задачи

1. Дан куб  $ABCA_1B_1C_1D_1$ . Найдите углы между прямыми: а)  $AA_1$  и  $BC$ ; б)  $AA_1$  и  $BD$ ; в)  $AA_1$  и  $BD_1$ ; г)  $BA_1$  и  $CB_1$ ; д)  $CA_1$  и  $BC_1$ .

2. Дан правильный тетраэдр  $ABCD$ . Точки  $K$ ,  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $BD$ ,  $AB$  и  $AC$  соответственно. Найдите углы между прямыми: а)  $AB$  и  $CD$ ; б)  $DM$  и  $BC$ ; в)  $DM$  и  $BN$ ; г)  $AK$  и  $BN$ .

3. Дана правильная четырёхугольная пирамида  $SABCD$  с вершиной  $S$ . Все рёбра пирамиды равны,  $M$  — середина бокового ребра  $SD$ . Найдите углы между прямыми: а)  $AS$  и  $BD$ ; б)  $AS$  и  $CD$ ; в)  $SA$  и  $CM$ ; г)  $SB$  и  $CM$ .

4. Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ . Боковое ребро  $AA_1$  равно стороне основания  $ABC$ . Точка  $M$  — середина ребра  $BC$ . Найдите углы между прямыми: а)  $AC$  и  $B_1C_1$ ; б)  $AA_1$  и  $BC_1$ ; в)  $AM$  и  $BC_1$ ; г)  $BC_1$  и  $CA_1$ .

5. Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ . Боковое ребро  $AA_1$  равно стороне основания  $ABCDEF$ . Найдите углы между прямыми: а)  $EA_1$  и  $AB$ ; б)  $BE_1$  и  $AF$ ; в)  $BD_1$  и  $CD$ ; г)  $BE_1$  и  $AB_1$ .

6. Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  с вершиной  $S$ . Боковое ребро вдвое больше стороны основания. Найдите углы между прямыми: а)  $SB$  и  $AF$ ; б)  $SC$  и  $AE$ ; в)  $SB$  и  $AE$ ; г)  $SB$  и  $AD$ .

### Задачи на доказательство и вычисление

**2.1.** Дана треугольная пирамида  $ABCD$ .

а) Постройте её сечение плоскостью, проходящей через середину ребра  $AB$  параллельно рёбрам  $AD$  и  $BC$ .

б) Найдите угол между прямыми  $AD$  и  $BC$ , если  $AD = 24$ ,  $BC = 10$ , а расстояние между серединами рёбер  $BD$  и  $AC$  равно 13.

**2.2.** Точка  $K$  лежит на ребре  $AD$  треугольной пирамиды  $ABCD$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью  $\alpha$ , проходящей через точку  $K$  параллельно рёбрам  $AB$  и  $CD$ .

б) Пусть  $M$  — точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $BC$ . Найдите угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ , если  $K$  — середина ребра  $AD$ ,  $AB = 8$ ,  $CD = 6$ ,  $KM = 5$ .

**2.3.** В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$  с вершиной  $S$  точка  $M$  — середина бокового ребра  $SC$ .

а) Постройте точку пересечения прямой  $BM$  с плоскостью грани  $ESF$ .

б) Найдите угол между прямыми  $BM$  и  $DE$ , если  $SC = 2BC$ .

**2.4.** Точка  $G$  лежит на боковом ребре  $SC$  правильной шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$  с вершиной  $S$ .

а) Постройте точку пересечения прямой  $BG$  с плоскостью боковой грани  $ESF$ .

б) Найдите угол между прямыми  $BG$  и  $AD$ , если стороны основания пирамиды равны 6, боковые рёбра равны  $3\sqrt{13}$ , а  $SG : GC = 1 : 2$ .

**2.5.** Основания призмы  $ABCA_1B_1C_1$  — равносторонние треугольники. Точки  $M$  и  $M_1$  — центры оснований  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  соответственно.

а) Докажите, что угол между прямыми  $BM$  и  $C_1M_1$  равен  $60^\circ$ .

б) Найдите угол между прямыми  $BM_1$  и  $C_1M$ , если призма прямая и  $AB : AA_1 = 3 : 2$ .

**2.6.** Основание прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  — равнобедренный прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом при вершине  $C$ . Точка  $M$  — середина ребра  $AB$ . Известно, что  $AB = 2AA_1$ .

а) Докажите, что прямые  $A_1C$  и  $MB_1$  перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми  $AC_1$  и  $MB_1$ .

**2.7.** Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  со стороной основания  $\sqrt{3}$  и боковым ребром 1.

а) Докажите, что плоскости  $ACA_1$  и  $B_1CE_1$  перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми  $BF_1$  и  $CD_1$ .

**2.8.** Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ .

а) Докажите, что плоскости  $AB_1 F$  и  $ACC_1$  перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми  $AB_1$  и  $CF_1$ , если  $AA_1 = AB\sqrt{2}$ .

**2.9.** Основание пирамиды  $SABCD$  — параллелограмм  $ABCD$ . Точка  $K$  лежит на ребре  $SD$  и отлична от  $S$  и  $D$ .

а) Может ли сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую  $AB$  и точку  $K$ , быть параллелограммом?

б) Пусть  $K$  — середина ребра  $SD$ ,  $M$  — середина ребра  $AB$ , а пирамида  $SABCD$  правильная, причём все её рёбра равны. Найдите угол между прямыми  $AK$  и  $SM$ .

**2.10.** Основание пирамиды  $SABCD$  — параллелограмм  $ABCD$ . Точка  $K$  — середина ребра  $SD$ .

а) Плоскость проходит через точку  $K$  параллельно медианам  $BM$  и  $SN$  граней  $BSC$  и  $ASD$ . Постройте прямую пересечения этой плоскости с плоскостью основания пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми  $BM$  и  $SN$ , если пирамида  $SABCD$  правильная, причём все её рёбра равны.

**2.11.** Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точки  $K$  и  $L$  — центры граней  $BB_1 C_1 C$  и  $A_1 B_1 C_1 D_1$  соответственно.

а) Докажите, что точка пересечения прямой  $KL$  с плоскостью основания  $ABCD$  равноудалена от вершин  $B$  и  $C$ .

б) Пусть  $M$  — середина ребра  $CD$ . Найдите котангенс угла между прямыми  $MD_1$  и  $KL$ , если известно, что  $AB = 2AA_1$ .

**2.12.** Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точка  $M$  — середина ребра  $A_1 B_1$ .

а) Докажите, что любая плоскость, проведённая через точку  $M$  параллельно диагонали  $CA_1$  параллелепипеда, проходит через центр грани  $BB_1 C_1 C$ .

б) Найдите угол между прямыми  $BM$  и  $CB_1$ , если параллелепипед прямоугольный,  $AB = 2BC$  и  $CC_1 : BC = 4 : 3$ .

**2.13.** Основание пирамиды  $SABCD$  — квадрат  $ABCD$ , высота пирамиды проходит через точку  $D$ .

а) Докажите, что все боковые грани пирамиды — прямоугольные треугольники.

б) Пусть  $M$  — середина бокового ребра  $SC$ . Найдите угол между прямыми  $AM$  и  $BC$ , если известно, что отношение высоты пирамиды к стороне её основания равно  $\sqrt{11}$ .

**2.14.** Дана правильная четырёхугольная пирамида  $SABCD$  с вершиной  $S$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AB$  и  $SC$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую  $MN$  параллельно  $SA$ .

б) Найдите угол между прямыми  $SA$  и  $MN$ , если боковое ребро пирамиды равно стороне основания.

**2.15.** В основании пирамиды  $DABC$  лежит треугольник  $ABC$ . Высота пирамиды проходит через точку  $B$ .

а) Докажите, что отрезок, соединяющий середины рёбер  $BC$  и  $AD$ , равен отрезку, соединяющему середины рёбер  $AB$  и  $CD$ .

б) Найдите угол между прямой  $BD$  и прямой, проходящей через середины рёбер  $BC$  и  $AD$ , если известно, что  $BD = AC$ .

**2.16.** Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ . На ребре  $BC$  взята точка  $M$ , причём  $BM : CM = 1 : 2$ .

а) Докажите, что плоскость, проходящая через центры граней  $A_1B_1C_1$  и  $BB_1C_1C$  параллельно ребру  $AC$ , проходит через точку  $M$ .

б) Пусть  $K$  — середина ребра  $A_1C_1$ ,  $N$  — центр грани  $BB_1C_1C$ . Найдите угол между прямыми  $B_1K$  и  $MN$ , если  $AC = 18\sqrt{3}$ ,  $AA_1 = \sqrt{13}$ .

**2.17.** Основание призмы  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  — правильный шестиугольник  $ABCDEF$ .

а) Постройте точку пересечения прямой  $B_1E$  с плоскостью  $ACD_1$ .

б) Найдите угол между прямыми  $AB_1$  и  $BD_1$ , если призма правильная, а  $AA_1 : AB = \sqrt{3} : 1$ .

**2.18.** Дана прямая призма  $ABCA_1B_1C_1$ . Плоскость, проходящая через точку пересечения медиан  $A_1B_1C_1$  и середину  $K$  ребра  $BC$ , параллельна прямой  $AB$ . Эта плоскость пересекает прямую  $CC_1$  в точке  $L$ .

а) Докажите, что  $CL = 3CC_1$ .

б) Найдите угол между прямыми  $KL$  и  $AC_1$ , если  $\angle ACB = 90^\circ$  и  $AA_1 = AC = \frac{1}{4}BC$ .

**2.19.** В основании пирамиды  $SABCD$  лежит трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  и прямым углом при вершине  $A$ , причём  $BC = 2AD$ . Высота пирамиды проходит через точку  $A$ .

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую  $AD$  и середину  $M$  ребра  $SC$ , — прямоугольник.

б) Найдите косинус угла между прямыми  $AM$  и  $CD$ , если известно, что  $AD = AB$  и  $SA = \sqrt{3}AB$ .

**2.20.** В основании пирамиды  $SABCD$  лежит равнобедренная трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . Высота пирамиды проходит че-

рез точку  $A$ ,  $SH$  — высота треугольника  $BSC$ . Известно, что  $BC = 2AD$ ,  $AB = AD = 2SA$ .

а) Докажите, что  $SH = CD$ .

б) Найдите косинус угла между прямыми  $CD$  и  $SH$ .

**2.21.** Основание  $ABCD$  прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — ромб с острым углом  $60^\circ$  при вершине  $A$ . Точка  $M$  — середина ребра  $CD$ , точка  $H$  лежит на стороне  $AB$ , причём  $DH$  — высота ромба  $ABCD$ .

а) Докажите, что  $D_1 M \perp DH$ .

б) Найдите угол между прямыми  $MD_1$  и  $BC_1$ , если  $\angle ABA_1 = 60^\circ$ .

**2.22.** Основание прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — равнобедренная трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD = 2BC$  и боковой стороной  $AB = BC$ .

а) Докажите, что  $AB \perp DB_1$ .

б) Найдите угол между прямыми  $CD_1$  и  $DB_1$ , если боковая грань  $AA_1 D_1 D$  — квадрат.

**2.23.** Две правильные пирамиды  $DABC$  и  $FABC$  имеют общее основание  $ABC$  и расположены по разные стороны от него. Все плоские углы при вершинах  $D$  и  $F$  прямые.

а) Докажите, что угол между плоскостями  $ADB$  и  $AFB$  равен углу между прямыми  $CD$  и  $CF$ .

б) Найдите угол между прямыми  $AD$  и  $BF$ , если боковые рёбра каждой пирамиды равны 1.

**2.24.** Две правильные четырёхугольные пирамиды  $EABCD$  и  $FABCD$  имеют общее основание  $ABCD$  и расположены по разные стороны от него. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $BC$  и  $AB$  соответственно. Все рёбра пирамид равны.

а) Докажите, что угол между прямыми  $AE$  и  $BF$  равен  $60^\circ$ .

б) Найдите угол между прямыми  $EM$  и  $FN$ .

### § 3. Угол между плоскостями

Угол между пересекающимися плоскостями — это наименьший из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Если одну из плоскостей заменить на параллельную, то полученный угол будет равен данному.

Угол между плоскостями равен углу между прямыми, соответственно перпендикулярными этим плоскостям.

Чаще всего при вычислении угла между плоскостями либо строят линейный угол соответствующего двугранного угла, либо находят угол между перпендикулярами к этим плоскостям.

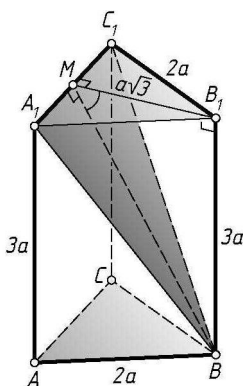
Две плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен  $90^\circ$ .

*Признак перпендикулярности плоскостей.* Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой, то эти плоскости перпендикулярны.

**Пример 1.** Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ . Её боковое ребро  $AA_1$  относится к стороне основания как  $3:2$ . Найдите угол между плоскостью основания  $ABC$  и плоскостью  $A_1BC_1$ .

*Ответ:*  $60^\circ$ .

**Решение.** Плоскости оснований призмы параллельны, поэтому угол между плоскостями  $ABC$  и  $A_1BC_1$  равен углу между плоскостями  $A_1B_1C_1$  и  $A_1BC_1$ , которые пересекаются по прямой  $A_1C_1$ .



Пусть  $M$  — середина ребра  $A_1C_1$ . Тогда  $B_1M \perp A_1C_1$  и  $BM \perp A_1C_1$ . Значит,  $\angle BMB_1$  — линейный угол искомого двугранного угла.

Положим  $BB_1 = AA_1 = 3a$ , тогда  $A_1B_1 = AB = 2a$  и

$$B_1M = \frac{A_1B_1\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Значит,

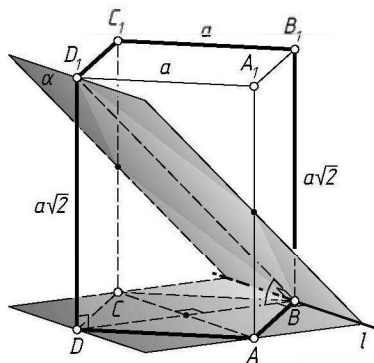
$$\operatorname{tg} \angle BMB_1 = \frac{BB_1}{B_1M} = \frac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Следовательно,  $\angle BMB_1 = 60^\circ$ . ◁

**Пример 2.** Через диагональ  $BD_1$  правильной четырёхугольной призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с основанием  $ABCD$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $AC$ . Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью основания призмы, если  $AB : AA_1 = 1 : \sqrt{2}$ .

*Ответ:*  $45^\circ$ .

**Решение.** Плоскость  $ABC$  проходит через прямую  $AC$ , параллельную плоскости  $\alpha$ , значит, прямая  $l$  пересечения плоскостей проходит через точку  $B$  параллельно  $AC$ . Поскольку  $DB \perp AC$ , а  $DB$  — ортогональная проекция наклонной  $D_1B$  на плоскость  $ABC$ , то  $DB \perp l$  и по теореме о трёх перпендикулярах  $D_1B \perp l$ . Следовательно,  $DBD_1$  — линейный угол искомого двугранного угла.



Положим  $AB = a$ , тогда  $DD_1 = AA_1 = a\sqrt{2}$ . Из прямоугольного треугольника  $DBD_1$  находим, что

$$\operatorname{tg} \angle DBD_1 = \frac{DD_1}{DB} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1.$$

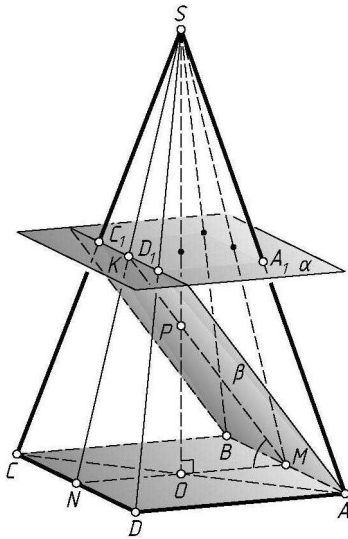
Следовательно,  $\angle DBD_1 = 45^\circ$ . ◁



**Пример 3.** Дана четырёхугольная пирамида  $SABCD$ , основание которой — прямоугольник  $ABCD$ , а высота проходит через центр  $O$  основания. Через середину  $A_1$  бокового ребра  $SA$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная плоскости основания, а через середину  $C_1$  бокового ребра  $SC$  и ребро  $AB$  — плоскость  $\beta$ . Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , если  $AB : BC : SA = 8 : 6 : 13$ .

Ответ:  $\arctg \frac{4}{3}$ .

**Решение.** Поскольку плоскость  $\alpha$  параллельна плоскости основания пирамиды, прямая пересечения плоскости  $\alpha$  с плоскостью  $CSD$  параллельна  $CD$ , а искомый угол равен углу между плоскостью  $\beta$  и плоскостью основания пирамиды.



Пусть плоскость  $\alpha$  пересекает боковое ребро  $SD$  в точке  $D_1$ . Тогда  $C_1D_1$  — средняя линия треугольника  $CSD$ , поэтому точка  $K$  пересечения отрезка  $C_1D_1$  с медианой  $SN$  треугольника  $SCD$  — середина  $SN$ .

Пусть  $M$  — середина ребра  $AB$ . Плоскость  $MSN$  проходит через высоту  $SO$  пирамиды, а так как  $MK$  и  $SO$  — медианы треугольника  $MCN$ , то их точка пересечения  $P$  делит высоту  $SO$  в отношении  $OP : PS = 1 : 2$ .

Прямая  $AB$  перпендикулярна плоскости  $MSN$ , так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $SM$  и  $MN$  этой плоскости. Значит, линейный угол искомого двугранного угла — это угол  $KMN$ .

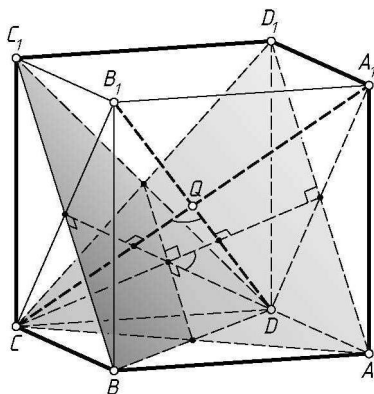
Положим  $AB = 8a$ , тогда  $BC = 6a$ ,  $SA = 13a$ . По теореме Пифагора из прямоугольных треугольников  $ABC$  и  $AOS$  находим, что  $AC = 10a$  и  $SO = 12a$ . Тогда  $PO = \frac{1}{3}SO = 4a$ , а так как  $OM = \frac{1}{2}MN = 3a$ , получаем, что

$$\operatorname{tg} \angle KMN = \operatorname{tg} \angle PMO = \frac{PO}{OM} = \frac{4a}{3a} = \frac{4}{3}. \quad \triangleleft$$

**Пример 4.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите угол между плоскостями  $BC_1 D$  и  $AD_1 C$ .

*Ответ:*  $\arccos \frac{1}{3}$ .

**Решение.** Прямая  $CA_1$  перпендикулярна плоскости  $BC_1 D$ , а прямая  $B_1 D$  — плоскости  $AD_1 C$ . Значит, угол между этими плоскостями равен углу между прямыми  $CA_1$  и  $B_1 D$ , т. е. углу между диагоналями прямоугольника  $A_1 B_1 C D$ .



Пусть ребро куба равно  $2a$ , а диагонали  $CA_1$  и  $B_1 D$  пересекаются в точке  $Q$ . Тогда

$$CA_1 = 2a\sqrt{3}, \quad DQ = QC = \frac{1}{2}CA_1 = a\sqrt{3}.$$

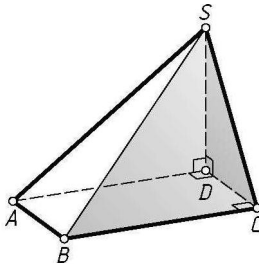
Из равнобедренного треугольника  $CQD$  находим, что

$$\cos \angle CQD = \frac{3a^2 + 3a^2 - 4a^2}{2 \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{1}{3}. \quad \triangleleft$$

**Пример 5.** Основание пирамиды  $SABCD$  — прямоугольник  $ABCD$ , боковое ребро  $SD$  перпендикулярно плоскости основания. Найдите угол между плоскостями  $BSC$  и  $CSD$ .

*Ответ:*  $90^\circ$ .

**Решение.** Прямая  $BC$  перпендикулярна плоскости  $CSD$ , так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $CD$  и  $SD$  этой плоскости. Плоскость  $BSC$  проходит через прямую  $BC$ , перпендикулярную плоскости  $CSD$ , следовательно, эти плоскости перпендикулярны.  $\triangleleft$



### Подготовительные задачи

1. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите угол между плоскостями: а)  $BCC_1$  и  $ABC_1$ ; б)  $ABC$  и  $CB_1 D_1$ ; в)  $BA_1 C_1$  и  $AB_1 D_1$ ; г)  $ABC_1$  и  $BCD_1$ .
2. Дан правильный тетраэдр  $ABCD$ . Точки  $K$  и  $M$  — середины рёбер  $BD$  и  $CD$  соответственно. Найдите углы между плоскостями: а)  $AKC$  и  $ABD$ ; б)  $AMB$  и  $ABC$ ; в)  $AKM$  и  $ABC$ .
3. Дана правильная четырёхугольная пирамида  $SABCD$  с вершиной  $S$ . Все рёбра пирамиды равны,  $E$  — середина бокового ребра  $SC$ . Найдите углы между плоскостями: а)  $SAD$  и  $SBC$ ; б)  $ABC$  и  $SCD$ ; в)  $ABC$  и  $BDE$ ; г)  $BSC$  и  $DSC$ ; д)  $ABE$  и  $ABC$ .
4. Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1 B_1 C_1$ . Боковое ребро  $AA_1$  равно стороне основания  $ABC$ . Точка  $M$  — середина ребра  $BC$ . Найдите углы между плоскостями: а)  $AA_1 M$  и  $ABC$ ; б)  $ABC$  и  $CA_1 B_1$ ; в)  $ACB_1$  и  $BA_1 C_1$ ; г)  $A_1 C_1 M$  и  $A_1 B_1 C_1$ .
5. Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ . Боковое ребро  $AA_1$  равно стороне основания  $ABCDEF$ . Найдите углы между плоскостями: а)  $ABC$  и  $DB_1 F_1$ ; б)  $AFF_1$  и  $DEE_1$ ; в)  $AFF_1$  и  $BCC_1$ ; г)  $AFF_1$  и  $BDD_1$ .
6. Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  с вершиной  $S$ . Боковое ребро вдвое больше стороны основания. Найдите углы между плоскостями: а)  $ABC$  и  $SEF$ ; б)  $SBD$  и  $ABC$ ; в)  $SBC$  и  $SEF$ ; г)  $SAF$  и  $SBC$ .

## Задачи на доказательство и вычисление

**3.1.** Основание пирамиды совпадает с одной из граней куба, а вершина — с центром противоположной грани.

- а) Докажите, что пирамида правильная.
- б) Найдите угол между плоскостями её соседних боковых граней.

**3.2.** Дана правильная треугольная пирамида  $DABC$  с вершиной  $D$ . Точка  $M$  — середина ребра  $AB$ ,  $N$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на прямую  $CD$ .

- а) Докажите, что прямая  $MN$  перпендикулярна прямой  $AB$ .
- б) Найдите угол между боковыми гранями пирамиды, если угол между боковым ребром и плоскостью основания равен  $60^\circ$ .

**3.3.** Дана правильная четырёхугольная пирамида  $SABCD$  с вершиной  $S$ . Точка  $O$  — центр основания,  $K$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на прямую  $SC$ .

- а) Докажите, что прямая  $OK$  перпендикулярна прямой  $BD$ .
- б) Найдите двугранный угол при боковом ребре пирамиды, если угол между боковым ребром и плоскостью основания равен  $60^\circ$ .

**3.4.** Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  с вершиной  $S$ . Диагонали  $AD$  и  $CE$  основания пересекаются в точке  $P$ ,  $Q$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $P$  на прямую  $SD$ .

- а) Докажите, что прямая  $PQ$  перпендикулярна прямой  $CE$ .
- б) Найдите двугранный угол при боковом ребре пирамиды, если угол между боковым ребром и плоскостью основания равен  $60^\circ$ .

**3.5.** В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре  $AA_1$  отмечена точка  $E$  так, что  $AE : EA_1 = 1 : 2$ .

- а) Постройте прямую пересечения плоскостей  $ABC$  и  $BED_1$ .
- б) Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $BED_1$ .

**3.6.** В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 4. На ребре  $AA_1$  отмечена точка  $E$  так, что  $AE : EA_1 = 1 : 3$ .

- а) Постройте прямую пересечения плоскостей  $ABC$  и  $BED_1$ .
- б) Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $BED_1$ .

**3.7.** Основание пирамиды  $SABCD$  — прямоугольник  $ABCD$ . Высота пирамиды лежит в грани  $CSD$ .

- а) Докажите, что прямые  $AD$  и  $SC$  перпендикулярны.
- б) Известно, что  $AB : BC = 2\sqrt{3} : 1$ , высота пирамиды проходит через середину ребра  $CD$ , а угол между боковой гранью  $BSC$  и плоско-

стью основания равен  $45^\circ$ . Найдите углы, которые образуют с плоскостью основания плоскости остальных боковых граней.

**3.8.** Основание пирамиды  $ABCD$  — прямоугольный треугольник  $ABC$ . Высота пирамиды проходит через середину гипотенузы  $AB$ .

а) Докажите, что боковые рёбра пирамиды образуют равные углы с плоскостью основания.

б) Известно, что  $BC : AC = \sqrt{3} : 1$ , а угол между боковой гранью  $BDC$  и плоскостью основания равен  $60^\circ$ . Найдите углы, которые образуют с плоскостью основания плоскости двух других боковых граней.

**3.9.** Точки  $M$  и  $N$  — середины боковых рёбер соответственно  $AA_1$  и  $CC_1$  прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$ .

а) Докажите, что отрезок, соединяющий вершину  $B_1$  с серединой ребра  $AC$ , делится плоскостью  $BMN$  в отношении  $2 : 1$ , считая от точки  $B_1$ .

б) Найдите угол между плоскостями  $AA_1C_1$  и  $MBN$ , если  $AB = BC = 15$ ,  $AC = 24$  и  $AA_1 = 144$ .

**3.10.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  стороны основания равны 5, боковые рёбра равны 2, точка  $D$  — середина ребра  $CC_1$ .

а) Постройте прямую пересечения плоскостей  $ABC$  и  $ADB_1$ .

б) Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $ADB_1$ .

**3.11.** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с вершиной  $S$  все рёбра равны.

а) Постройте прямую пересечения плоскости  $SAD$  с плоскостью, проходящей через точку  $B$  перпендикулярно прямой  $AS$ .

б) Найдите угол между плоскостью  $SAD$  и плоскостью, проходящей через точку  $B$  перпендикулярно прямой  $AS$ .

**3.12.** Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  со стороной основания  $\sqrt{3}$  и боковым ребром 1.

а) Докажите, что плоскости  $ACA_1$  и  $B_1CE_1$  перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями  $B_1CE_1$  и  $ABC$ .

**3.13.** В основании прямой призмы  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  лежит квадрат  $ABCD$  со стороной 2, а высота призмы равна 1. Точка  $E$  лежит на диагонали  $BD_1$ , причём  $BE = 1$ .

а) Постройте сечение призмы плоскостью  $A_1C_1E$ .

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью  $ABC$ .

**3.14.** На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1E : EA = 4 : 3$ . Точка  $T$  — середина ребра  $B_1C_1$ . Известно, что  $AB = 5$ ,  $AD = 8$ ,  $AA_1 = 14$ .

а) Докажите, что плоскость  $ETD_1$  делит ребро  $BB_1$  в отношении 2 : 5.

б) Найдите угол между плоскостью  $ETD_1$  и плоскостью  $AA_1B_1$ .

**3.15.** В основании прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит квадрат  $ABCD$  со стороной 4, а высота призмы равна  $\sqrt{17}$ . Точка  $E$  лежит на диагонали  $BD_1$ , причём  $BE = 1$ .

а) Постройте сечение призмы плоскостью  $A_1 C_1 E$ .

б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью  $ABC$ .

**3.16.** В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  со стороной основания 4 и высотой 7 на ребре  $AA_1$  взята точка  $M$  так, что  $AM = 2$ . На ребре  $BB_1$  взята точка  $K$  так, что  $B_1 K = 2$ .

а) Постройте сечение призмы плоскостью  $A_1 C_1 E$ .

б) Найдите угол между плоскостью  $D_1 MK$  и плоскостью  $CC_1 D_1$ .

**3.17.** В треугольной пирамиде  $SABC$  с основанием  $ABC$  точка  $M$  — середина ребра  $SA$ , точка  $K$  — середина ребра  $SB$ ,  $O$  — точка пересечения медиан основания.

а) Докажите, что плоскость  $CMK$  делит отрезок  $SO$  в отношении 3 : 2, считая от вершины  $S$ .

б) Найдите угол между плоскостями  $CMK$  и  $ABC$ , если пирамида правильная,  $SC = 6$ ,  $AB = 4$ .

**3.18.** Основание четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  — параллелограмм  $ABCD$  с центром  $O$ . Точка  $M$  — середина ребра  $SC$ ,  $K$  — середина ребра  $SA$ .

а) Докажите, что плоскость  $BMK$  делит ребро  $SD$  в отношении 1 : 2, считая от вершины  $S$ .

б) Найдите угол между плоскостями  $BMK$  и  $ABC$ , если пирамида правильная,  $AB = 10$ ,  $SC = 8$ .

**3.19.** Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Через прямую  $BD_1$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $AC$ .

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью  $\alpha$ .

б) Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $ABC$ , если  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CC_1 = c$ .

**3.20.** Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Через прямую  $BD_1$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $AC$ . Сечение параллелепипеда плоскостью  $\alpha$  — ромб.

а) Докажите, что грань  $ABCD$  — квадрат.

б) Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $BCC_1$ , если  $AA_1 : AB = 3 : 2$ .

## § 4. Расстояние от точки до прямой. Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Это расстояние удобно находить как высоту какого-то треугольника. Высота треугольника равна его удвоенной площади, делённой на основание. В частности, если треугольник прямоугольный, то его высота, опущенная на гипотенузу, равна произведению катетов, делённому на гипотенузу.

Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость. При вычислении этого перпендикуляра удобно использовать следующие простые соображения.

1. Расстояние от точки до плоскости не изменится, если эту точку сместить вдоль любой прямой, параллельной плоскости.

2. Если точки  $B$  и  $C$  лежат на прямой, пересекающей плоскость в точке  $A$ , то расстояния от точек  $B$  и  $C$  до плоскости относятся как  $BA : CA$ . В частности, если  $C$  — середина наклонной  $AB$ , то расстояние от точки  $C$  до плоскости вдвое меньше расстояния до этой плоскости от точки  $B$ , а если  $A$  — середина отрезка  $BC$ , то точки  $B$  и  $C$  равноудалены от плоскости.

Кроме того, полезен такой факт. Диагональ  $AC_1$  в любом параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  проходит через точку пересечения медиан треугольника  $BA_1 D$  и делится ею в отношении  $1 : 2$ , считая от вершины  $A$ . Если же  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб, то эта диагональ перпендикулярна плоскости  $BA_1 D$ , значит, расстояние от вершины  $A$  до этой плоскости равно трети диагонали, т. е.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ , где  $a$  — длина ребра куба.

**Пример 1.** Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , в котором  $AB = 5$ ,  $BC = 6$ ,  $AA_1 = 6\sqrt{3}$ . Найдите расстояние от вершины  $C$  до диагонали  $DB_1$  параллелепипеда.

*Ответ:*  $\frac{60}{13}$ .

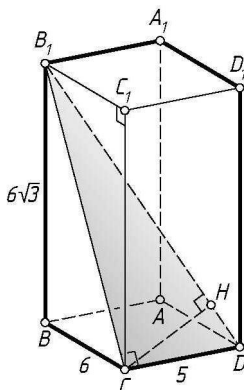
**Решение.** Прямая  $DC$  перпендикулярна плоскости  $BCC_1$ , значит,  $DC \perp CB_1$ . Из прямоугольных треугольников  $CC_1 B_1$  и  $DCB_1$  найдем, что

$$CB_1 = \sqrt{36 + 108} = 12, \quad DB_1 = \sqrt{144 + 25} = 13.$$

Пусть  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $C$  на прямую  $DB_1$ . Тогда  $CH$  — высота прямоугольного треугольника  $DCB_1$ ,

опущенная на гипотенузу. Следовательно,

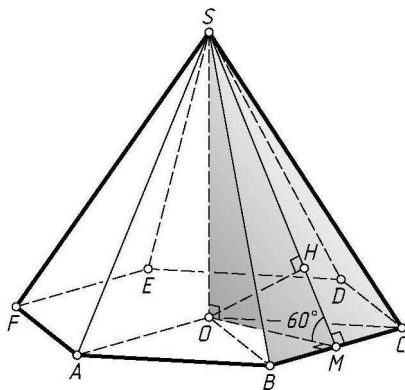
$$CH = \frac{CD \cdot CB_1}{DB_1} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}. \quad \triangleleft$$



**Пример 2.** Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  с вершиной  $S$ . Сторона основания пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен  $60^\circ$ . Найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $BSC$ .

*Ответ:* 3.

**Решение.** Пусть  $O$  — центр основания пирамиды. Поскольку прямая  $OA$  параллельна плоскости  $BSC$ , точки  $A$  и  $O$  равноудалены от этой плоскости. Опустим перпендикуляр  $OH$  из точки  $O$  на апофему  $SM$  пирамиды, лежащую в грани  $BSC$ . Тогда  $OH$  — перпендикуляр к плоскости  $BSC$ , а  $OMS$  — линейный угол двугранного угла при





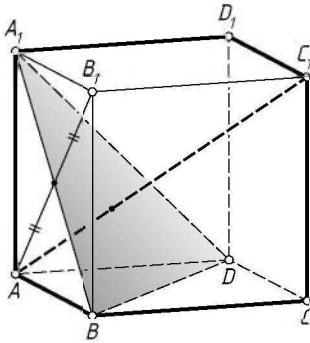
стороне  $BC$  основания пирамиды. По условию  $\angle OMS = 60^\circ$ . Из прямоугольного треугольника  $OHM$  находим, что

$$OH = OM \sin \angle OMS = \frac{BC\sqrt{3}}{2} \sin 60^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3. \quad \triangleleft$$

**Пример 3.** Найдите расстояние от вершины  $B_1$  единичного куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$  до плоскости  $BA_1D$ .

Ответ:  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

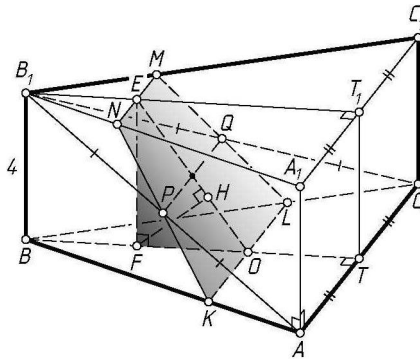
**Решение.** Отрезок  $AB_1$  делится прямой  $BA_1$ , а значит, и плоскостью  $BA_1D$  пополам. Следовательно, точки  $B_1$  и  $A$  равноудалены от этой плоскости. Расстояние же от точки  $A$  до плоскости  $BA_1D$ , как было показано выше, равно  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .  $\triangleleft$



**Пример 4.** Основание  $ABC$  прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  — треугольник  $ABC$  со сторонами  $AB = BC$  и медианой  $BT = 9$ . Через точку  $O$  пересечения медиан треугольника  $ABC$  и центры  $P$  и  $Q$  боковых граней  $ABB_1A_1$  и  $BCC_1B_1$  соответственно проведена плоскость. Найдите расстояние от точки  $C$  до этой плоскости, если  $AA_1 = 4$ .

Ответ: 2,4.

**Решение.** Отрезок  $PQ$  — средняя линия треугольника  $AB_1C$ , поэтому прямая  $PQ$  параллельна ребру  $AC$ , а значит, и плоскостям  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ . Плоскость  $OPQ$  пересекает основания пирамиды по прямым, параллельным  $PQ$ . Пусть  $K$  и  $L$  — точки пересечения плоскости  $OPQ$  с рёбрами  $AB$  и  $BC$  соответственно. Тогда  $\frac{AK}{KB} = \frac{CL}{LB} = \frac{OT}{OB} = \frac{1}{2}$ . Пусть  $M$  и  $N$  — точки пересечения плоскости  $OPQ$  с рёбрами  $B_1C_1$  и  $A_1B_1$  соответственно, а  $E$  — точка пересечения медианы  $B_1T_1$  основания  $A_1B_1C_1$  с прямой  $MN$ . Тогда из равенства треугольников



$B_1PN$  и  $AKP$  следует, что  $NB_1 = AK$ . Значит,

$$\frac{B_1M}{MC_1} = \frac{B_1N}{NA_1} = \frac{AK}{KB} = \frac{1}{2}.$$

Треугольник  $NB_1M$  подобен треугольнику  $A_1B_1C_1$  с коэффициентом  $\frac{NB_1}{A_1B_1} = \frac{1}{3}$ , значит,

$$B_1E = \frac{1}{3}B_1T_1 = \frac{1}{3}BT = 3.$$

Опустим перпендикуляр  $EF$  из точки  $E$  на прямую  $BT$ . Тогда

$$EF = BB_1 = 4, \quad OF = BO - BF = BO - B_1E = 6 - 3 = 3,$$

$$EO = \sqrt{OF^2 + EF^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Пусть  $FH$  — высота прямоугольного треугольника  $EFO$ . Тогда  $FH \perp EO$  и  $FH \perp AC$ , значит,  $FH$  — перпендикуляр к плоскости  $OPQ$ . Из равенства  $OF \cdot EF = EO \cdot FH$  находим, что

$$FH = \frac{OF \cdot EF}{EO} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

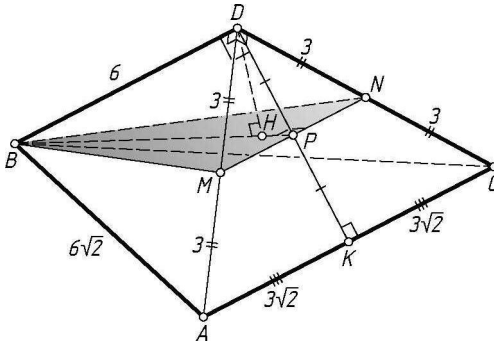
Следовательно, расстояние от точки  $F$  до плоскости  $OPQ$  равно  $\frac{12}{5}$ .

Отрезок  $BC$  пересекает плоскость  $OPQ$  в точке  $L$ , причём  $\frac{BL}{LC} = 2$ , значит, расстояние от точки  $C$  до плоскости  $OPQ$  вдвое меньше расстояния до этой плоскости от точки  $B$ , а так как  $F$  — середина  $BO$ , то искомое расстояние равно длине отрезка  $FH$ .  $\triangleleft$

**Пример 5.** Боковые рёбра  $DA$ ,  $DB$  и  $DC$  правильной пирамиды  $DABC$  попарно перпендикулярны. Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости, проходящей через точку  $B$  и середины рёбер  $DA$  и  $DC$ , если сторона основания пирамиды равна  $6\sqrt{2}$ .

Ответ: 2.

**Решение.** Пусть  $P$  — точка пересечения медианы  $DK$  грани  $ADC$  со средней линией  $MN$  треугольника  $ADC$ . Тогда  $P$  — середина  $DK$ . Точка  $N$  — середина ребра  $DC$ , поэтому точки  $C$  и  $D$  равноудалены от плоскости  $BMN$ . Следовательно, задача сводится к вычислению расстояния от точки  $D$  до этой плоскости.



Из равнобедренного прямоугольного треугольника  $ADB$  находим, что

$$DB = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 6,$$

значит,  $DA = DC = DB = 6$ . Прямая  $BD$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $DA$  и  $DC$  плоскости  $ADC$ , поэтому  $BD$  — перпендикуляр к плоскости  $ADC$ , а треугольник  $BDP$  прямоугольный. Пусть  $DH$  — его высота. Поскольку  $DH \perp BP$  и  $DH \perp MN$ , то  $DH$  — перпендикуляр к плоскости  $BMN$ . Значит, расстояние от точки  $D$  до плоскости  $BMN$  равно длине отрезка  $DH$ . Далее находим, что

$$DP = \frac{1}{2}DK = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad BP = \sqrt{BD^2 + DP^2} = \sqrt{36 + \frac{9}{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$DH = \frac{DB \cdot DP}{BP} = \frac{6 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}}{\frac{9}{\sqrt{2}}} = 2. \quad \triangleleft$$

### Подготовительные задачи

1. Дан единичный куб  $ABCA_1B_1C_1D_1$ . Найдите расстояния: а) от точки  $B$  до прямой  $DA_1$ ; б) от точки  $A$  до прямой  $BB_1$ ; в) от точки  $B_1$  до прямой  $DA_1$ ; г) от точки  $A$  до плоскости  $CB_1D_1$ ; д) от точки  $A$  до плоскости  $BDC_1$ ; е) от точки  $B$  до плоскости  $AB_1D_1$ ; ж) от точки  $B$  до плоскости  $DA_1C_1$ .

2. Рёбра правильного тетраэдра  $ABCD$  равны 1. Точка  $P$  — середина ребра  $AB$ . Найдите расстояния: а) от точки  $P$  до прямой  $CD$ ; б) от точки  $A$  до плоскости  $BCD$ ; в) от точки  $P$  до плоскости  $ADC$ ; г) от центра грани  $ABC$  до плоскости  $BCD$ .

3. Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  с вершиной  $S$  равны 1. Точка  $E$  — середина бокового ребра  $SC$ . Найдите расстояния: а) от точки  $A$  до прямой  $SC$ ; б) от точки  $E$  до прямой  $AB$ ; в) от точки  $E$  до прямой  $BD$ ; г) от точки  $A$  до плоскости  $BSD$ ; д) от точки  $S$  до плоскости  $BED$ .

4. Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ , все рёбра которой равны 1. Точка  $M$  — середина ребра  $BC$ . Найдите расстояния: а) от точки  $B$  до прямой  $AC_1$ ; б) от точки  $A$  до прямой  $B_1C_1$ ; в) от точки  $M$  до прямой  $A_1C_1$ ; г) от точки  $A$  до плоскости  $BCA_1$ ; д) от точки  $M$  до плоскости  $AB_1C_1$ .

5. Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ , все рёбра которой равны 1. Найдите расстояния: а) от точки  $B$  до прямой  $A_1F_1$ ; б) от точки  $B$  до прямой  $FE_1$ ; в) от точки  $B$  до прямой  $AD_1$ ; г) от точки  $A$  до прямой  $D_1F_1$ ; д) от точки  $A$  до прямой  $B_1E_1$ ; е) от точки  $A$  до плоскости  $DEA_1$ ; ж) от точки  $A$  до плоскости  $DEF_1$ ; з) от точки  $A$  до плоскости  $BFE_1$ ; и) от точки  $A$  до плоскости  $BFA_1$ ; к) от точки  $A$  до плоскости  $CEF_1$ .

6. Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  с вершиной  $S$ . Стороны основания равны 1, боковые рёбра равны 2. Точка  $G$  — середина ребра  $SC$ . Найдите расстояния: а) от точки  $S$  до прямой  $BF$ ; б) от точки  $B$  до прямой  $SA$ ; в) от точки  $F$  до прямой  $BG$ ; г) от точки  $A$  до прямой  $SD$ ; д) от точки  $A$  до прямой  $SC$ ; е) от точки  $A$  до плоскости  $SDE$ ; ж) от точки  $A$  до плоскости  $SBF$ ; з) от точки  $A$  до плоскости  $SCE$ .

### Задачи на доказательство и вычисление

4.1. В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  основание  $ABCD$  — квадрат. Точка  $M$  — центр боковой грани  $BCC_1B_1$ .

а) Докажите, что плоскость  $A_1D_1M$  делит диагональ  $AC_1$  в отношении 2 : 1, считая от точки  $A$ .

б) Найдите расстояние от точки  $M$  до прямой  $BD_1$ , если сторона основания призмы равна 6, а боковое ребро равно 3.

4.2. Дана треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$  с основаниями  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ . Точка  $M$  — центр боковой грани  $BCC_1B_1$ .

а) Постройте точку пересечения прямой  $A_1M$  с плоскостью  $ABC$ .

б) Найдите расстояние от точки  $M$  до прямой  $AB_1$ , если призма прямая,  $ABC$  — прямоугольный треугольник с прямым углом  $C$ , а диагонали боковых граней  $AA_1B_1B$  и  $BB_1C_1C$  равны 17 и 15 соответственно.

**4.3.** Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ .

а) Докажите, что плоскость  $CA_1F_1$  делит ребро  $BB_1$  пополам.

б) Найдите расстояние от точки  $C$  до прямой  $A_1F_1$ , если стороны основания призмы равны 5, а боковые рёбра равны 11.

**4.4.** Дана правильная шестиугольная пирамида  $SAB CDEF$  с вершиной  $S$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$ , проходящая через ребро  $AB$  и середину ребра  $SE$ , делит ребро  $SC$  в отношении  $2:1$ , считая от вершины  $S$ .

б) Найдите расстояние от точки  $S$  до плоскости  $\alpha$ , если сторона основания пирамиды равна  $2\sqrt{3}$ , а угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды равен  $60^\circ$ .

**4.5.** Основание пирамиды  $DABC$  — прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ . Высота пирамиды проходит через середину ребра  $AC$ , а боковая грань  $ACD$  — равносторонний треугольник.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро  $BC$  и произвольную точку  $M$  ребра  $AD$ , — прямоугольный треугольник.

б) Найдите расстояние от вершины  $D$  до этой плоскости, если  $M$  — середина ребра  $AD$ , а высота пирамиды равна 6.

**4.6.** Основание пирамиды  $SABCD$  — прямоугольник  $ABCD$ . Высота  $SH$  пирамиды лежит в плоскости  $CSD$ .

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро  $BC$  и произвольную точку  $M$  ребра  $SA$ , отличную от  $S$  и  $A$ , — прямоугольная трапеция.

б) Найдите расстояние от вершины  $S$  до этой плоскости, если  $H$  — середина ребра  $CD$ ,  $M$  — середина ребра  $SA$ ,  $SC = CD$  и  $SH = 2\sqrt{3}$ .

**4.7.** Основание пирамиды  $SABCD$  — квадрат  $ABCD$ . Боковое ребро  $SD$  перпендикулярно плоскости основания. Точка  $M$  — середина высоты пирамиды.

а) Докажите, что прямая  $SB$  параллельна плоскости  $ACM$ .

б) Найдите расстояние от точки  $B$  до плоскости  $ACM$ , если  $AB = 8$ , а угол между плоскостью  $ACM$  и плоскостью основания пирамиды равен  $45^\circ$ .

**4.8.** Основание пирамиды  $SABCD$  — прямоугольник  $ABCD$ . Боковое ребро  $SD$  перпендикулярно плоскости основания.

а) Докажите, что прямые  $SC$  и  $AD$  перпендикулярны.

б) Пусть  $M$  — середина высоты пирамиды. Найдите расстояние от точки  $B$  до плоскости  $ACM$ , если  $AB = 8$ ,  $BC = 6$ , а синус угла между плоскостью  $ACM$  и плоскостью основания пирамиды равен  $\frac{5}{6}$ .

**4.9.** Основание шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$  — правильный шестиугольник  $ABCDEF$ . Высота пирамиды втрое больше стороны основания и проходит через точку  $E$ .

а) Докажите, что угол между боковой гранью  $ASB$  и плоскостью основания равен  $60^\circ$ .

б) Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $ASB$ , если сторона основания пирамиды равна 4.

**4.10.** Основание шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  — правильный шестиугольник  $ABCDEF$  с центром  $O$ . Отрезок  $OA_1$  — высота призмы.

а) Докажите, что плоскость  $FF_1 E$  перпендикулярна плоскости основания призмы.

б) Найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $BCC_1$ , если сторона основания призмы равна  $2\sqrt{3}$ .

**4.11.** Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ .

а) Докажите, что плоскость  $ADC_1$  перпендикулярна плоскости  $FBB_1$ .

б) Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $ADC_1$ , если  $AA_1 = 4$ , а косинус угла между прямой  $AC_1$  и плоскостью  $ABC$  равен  $\frac{3}{\sqrt{13}}$ .

**4.12.** Дана правильная четырёхугольная призма  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  со стороной основания  $\sqrt{2}$  и боковым ребром 2. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $A_1 B_1$  и  $CC_1$  соответственно.

а) Докажите, что  $MN \perp BC_1$ .

б) Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости  $BC_1 D$ .

**4.13.** Основание пирамиды  $SABCD$  — равнобедренная трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ , причём  $AD = 2BC = 2AB$ . Высота  $SH$  пирамиды проходит через точку пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ .

а) Докажите, что треугольник  $SBD$  прямоугольный.

б) Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $ASD$ , если  $SH = BC = 4$ .

**4.14.** Основание пирамиды  $SABCD$  — прямоугольная трапеция  $ABCD$  с большим основанием  $AD$  и прямым углом  $D$ . Высота  $SH$  пирамиды проходит через точку пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ .

а) Докажите, что грань  $ASD$  — прямоугольный треугольник.

б) Найдите расстояние от точки  $B$  до плоскости  $ASD$ , если  $AD = 3BC = 3$ ,  $\angle BAD = 45^\circ$  и  $SH = 4$ .

**4.15.** Боковые рёбра пирамиды  $SABC$  с вершиной  $S$  попарно перпендикулярны.

а) Докажите, что высота  $SH$  пирамиды проходит через точку пересечения высот основания  $ABC$ .

б) Найдите  $SH$ , если боковые рёбра равны 2, 2 и  $7\sqrt{2}$ .

**4.16.** Боковые рёбра пирамиды  $SABC$  с вершиной  $S$  попарно перпендикулярны,  $M$  — произвольная точка на ребре  $BC$ .

а) Докажите, что плоскости  $AMS$  и  $BSC$  перпендикулярны.

б) Высота  $SH$  пирамиды равна 12. Прямая  $AH$  пересекает ребро  $BC$  в точке  $K$ . Найдите расстояние от точки  $K$  до прямой  $AS$ , если  $AS = 20$ .

**4.17.** Плоскость проходит через середины боковых рёбер  $DA$  и  $DC$  треугольной пирамиды  $DABC$  и точку пересечения медиан основания  $ABC$ .

а) Постройте точку пересечения этой плоскости с прямой  $DB$ .

б) Найдите расстояние от точки  $A$  до этой плоскости, если все рёбра пирамиды равны  $3\sqrt{6}$ .

**4.18.** Плоскость проходит через середины сторон  $AD$  и  $BC$  основания  $ABCD$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  и точку пересечения медиан боковой грани  $CSD$ .

а) Постройте точку пересечения прямой  $AS$  с этой плоскостью.

б) Найдите расстояние от точки  $B$  до этой плоскости, если все рёбра пирамиды равны  $2\sqrt{3}$ .

**4.19.** Все грани параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — равные ромбы, причём плоские углы при вершине  $C$  острые.

а) Докажите, что  $AA_1 \perp BD$ .

б) Найдите расстояние от вершины  $C$  до плоскости  $A_1 B_1 C_1$ , если плоские углы при вершине  $C$  равны  $60^\circ$ , а  $AA_1 = \sqrt{6}$ .

**4.20.** Основание наклонной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  — равносторонний треугольник  $ABC$ . Боковые грани  $AA_1 B_1 B$  и  $AA_1 C_1 C$  — равные ромбы с острым углом при общей вершине  $A$ .

а) Докажите, что боковая грань  $BB_1 C_1 C$  — квадрат.

б) Найдите расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $BB_1 C_1$ , если  $\angle CAA_1 = 60^\circ$ , а сторона основания призмы равна  $\sqrt{2}$ .

**4.21.** Основание пирамиды  $SABCD$  — параллелограмм  $ABCD$ . Боковые рёбра  $SA$  и  $SD$  равны. Точка  $M$  лежит на боковом ребре  $SC$  и не совпадает с его концами. Плоскость  $\alpha$  проходит через точку  $M$  параллельно прямым  $BC$  и  $SA$ .

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью  $\alpha$  — равнобедренная трапеция.

б) Найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\alpha$ , если боковая сторона этой трапеции равна меньшему основанию, а все рёбра пирамиды равны 1.

**4.22.** Точка  $K$  лежит на стороне  $AB$  основания  $ABCD$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$ , все рёбра которой равны. Плоскость  $\alpha$  проходит через точку  $K$  параллельно плоскости  $ASD$ . Сечение пирамиды плоскостью  $\alpha$  — четырёхугольник, в который можно вписать окружность.

а) Докажите, что  $BK = 2AK$ .

б) Найдите расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $\alpha$ , если все рёбра пирамиды равны 1.

**4.23.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  сторона основания  $AB$  равна 6, а боковое ребро  $AA_1$  равно 3. На ребре  $B_1C_1$  отмечена точка  $L$  так, что  $B_1L = 1$ . Точки  $K$  и  $M$  — середины рёбер  $AB$  и  $A_1C_1$  соответственно. Плоскость  $\gamma$  параллельна прямой  $AC$  и содержит точки  $K$  и  $L$ .

а) Докажите, что прямая  $BM$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка  $M$ , а основание — сечение данной призмы плоскостью  $\gamma$ .

**4.24.** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AB$  равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах  $AB$ ,  $CD$  и  $AS$  отмечены точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = DN = 4$  и  $AK = 3$ .

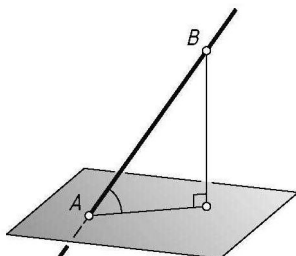
а) Докажите, что плоскости  $MNK$  и  $SBC$  параллельны.

б) Найдите расстояние от точки  $K$  до плоскости  $SBC$ .



## §5. Угол между прямой и плоскостью

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и её ортогональной проекцией на плоскость.



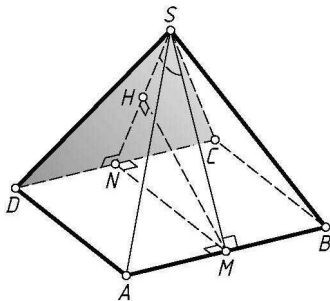
Если заменить прямую и плоскость на параллельные им прямую и плоскость, то угол между прямой и плоскостью не изменится.

Если наклонная пересекает плоскость в точке  $A$ , а  $B$  — произвольная точка этой наклонной, отличная от  $A$ , то синус угла между наклонной и плоскостью равен отношению расстояния от точки  $B$  до плоскости к длине отрезка  $AB$ . Задача на вычисление угла между наклонной и плоскостью чаще всего сводится в нахождению расстояния от точки до плоскости (см. предыдущую главу).

**Пример 1.** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  апофема равна стороне основания. Найдите угол между плоскостью  $CSD$  и апофемой пирамиды, содержащейся в плоскости  $ASB$ .

*Ответ:*  $60^\circ$ .

**Решение.** Пусть  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AB$  и  $CD$  соответственно. Проведём высоту  $MN$  равнобедренного треугольника  $MSN$ . Прямая  $MN$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $SN$  и  $CD$  плоскости  $CSD$ , значит,  $MN$  — перпендикуляр к этой плоскости,  $SH$  —

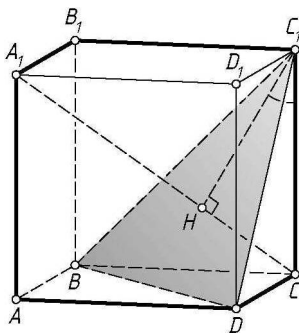


ортогональная проекция наклонной  $MS$  на плоскость  $CSD$ , а  $MSN$  — угол между наклонной  $MS$  и этой плоскостью. Поскольку  $MN=MS=NS$ , треугольник  $MSN$  равносторонний. Следовательно,  $\angle MSN = 60^\circ$ .  $\triangleleft$

**Пример 2.** В кубе  $ABCA_1B_1C_1D_1$  найдите угол между ребром  $AA_1$  и плоскостью  $BC_1D$ .

*Ответ:*  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**Решение.** Поскольку  $AA_1 \parallel CC_1$ , искомый угол равен углу между наклонной  $CC_1$  и плоскостью  $BC_1D$ .



Пусть ребро куба равно  $a$ , а диагональ  $CA_1$  пересекает плоскость  $BC_1D$  в точке  $H$ . Диагональ  $CA_1$  перпендикулярна плоскости  $BC_1D$ , поэтому  $C_1H$  — ортогональная проекция наклонной  $CC_1$  на эту плоскость, а искомый угол — это угол  $CC_1H$ . Кроме того, диагональ  $CA_1$  делится плоскостью  $BC_1D$  в отношении  $1:2$ , считая от вершины  $C$ . Из прямоугольного треугольника  $CHC_1$  находим, что

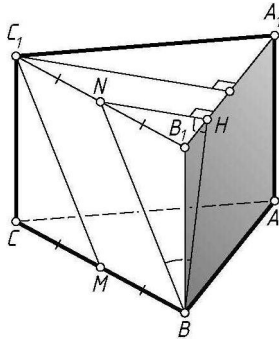
$$\sin \angle CC_1H = \frac{CH}{CC_1} = \frac{\frac{1}{3}CA_1}{CC_1} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Следовательно,  $\angle CC_1H = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$ .  $\triangleleft$

**Пример 3.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  боковое ребро относится к стороне основания как  $1:\sqrt{2}$ . Точка  $M$  — середина ребра  $BC$ . Найдите угол между прямой  $C_1M$  и плоскостью  $AA_1B_1$ .

*Ответ:*  $30^\circ$ .

**Решение.** Пусть  $N$  — середина ребра  $B_1C_1$ . Тогда  $VMC_1N$  — параллелограмм, поэтому  $NB \parallel C_1M$ . Значит, искомый угол — это угол между наклонной  $NB$  и плоскостью  $AA_1B_1$ .



Опустим перпендикуляр  $NH$  из точки  $N$  на прямую  $A_1B_1$ . Поскольку  $NH \perp A_1B_1$  и  $NH \perp AA_1$ , прямая  $NH$  перпендикулярна плоскости  $AA_1B_1$ . Значит, искомый угол равен углу  $NBH$ .

Пусть  $CC_1 = a$ , тогда  $A_1B_1 = a\sqrt{2}$ . Перпендикуляр  $NH$  вдвое меньше высоты равностороннего треугольника  $A_1B_1C_1$ , проведённой из вершины  $C_1$ , т. е.

$$NH = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Из прямоугольного треугольника  $BB_1N$  находим, что

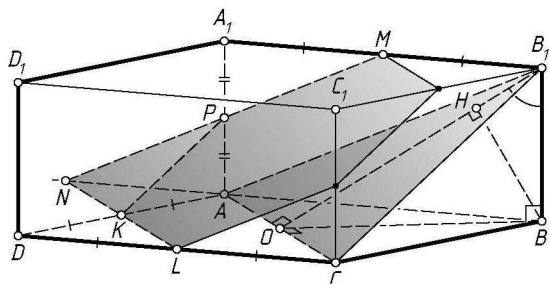
$$BN = \sqrt{NB_1^2 + BB_1^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Значит,  $NH = \frac{1}{2}BN$ . Следовательно,  $\angle NBH = 30^\circ$ .  $\triangleleft$

**Пример 4.** Пусть  $ABCA_1B_1C_1D_1$  — правильная четырёхугольная призма с основанием  $ABCD$ . Точки  $K, L, M$  — середины рёбер  $AD, CD, A_1B_1$  соответственно. Найдите угол между прямой  $BB_1$  и плоскостью  $KLM$ , если  $AA_1 : AB = 1 : \sqrt{6}$ .

*Ответ:*  $60^\circ$ .

**Решение.** Пусть прямые  $KL$  и  $AB$  пересекаются в точке  $N$ , а прямая  $MN$  пересекает ребро  $AA_1$  в точке  $P$ . Тогда точка  $P$  лежит в плоскости  $KLM$ , причём треугольник  $AKN$  равен треугольнику  $DKL$ , а треугольник  $APN$  — треугольнику  $A_1PM$ . Значит,  $P$  — середина ребра  $AA_1$ . Отрезки  $KL$  и  $PM$  — средние линии треугольников  $ADC$  и  $AA_1B_1$  соответственно, поэтому  $KL \parallel AC$  и  $PM \parallel AB_1$ , т. е. две пересекающиеся прямые  $AC$  и  $AB_1$  плоскости  $AB_1C$  соответственно параллельны двум пересекающимся прямым  $KL$  и  $PM$  плоскости  $KLM$ . Следовательно, эти плоскости параллельны, а значит, угол между



прямой  $BB_1$  и плоскостью  $KLM$  равен углу между этой прямой и плоскостью  $AB_1C$ .

Пусть  $O$  — центр квадрата  $ABCD$ , а  $BH$  — высота прямоугольного треугольника  $OBB_1$ . Тогда  $BH$  — перпендикуляр к плоскости  $AB_1C$ ,  $HB_1$  — ортогональная проекция наклонной  $BB_1$  на эту плоскость, а  $\angle BB_1H$  — угол между прямой  $BB_1$  и этой плоскостью.

Пусть  $BB_1 = AA_1 = a$ , тогда  $AB = a\sqrt{2}$  и

$$BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} = a\sqrt{2}.$$

Значит,

$$\operatorname{tg} \angle BB_1H = \operatorname{tg} \angle BB_1O = \frac{BO}{BB_1} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}.$$

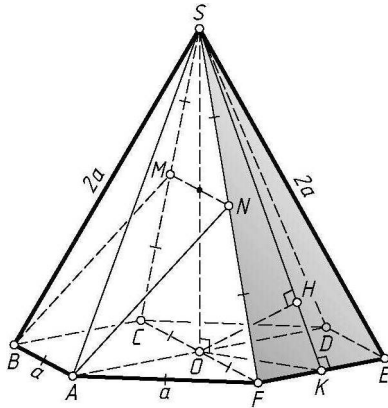
Следовательно,  $\angle BB_1H = 45^\circ$ . ◁

**Пример 5.** Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$  вдвое больше стороны основания  $ABCDEF$ . Точка  $M$  — середина бокового ребра  $SC$ . Найдите угол между прямой  $BM$  и плоскостью  $ESF$ .

Ответ:  $\arcsin \frac{\sqrt{10}}{5}$ .

**Решение.** Обозначим  $AB = a$ ,  $SC = 2a$ . Пусть  $O$  — центр основания пирамиды,  $N$  — середина бокового ребра  $SF$ . Тогда  $MN$  — средняя линия равностороннего треугольника  $CSF$ . Поэтому  $MN \parallel CF \parallel AB$  и  $MN = \frac{1}{2}CF = AB = a$ . Значит,  $ABMN$  — параллелограмм, поэтому  $AN = BM$  и  $AN \parallel BM$ . Следовательно, угол между прямой  $BM$  и плоскостью  $ASF$  равен углу между этой плоскостью и прямой  $AN$ .

Прямая  $OA$  параллельна плоскости  $ESF$ , значит, расстояние от точки  $A$  до плоскости  $ESF$  равно расстоянию до этой плоскости от точки  $O$ . Пусть  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на медиану  $SK$  треугольника  $ESF$ . Тогда  $OH$  — перпендикуляр к плоскости  $ESF$ . Значит, синус искомого угла равен отношению  $\frac{OH}{AN}$ .



Рассмотрим прямоугольный треугольник  $SOK$ , в котором

$$SO = \frac{CF\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}, \quad OK = \frac{OF\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

Отрезок  $OH$  — высота этого треугольника, проведённая из вершины прямого угла, поэтому

$$OH = \frac{SO \cdot OK}{SK} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{15}}{2}} = \frac{3a}{\sqrt{15}}.$$

По формуле для медианы треугольника

$$AN = \frac{1}{2} \sqrt{2SA^2 + 2AF^2 - SF^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 4a^2 + 2a^2 - 4a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Пусть искомый угол равен  $\alpha$ . Тогда

$$\sin \alpha = \frac{OH}{AN} = \frac{\frac{3a}{\sqrt{15}}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}. \quad \triangleleft$$

### Подготовительные задачи

1. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите углы: а) между прямой  $AC_1$  и плоскостью  $BDD_1$ ; б) между прямой  $AB$  и плоскостью  $CB_1 D_1$ ; в) между прямой  $DD_1$  и плоскостью  $ACB_1$ ; г) между прямой  $AC$  и плоскостью  $BCD_1$ .

2. Дан правильный тетраэдр  $ABCD$ . Точки  $K$ ,  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $BD$ ,  $AB$  и  $AC$  соответственно. Найдите углы: а) между прямой  $CD$  и плоскостью  $ABD$ ; б) между прямой  $DM$  и плоскостью  $ADC$ ;

в) между прямой  $KN$  и плоскостью  $ADC$ ; г) между прямой  $BD$  и плоскостью  $KMN$ .

3. Дана правильная четырёхугольная пирамида  $SABCD$  с вершиной  $S$ . Все рёбра пирамиды равны,  $M$  — середина бокового ребра  $SD$ . Найдите углы: а) между прямой  $AM$  и плоскостью  $ABC$ ; б) между прямой  $BD$  и плоскостью  $BSC$ ; в) между прямой  $BM$  и плоскостью  $ASD$ ; г) между прямой  $SA$  и плоскостью  $CSD$ .

4. Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ , все рёбра которой равны 1. Точка  $M$  — середина ребра  $BC$ . Найдите углы: а) между прямой  $A_1M$  и плоскостью  $ABC$ ; б) между прямой  $BB_1$  и плоскостью  $AB_1C_1$ ; в) между прямой  $C_1M$  и плоскостью  $ABB_1$ ; г) между прямой  $AA_1$  и плоскостью  $A_1C_1M$ .

5. Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ , все рёбра которой равны 1. Найдите углы: а) между прямой  $AA_1$  и плоскостью  $BCE_1$ ; б) между прямой  $BC_1$  и плоскостью  $AFF_1$ ; в) между прямой  $BD_1$  и плоскостью  $ABB_1$ ; г) между прямой  $BE_1$  и плоскостью  $ABB_1$ .

6. Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  с вершиной  $S$ . Сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Найдите углы: а) между прямой  $BC$  и плоскостью  $ASF$ ; б) между прямой  $AB$  и плоскостью  $BSC$ ; в) между прямой  $SA$  и плоскостью  $BSC$ ; г) между прямой  $AC$  и плоскостью  $CSD$ .

### Задачи на доказательство и вычисление

5.1. Основание треугольной пирамиды  $DABC$  — прямоугольный треугольник  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ). Высота пирамиды проходит через точку  $C$ .

а) Докажите, что противоположные рёбра пирамиды попарно перпендикулярны.

б) Найдите углы, которые образуют боковые рёбра  $DA$  и  $DB$  с плоскостью основания, если  $AC = 15$ ,  $BC = 20$ , а угол между плоскостями  $ABC$  и  $ABD$  равен  $45^\circ$ .

5.2. Высота  $PC$  треугольной пирамиды  $PABC$  с вершиной  $P$  проходит через точку  $C$ . Прямые  $PA$  и  $BC$  перпендикулярны.

а) Докажите, что основание пирамиды — прямоугольный треугольник.

б) Найдите углы, которые образуют боковые рёбра  $PA$  и  $PB$  с плоскостью основания, если  $AC = 6$ ,  $BC = 8$ , а расстояние от точки  $P$  до прямой  $AB$  равно 5.

**5.3.** Дана треугольная пирамида  $SABC$  с основанием  $ABC$ ;  $O$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ .

а) Докажите, что плоскость, проходящая через прямую  $AB$  и середину отрезка  $SO$ , делит боковое ребро  $SC$  в отношении  $1 : 3$ , считая от вершины  $S$ .

б) Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды, если пирамида правильная, а её высота составляет  $\frac{4}{5}$  от высоты  $SM$  боковой грани  $SAB$ .

**5.4.** Дана треугольная пирамида  $SABC$ ;  $O$  — точка пересечения медиан основания  $ABC$ .

а) Докажите, что плоскость, проходящая через прямую  $AB$  и середину  $M$  ребра  $SC$ , делит отрезок  $SO$  в отношении  $3 : 1$ , считая от вершины  $S$ .

б) Найдите угол между прямой  $BC$  и плоскостью  $ABM$ , если пирамида правильная, а угол между прямой, проходящей через точку  $M$  и середину ребра  $AB$ , и прямой  $SO$  равен  $45^\circ$ .

**5.5.** Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , в котором  $AD = 2$ ,  $AA_1 = 4$ ,  $AB = 2\sqrt{15}$ . Точка  $M$  — середина ребра  $C_1 D_1$ , точка  $N$  лежит на ребре  $AA_1$ , причём  $AN = 3$ .

а) Докажите, что  $MN \perp CB_1$ .

б) Найдите угол между прямой  $MN$  и плоскостью грани  $BB_1 C_1 C$ .

**5.6.** Дана прямая призма  $ABCA_1 B_1 C_1$ , основание которой — прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$  и катетом  $BC$ , вдвое большим бокового ребра призмы. Точка  $M$  — середина ребра  $A_1 C_1$ , точка  $N$  лежит на ребре  $BC$ , причём  $CN : NB = 1 : 3$ .

а) Докажите, что  $MN \perp CB_1$ .

б) Найдите угол между прямой  $MN$  и плоскостью основания  $A_1 B_1 C_1$ , если  $AA_1 : AB = 1 : \sqrt{7}$ .

**5.7.** Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1 B_1 C_1$  с основаниями  $ABC$  и  $A_1 B_1 C_1$ . Скрещивающиеся диагонали  $BA_1$  и  $CB_1$  боковых граней  $AA_1 B_1 B$  и  $BB_1 C_1 C$  перпендикулярны.

а) Докажите, что  $AB : AA_1 = \sqrt{2} : 1$ .

б) Найдите угол между прямой  $BA_1$  и плоскостью  $BCC_1$ .

**5.8.** Дана правильная четырёхугольная призма  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с основаниями  $ABCD$  и  $A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точка  $M$  — середина ребра  $B_1 C_1$ . Прямые  $CA_1$  и  $BM$  перпендикулярны.

а) Докажите, что диагональ основания призмы вдвое больше бокового ребра.

б) Найдите угол между прямой  $CA_1$  и плоскостью  $BCC_1$ .

5.9. Дана четырёхугольная пирамида  $SABCD$ , основание которой — параллелограмм  $ABCD$ . Точка  $K$  — середина медианы  $SM$  грани  $CSD$ ,  $N$  — середина ребра  $AB$ .

а) Постройте точку пересечения прямой  $KN$  с плоскостью  $ASC$ .

б) Найдите угол между прямой  $KN$  и плоскостью  $ASC$ , если пирамида правильная, а её боковые грани образуют с плоскостью основания углы, равные  $60^\circ$ .

5.10. Дана треугольная пирамида  $DABC$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $BC$  и  $AD$ ,  $L$  — середина ребра  $AB$ .

а) Постройте точку пересечения прямой  $MN$  с плоскостью  $CDL$ .

б) Найдите угол между прямой  $MN$  и плоскостью  $CDL$ , если пирамида правильная, а угол между её боковым ребром и плоскостью основания  $ABC$  равен  $60^\circ$ .

5.11. Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  с вершиной  $S$ . Точка  $M$  — середина ребра  $SD$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки  $A$ ,  $B$  и  $M$ .

б) Найдите угол между прямой  $AM$  и плоскостью  $CSF$ , если  $AB:SA = 1:\sqrt{19}$ .

5.12. Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  с вершиной  $S$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую  $AB$  и середину высоты  $SH$  пирамиды.

б) Пусть  $K$  — точка пересечения этой плоскости с ребром  $SC$ . Найдите угол между прямой  $BK$  и плоскостью  $ASB$ , если  $AB:AS = 1:2$ .

5.13. Точка  $M$  — середина ребра  $AB$  правильного тетраэдра  $DABC$ .

а) Докажите, что ортогональная проекция точки  $M$  на плоскость  $ACD$  лежит на медиане  $AP$  грани  $ACD$ .

б) Найдите угол между прямой  $DM$  и плоскостью  $ACD$ .

5.14. Дана правильная четырёхугольная пирамида  $SABCD$  с вершиной  $S$ . Все рёбра пирамиды равны. Точка  $M$  — середина ребра  $BC$ .

а) Докажите, что ортогональная проекция середины ребра  $AB$  на плоскость  $CSD$  делит медиану  $SN$  этой грани в отношении  $1:2$ , считая от вершины  $S$ .

б) Найдите угол между прямой  $SM$  и плоскостью  $CSD$ .

5.15. Основание  $ABCD$  призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  — равнобедренная трапеция с основаниями  $AB$  и  $CD$ . Боковые стороны равны меньшему основанию  $CD$ , а их продолжения пересекаются под углом  $60^\circ$ .

а) Плоскость  $CA_1D_1$  пересекает ребро  $AB$  в точке  $M$ . Докажите, что прямая  $D_1M$  проходит через середину диагонали  $A_1C$ .



б) Найдите угол между боковым ребром  $BB_1$  и плоскостью  $CA_1D_1$ , если призма прямая, а  $AA_1 : AD = \sqrt{3} : 2$ .

**5.16.** Основание  $ABCD$  призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  — трапеция с основаниями  $AB = 2CD$ .

а) Докажите, что плоскость  $BA_1D_1$  проходит через середину бокового ребра  $CC_1$ .

б) Найдите угол между боковым ребром  $AA_1$  и этой плоскостью, если призма прямая, трапеция  $ABCD$  прямоугольная с прямым углом при вершине  $B$ , а  $BC = CD$  и  $AA_1 = \sqrt{6}CD$ .

**5.17.** Точка  $M$  — середина медианы  $BK$  основания  $ABC$  правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ , а  $N$  — центр боковой грани  $AA_1B_1B$ .

а) Постройте точку пересечения прямой  $MN$  с плоскостью  $A_1B_1C_1$ .

б) Найдите угол между прямой  $MN$  и плоскостью грани  $BB_1C_1C$ , если известно, что  $\frac{AB}{AA_1} = 2\sqrt{2}$ .

**5.18.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  точка  $N$  — центр боковой грани  $AA_1B_1B$ , а  $M$  — точка пересечения медиан основания  $ABC$ .

а) Постройте точку пересечения прямой  $MN$  с плоскостью  $A_1B_1C_1$ .

б) Найдите угол между прямой  $MN$  и плоскостью  $BB_1C_1C$ , если известно, что  $\frac{AB}{AA_1} = 2\sqrt{3}$ .

**5.19.** Основания  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  призмы  $ABCA_1B_1C_1$  — равносторонние треугольники. Отрезок, соединяющий центр  $O$  основания  $ABC$  с серединой ребра  $A_1B_1$ , перпендикулярен основаниям призмы.

а) Докажите, что грань  $ABB_1A_1$  — прямоугольник.

б) Найдите угол между прямой  $BC$  и плоскостью  $ABC_1$ , если высота призмы равна стороне основания.

**5.20.** Основания  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  призмы  $ABCA_1B_1C_1$  — равносторонние треугольники. Отрезок, соединяющий центр  $O$  основания  $ABC$  с вершиной  $C_1$ , перпендикулярен основаниям призмы.

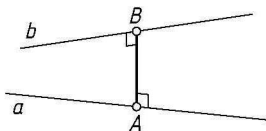
а) Докажите, что плоскости  $ABC_1$  и  $OCC_1$  перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямой  $AA_1$  и плоскостью  $ABC_1$ , если боковое ребро призмы равно стороне основания.

## § 6. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстоянием между двумя фигурами называется расстояние между ближайшими точками этих фигур.

Общим перпендикуляром скрещивающихся прямых  $a$  и  $b$  называется отрезок, концы  $A$  и  $B$  которого лежат на прямых  $a$  и  $b$  соответственно и который перпендикулярен обеим прямым.



В школьном курсе стереометрии доказывается, что для любых двух скрещивающихся прямых существует общий перпендикуляр, и притом только один, а расстояние между этими прямыми равно длине их общего перпендикуляра.

Вот несколько способов вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми  $a$  и  $b$ .

1. Через точку  $A$  прямой  $a$  проводится прямая  $b'$ , параллельная  $b$ . Тогда расстояние между прямыми равно расстоянию от любой точки  $B$  прямой  $b$  до плоскости, проходящей через пересекающиеся прямые  $a$  и  $b'$ .

2. Построение общего перпендикуляра и вычисление его длины.

3. Вычисление расстояния между двумя параллельными плоскостями, содержащими прямые  $a$  и  $b$  соответственно.

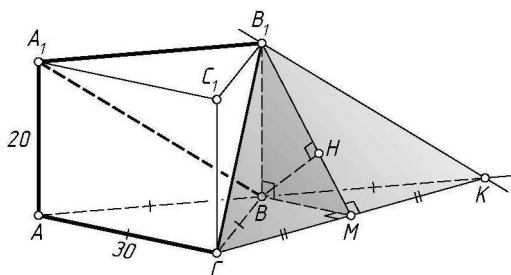
4. Применение формулы для объёма тетраэдра:  $V = \frac{1}{6}abh \sin \alpha$ , где  $V$  — объём тетраэдра,  $a$  и  $b$  — длины его противолежащих рёбер,  $h$  — расстояние между прямыми, содержащими эти рёбра,  $\alpha$  — угол между этими прямыми.

5. Метод координат (см. приложение).

**Пример 1.** Сторона основания  $ABC$  правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  равна 30, боковое ребро равно 20. Найдите расстояние между прямыми  $BA_1$  и  $CB_1$ .

*Ответ:* 12.

**Решение.** Через вершину  $B_1$  проведём прямую, параллельную  $BA_1$ . Пусть  $K$  — точка пересечения проведённой прямой с прямой  $AB$ . Тогда  $BA_1B_1K$  — параллелограмм, поэтому  $KB_1 \parallel BA_1$  и  $KB_1 = BA_1 = CB_1$ . Поскольку прямая  $BA_1$  параллельна плоскости  $KB_1C$ , расстояние между прямыми  $BA_1$  и  $CB_1$  равно расстоянию от любой



точки прямой  $BA_1$  до плоскости  $KB_1C$ . Найдём расстояние от точки  $B$  до этой плоскости.

Пусть  $B_1M$  — высота равнобедренного треугольника  $KB_1C$ . Тогда  $BM$  — высота равнобедренного треугольника  $KBC$ , значит, высота  $BH$  прямоугольного треугольника  $MBB_1$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $B_1M$  и  $KC$  плоскости  $KB_1C$ . Следовательно,  $BH$  — перпендикуляр к этой плоскости.

Отрезок  $BM$  — средняя линия треугольника  $AKC$ , поэтому  $BM = \frac{1}{2}AC = 15$ . По теореме Пифагора

$$MB_1 = \sqrt{BM^2 + BB_1^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25.$$

Следовательно,

$$BH = \frac{BM \cdot BB_1}{MB_1} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12. \quad \triangleleft$$

**Пример 2.** Сторона основания  $ABCDEF$  правильной шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$  равна 4, высота  $SO$  равна 6. Найдите расстояние между прямыми  $AF$  и  $SC$ .

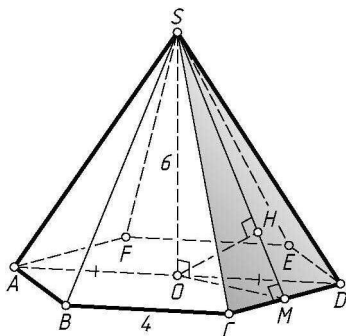
*Ответ:* 6.

**Решение.** Поскольку ребро  $AF$  параллельно ребру  $CD$ , прямая  $AF$  параллельна плоскости  $CSD$ , поэтому расстояние между прямыми  $AF$  и  $SC$  равно расстоянию от любой точки прямой  $AF$  до плоскости  $CSD$ . Точка  $O$  — середина наклонной  $AD$  к плоскости  $CSD$ , поэтому расстояние от точки  $A$  до плоскости  $CSD$  вдвое больше расстояния до этой плоскости от точки  $O$ .

Пусть  $SM$  — высота равнобедренного треугольника  $CSD$ , а  $OH$  — высота прямоугольного треугольника  $SOM$ . Тогда  $OH$  — перпендикуляр к плоскости  $SCD$ .

В прямоугольном треугольнике  $SOM$  известно, что

$$SO = 6, \quad OM = \frac{OC\sqrt{3}}{2} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}, \quad \operatorname{tg} \angle OSM = \frac{OM}{SO} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Значит,  $\angle OSM = 30^\circ$ , поэтому

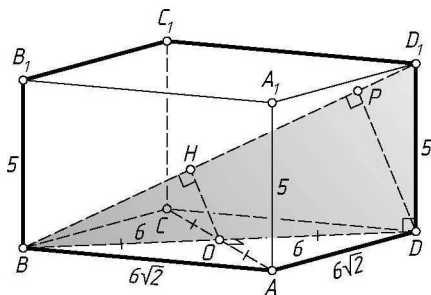
$$OH = \frac{1}{2}SO = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3.$$

Следовательно, расстояние от точки  $A$  до плоскости  $CSD$ , а значит, и расстояние между прямыми  $AF$  и  $SC$  равно 6.  $\triangleleft$

**Пример 3.** Основание прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — квадрат  $ABCD$  со стороной  $6\sqrt{2}$ . Боковое ребро призмы равно 5. Найдите расстояние между прямыми  $AC$  и  $BD_1$ .

Ответ:  $\frac{30}{13}$ .

**Решение.** Опустим перпендикуляр  $OH$  из центра  $O$  квадрата  $ABCD$  на прямую  $BD_1$ . Прямая  $AC$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $BD$  и  $DD_1$  плоскости  $BDD_1$ , значит, прямая  $AC$  перпендикулярна этой плоскости. Следовательно, прямая  $AC$  перпендикулярна  $OH$ , и поэтому  $OH$  — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых  $AC$  и  $BD_1$ .



Пусть  $DP$  — высота прямоугольного треугольника  $BDD_1$  с катетами

$$DD_1 = 5, \quad BD = AB\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 12$$

и гипотенузой

$$BD_1 = \sqrt{DD_1^2 + BD^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

Тогда

$$DP = \frac{DD_1 \cdot BD}{BD_1} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13},$$

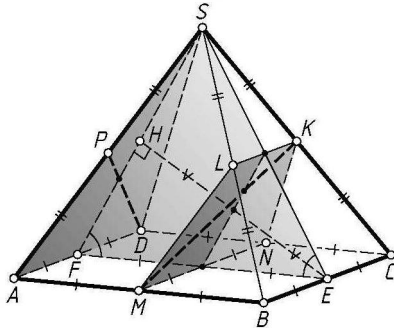
а поскольку  $OH$  — средняя линия треугольника  $PBD$ , получаем

$$OH = \frac{1}{2}DP = \frac{30}{13}. \quad \triangleleft$$

**Пример 4.** Дана правильная четырёхугольная пирамида  $SABCD$  с вершиной  $S$ . Точки  $M$ ,  $K$  и  $P$  — середины рёбер  $AB$ ,  $SC$  и  $SA$  соответственно. Найдите расстояние между прямыми  $MK$  и  $DP$ , если сторона основания пирамиды равна  $4\sqrt{3}$ , а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен  $60^\circ$ .

*Ответ:* 3.

**Решение.** Пусть  $L$  и  $N$  — середины рёбер  $SB$  и  $CD$  соответственно. Тогда  $MN \parallel BC \parallel KL$ , значит, точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  лежат в одной плоскости. Эта плоскость параллельна плоскости  $ASD$ , так как две пересекающиеся прямые  $MN$  и  $ML$  одной из этих плоскостей соответственно параллельны двум пересекающимся прямым  $AD$  и  $AS$  другой. Следовательно, расстояние между скрещивающимися прямыми  $MK$  и  $DP$  равно расстоянию между этими плоскостями.



Пусть  $E$  и  $F$  — середины рёбер  $BC$  и  $AD$  соответственно. Тогда  $\angle FES = 60^\circ$ , поэтому треугольник  $ESF$  равносторонний. Его высота  $EH$  — перпендикуляр к плоскости  $ASD$ , а значит, и к параллельной ей плоскости  $KLM$ . Эта высота делится пополам плоскостью  $KLM$ , следовательно, расстояние между этими плоскостями вдвое меньше  $EH$ , т. е. равно

$$\frac{1}{2}EH = \frac{1}{2} \cdot \frac{FE\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3. \quad \triangleleft$$

**Пример 5.** Сторона основания  $ABC$  правильной треугольной пирамиды  $DABC$  равна 12. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AB$  и  $BC$  соответственно,  $DM = 4\sqrt{3}$ . Найдите расстояние между прямыми  $DM$  и  $AN$ .

Ответ:  $\frac{6}{\sqrt{5}}$ .

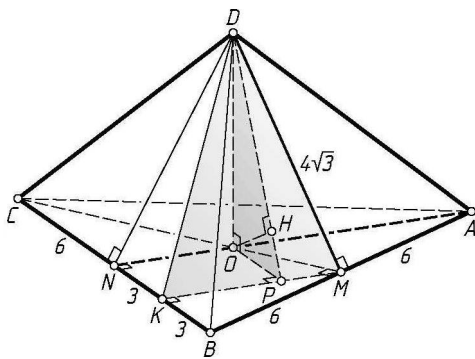
**Решение.** *Первый способ.* Пусть  $O$  — центр основания пирамиды. Тогда

$$CM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}, \quad OM = \frac{1}{3}CM = 2\sqrt{3},$$

$$DO = \sqrt{DM^2 - OM^2} = \sqrt{48 - 12} = 6.$$

Пусть  $K$  — середина отрезка  $BN$ . Тогда  $MK$  — средняя линия прямоугольного треугольника  $ANB$ , поэтому  $MK \parallel AN$ . Пусть  $P$  — проекция точки  $O$  на прямую  $MK$ ; так как  $OP \parallel BC$ , то  $OPKN$  — прямоугольник, значит,  $OP = NK = 3$ .

Прямая  $AN$  параллельна прямой  $MK$ , лежащей в плоскости  $DMK$ , значит, прямая  $AN$  параллельна этой плоскости, а расстояние между прямыми  $AN$  и  $DM$  равно расстоянию от любой точки прямой  $AN$  до плоскости  $DMK$ , например от точки  $O$ .



Рассмотрим прямоугольный треугольник  $DPO$ , в нём  $OP = 3$ ,  $DO = 6$ , поэтому  $DP = \sqrt{DO^2 + OP^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ . Пусть  $OH$  — высота этого треугольника, опущенная из вершины прямого угла при вершине  $O$ . Тогда  $OH$  — перпендикуляр к плоскости  $DMK$ , а искомое расстояние  $d$  равно длине отрезка  $OH$ . Следовательно,

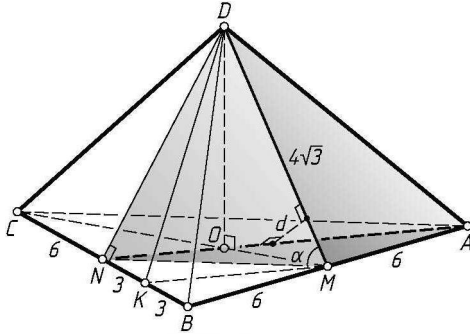
$$d = OH = \frac{OP \cdot DO}{DP} = \frac{3 \cdot 6}{3\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Второй способ. Пусть  $O$  — центр основания пирамиды. Тогда

$$CM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}, \quad OM = \frac{1}{3}CM = 2\sqrt{3},$$

$$DO = \sqrt{DM^2 - OM^2} = \sqrt{48 - 12} = 6.$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = \frac{1}{3} \cdot \frac{144 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 6 = 72\sqrt{3}.$$



Пусть  $K$  — середина отрезка  $BN$ . Тогда  $MK$  — средняя линия прямоугольного треугольника  $ANB$ , поэтому

$$MK = \frac{1}{2}AN = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3},$$

$$DK^2 = DN^2 + KN^2 = 48 + 9 = 57.$$

Обозначим  $\angle DMK = \alpha$ . По теореме косинусов

$$\cos \alpha = \frac{DM^2 + MK^2 - DK^2}{2DM \cdot MK} = \frac{48 + 27 - 57}{2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{1}{4}.$$

Тогда  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ .

Объём треугольной пирамиды  $DAMN$  в четыре раза меньше объёма данной пирамиды, так как площадь основания  $AMN$  в четыре раза меньше площади треугольника  $ABC$ , а высота  $DO$  — та же, что у исходной пирамиды. Таким образом,  $V_{DAMN} = 18\sqrt{3}$ . С другой стороны, если  $d$  — искомое расстояние между прямыми  $DM$  и  $AN$ , то

$$V_{DAMN} = \frac{1}{6}DM \cdot AN \cdot d \sin \alpha,$$

или

$$18\sqrt{3} = \frac{1}{6} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot d \cdot \frac{\sqrt{15}}{4},$$

откуда находим, что  $d = \frac{6}{\sqrt{5}}$ .

◁

## Подготовительные задачи

1. Дан единичный куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите расстояния между прямыми: а)  $AB$  и  $DD_1$ ; б)  $A_1 A$  и  $BD_1$ ; в)  $BD_1$  и  $CB_1$ ; г)  $BA_1$  и  $CB_1$ .

2. Рёбра правильного тетраэдра  $ABCD$  равны 1. Точки  $K$ ,  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $BD$ ,  $AB$  и  $AC$  соответственно. Найдите расстояния между прямыми: а)  $BD$  и  $AC$ ; б)  $KM$  и  $AC$ ; в)  $AB$  и  $KN$ ; г)\*  $DM$  и  $BC$ ; д)\*  $AK$  и  $CM$ ; е)\*  $AK$  и  $BN$ .

3. Дана правильная четырёхугольная пирамида  $SABCD$  с вершиной  $S$ . Все рёбра пирамиды равны 1,  $M$  — середина бокового ребра  $SD$ . Найдите расстояния между прямыми: а)  $SB$  и  $AC$ ; б)  $SA$  и  $BC$ ; в)  $AD$  и  $SC$ ; г)  $SB$  и  $CM$ .

4. Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1 B_1 C_1$ , все рёбра которой равны 1. Точка  $M$  — середина  $AC$ . Найдите расстояния между прямыми: а)  $CC_1$  и  $AB$ ; б)  $AB$  и  $CB_1$ ; в)  $AB_1$  и  $BC_1$ ; г)  $BM$  и  $AC_1$ .

5. Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , все рёбра которой равны 1. Найдите расстояния между прямыми: а)  $AE_1$  и  $DB_1$ ; б)  $BB_1$  и  $EF_1$ ; в)  $AA_1$  и  $CF_1$ ; г)  $AB_1$  и  $CD_1$ ; д)  $BE$  и  $DB_1$ .

6. Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  с вершиной  $S$ . Сторона основания равна 1, боковое ребро равно 2. Найдите расстояния между прямыми: а)  $SB$  и  $AF$ ; б)  $SB$  и  $AE$ ; в)  $SB$  и  $DF$ ; г)  $SB$  и  $AD$ .

## Задачи на доказательство и вычисление

6.1. Дана правильная треугольная пирамида  $DABC$  с вершиной  $D$ .

а) Докажите, что её сечение плоскостью, проходящей через середину ребра  $AB$  параллельно прямым  $AD$  и  $BC$ , — прямоугольник.

б) Найдите расстояние между противоположными рёбрами, если сторона основания равна  $6\sqrt{3}$ , а боковое ребро равно 10.

6.2. Дана правильная четырёхугольная пирамида  $SABCD$  с вершиной  $S$ .

а) Постройте её сечение плоскостью, проходящей через середину ребра  $AB$  параллельно прямым  $SA$  и  $BC$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $AB$  и  $SC$ , если сторона основания равна 30, а боковое ребро равно  $5\sqrt{34}$ .

6.3. Основание прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — квадрат  $ABCD$ .

а) Докажите, что прямые  $BD_1$  и  $AC$  перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если стороны основания параллелепипеда равны 3, а боковые рёбра равны 6.



**6.4.** Основание прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  — прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом при вершине  $A$ , а боковая грань  $AA_1C_1C$  — квадрат.

а) Докажите, что прямые  $CB_1$  и  $AC_1$  перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если  $AC = 2$ ,  $AB_1 = 2\sqrt{3}$ .

**6.5.** Основание пирамиды  $SABCD$  — ромб  $ABCD$  с углом  $60^\circ$  при вершине  $A$ . Боковое ребро  $SD$  перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания.

а) Докажите, что прямые  $AC$  и  $SB$  перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если сторона основания пирамиды равна  $2\sqrt{2}$ .

**6.6.** Основание прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — ромб  $ABCD$  с углом  $120^\circ$  при вершине  $D$ , а боковые грани призмы — квадраты.

а) Докажите, что прямые  $A_1C$  и  $BD$  перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если сторона основания призмы равна  $8\sqrt{3}$ .

**6.7.** Основание пирамиды  $SABCD$  — квадрат  $ABCD$ . Боковое ребро  $SA$  перпендикулярно плоскости основания.

а) Докажите, что плоскости  $ASD$  и  $CSD$  перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми  $SC$  и  $BD$ , если сторона основания равна 2, а высота пирамиды равна  $2\sqrt{2}$ .

**6.8.** Основание пирамиды  $SABCD$  — квадрат  $ABCD$ . Боковое ребро  $SA$  перпендикулярно плоскости основания, а треугольник  $BSD$  равносторонний.

а) Докажите, что высота пирамиды равна стороне основания.

б) Найдите расстояние между прямыми  $SC$  и  $BD$ , если сторона основания равна  $2\sqrt{3}$ .

**6.9.** Основание пирамиды  $DABC$  — треугольник  $ABC$  со сторонами  $AC = 6$ ,  $BC = 8$ ,  $AB = 10$ . Все боковые рёбра равны.

а) Докажите, что высота пирамиды проходит через середину отрезка  $AB$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $DM$  и  $BC$ , где  $DM$  — высота пирамиды  $DABC$ .

**6.10.** Основание пирамиды  $DABC$  — прямоугольный треугольник  $ABC$  с гипотенузой  $AB$ . Все боковые рёбра образуют равные углы плоскостью основания.

а) Докажите, что высота пирамиды проходит через середину отрезка  $AB$ .

б) Известно, что  $AB = 18$ ,  $AC = 6$ . Найдите расстояние между прямыми  $DM$  и  $CH$ , где  $DM$  — высота пирамиды  $DABC$ ,  $CH$  — высота треугольника  $ABC$ .

**6.11.** Боковая грань правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  с вершиной  $S$  образует с плоскостью основания угол  $45^\circ$ . Точка  $M$  — середина бокового ребра  $SD$ .

а) Докажите, что противоположные боковые грани пирамиды перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми  $AB$  и  $CM$ , если сторона основания пирамиды равна  $\sqrt{2}$ .

**6.12.** Боковая грань правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  с вершиной  $S$  образует с плоскостью основания угол  $60^\circ$ . Точка  $M$  — середина бокового ребра  $SD$ .

а) Докажите, что плоскости  $AMB$  и  $CSD$  перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми  $AB$  и  $CM$ , если сторона основания пирамиды равна  $4\sqrt{3}$ .

**6.13.** Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

а) Постройте точку пересечения прямой  $AC_1$  с плоскостью  $BA_1 D$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $BA_1$  и  $CB_1$ , если параллелепипед прямоугольный,  $AA_1 = \sqrt{5}$ ,  $AB = BC = 2\sqrt{10}$ .

**6.14.** Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер соответственно  $AD$  и  $AB$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

а) Докажите, что косинус угла между прямыми  $D_1 M$  и  $A_1 N$  равен  $\frac{4}{5}$ .

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если ребро куба равно 6.

**6.15.** Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  с вершиной  $S$ . Точка  $M$  — середина бокового ребра  $CS$ .

а) Постройте точку пересечения прямой  $BM$  с плоскостью  $ESF$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $BM$  и  $EF$ , если сторона основания пирамиды равна  $2\sqrt{6}$ , а высота пирамиды равна  $3\sqrt{2}$ .

**6.16.** Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ . Точка  $P$  — середина бокового ребра  $CC_1$ .

а) Постройте точку пересечения прямой  $BP$  с плоскостью  $AA_1 F$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $BP$  и  $AB_1$ , если сторона основания призмы равна 6, а боковое ребро равно  $2\sqrt{3}$ .

**6.17.** Основание прямой четырёхугольной призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольник  $ABCD$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через середину ребра  $AD$  перпендикулярно прямой  $BD_1$ .

а) Докажите, что угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $ABC$  равен углу между прямыми  $BD_1$  и  $AA_1$ .

б) Найдите косинус угла между плоскостью основания призмы и плоскостью  $\alpha$ , если  $AB = 12$ ,  $AD = \sqrt{31}$ , а расстояние между прямыми  $AC$  и  $B_1 D_1$  равно 5.

**6.18.** Основание прямой четырёхугольной призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольник  $ABCD$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через середину ребра  $CD$  перпендикулярно прямой  $B_1 D$ .

а) Докажите, что угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $ADD_1$  равен углу между прямыми  $B_1 D$  и  $AB$ .

б) Найдите тангенс угла между плоскостью грани  $ADD_1$  и плоскостью  $\alpha$ , если  $AB = 5$ ,  $AD = \sqrt{33}$ , а расстояние между прямыми  $A_1 C_1$  и  $BD$  равно  $\sqrt{3}$ .

**6.19.** Основание пирамиды  $SABCD$  — квадрат  $ABCD$ , боковое ребро  $SA$  перпендикулярно плоскости основания,  $BC = 2SA$ . Точка  $M$  — середина ребра  $AB$ .

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую  $SM$  параллельно  $BD$ , — равносторонний треугольник.

б) Найдите расстояние между прямыми  $SM$  и  $BD$ , если  $AB = 6\sqrt{3}$ .

**6.20.** Основание пирамиды  $ABCD$  — равносторонний треугольник  $ABC$ , боковое ребро  $AD$  перпендикулярно плоскости основания,  $AD : BC = 1 : \sqrt{2}$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $BC$  и  $AB$  соответственно.

а) Докажите, что угол между прямыми  $AM$  и  $DN$  равен  $60^\circ$ .

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если  $AB = 6\sqrt{2}$ .

**6.21.** Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Его основания  $ABCD$  и  $A_1 B_1 C_1 D_1$  — квадраты. Отрезок, соединяющий центр основания  $ABCD$  с серединой ребра  $B_1 C_1$ , перпендикулярен основаниям.

а) Докажите, что грани  $AA_1 B_1 B$  и  $ABCD$  перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $BC$ , если все рёбра параллелепипеда равны 2.

**6.22.** Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Его основания  $ABCD$  и  $A_1 B_1 C_1 D_1$  — квадраты. Отрезок, соединяющий вершину  $C$  с центром основания  $A_1 B_1 C_1 D_1$ , перпендикулярен основаниям.

а) Докажите, что прямые  $CC_1$  и  $BD$  перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми  $A_1 C$  и  $AB$ , если сторона основания параллелепипеда равна 6, а боковое ребро равно  $\sqrt{34}$ .

**6.23.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точка  $E$  — середина ребра  $AD$ . Вершины  $M$  и  $N$  правильного тетраэдра  $MNPQ$  лежат на прямой  $ED_1$ , а вершины  $P$  и  $Q$  — на прямой, проходящей через точку  $A_1$  и пересекающей прямую  $BC$  в точке  $R$ .

а) Докажите, что  $BR = 2BC$ .

б) Найдите расстояние между серединами отрезков  $MN$  и  $PQ$ , если ребро куба равно  $a$ .

**6.24.** Основание прямой треугольной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  — равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами  $AC = BC$ . Вершины  $M$  и  $N$  правильного тетраэдра  $MNPQ$  лежат на прямой  $CA_1$ , а вершины  $P$  и  $Q$  — на прямой  $AB_1$ .

а) Докажите, что  $AA_1 = AC$ .

б) Найдите расстояние между серединами отрезков  $MN$  и  $PQ$ , если  $AC = a$ .

## § 7. Площадь сечения

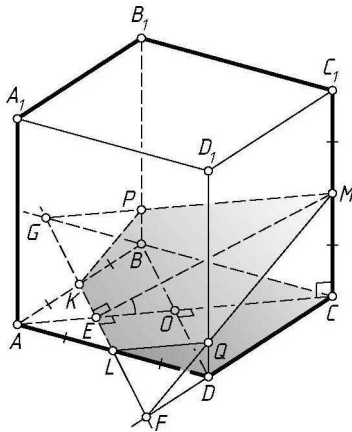
В некоторых случаях при вычислении площади сечения многогранника удобно воспользоваться следующей теоремой.

*Теорема о площади ортогональной проекции.* Площадь ортогональной проекции  $S'$  плоского многоугольника на плоскость равна площади проектируемого многоугольника  $S$ , умноженной на косинус угла между его плоскостью и плоскостью проекции, т. е.  $S' = S \cos \varphi$ .

**Пример 1.** Найдите площадь сечения куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$  плоскостью, проходящей через середины рёбер  $AB$ ,  $AD$  и  $CC_1$ , если его сторона равна 1.

*Ответ:*  $\frac{7\sqrt{11}}{24}$ .

**Решение.** Пусть  $K$ ,  $L$  и  $M$  — середины рёбер соответственно  $AB$ ,  $AD$  и  $CC_1$  данного куба;  $F$  и  $G$  — точки пересечения прямой  $KL$  с прямыми  $CD$  и  $BC$  соответственно. Тогда секущая плоскость  $KLM$  пересекает ребро  $BB_1$  в точке  $P$  пересечения прямых  $BB_1$  и  $MG$ , лежащих в плоскости  $BB_1C_1$ . Аналогично строится точка  $Q$  пересечения секущей плоскости с ребром  $DD_1$ . Таким образом, искомое сечение — пятиугольник  $KPMQL$ .



Пусть  $O$  — центр грани  $ABCD$ ,  $E$  — точка пересечения отрезков  $KL$  и  $AC$ . Поскольку  $E$  и  $M$  — общие точки секущей плоскости и плоскости  $AA_1C_1$ , эти плоскости пересекаются по прямой  $ME$ , а поскольку  $KL$  — средняя линия треугольника  $ABD$ , получаем  $CE \perp KL$  и

$$CE = \frac{3}{4}AC = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Ребро  $CC_1$  — перпендикуляр к плоскости  $ABC$ , поэтому  $CE$  — ортогональная проекция наклонной  $ME$  на эту плоскость, а угол  $CEM$  — линейный угол двугранного угла между секущей плоскостью и плоскостью  $ABC$ . Из прямоугольного треугольника  $CEM$  находим, что

$$ME = \sqrt{CM^2 + CE^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{8}} = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{2}},$$

$$\cos \angle CEM = \frac{CE}{ME} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{2}}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

Пятиугольник  $KBCDL$  — ортогональная проекция сечения  $KPMQL$  на плоскость  $ABC$ , а поскольку

$$S_{KBCDL} = S_{ABCD} - S_{\Delta AKL} = S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{\Delta ABD} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8},$$

то по теореме о площади ортогональной проекции

$$S_{KPMQL} = \frac{S_{KBCDL}}{\cos \angle CEM} = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{3}{\sqrt{11}}} = \frac{7\sqrt{11}}{24}. \quad \triangleleft$$

### Подготовительные задачи

1. Дан куб  $ABCA_1B_1C_1D_1$  с ребром  $a$ . Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

- две его диагонали;
- середины трёх рёбер, исходящих из одной вершины;
- вершину  $B_1$  и середины рёбер  $AB$  и  $AD$ ;
- диагональ  $AC_1$  параллельно прямой  $BD$ ;
- середину ребра  $AB$  параллельно прямым  $BD$  и  $BC_1$ .

2. Дан правильный тетраэдр  $ABCD$  с ребром  $a$ . Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

- середину ребра  $AD$  параллельно плоскости  $ABC$ ;
- вершину  $D$  и середины рёбер  $AB$  и  $BC$ ;
- середину ребра  $AB$  параллельно рёбрам  $AC$  и  $BD$ ;
- высоту  $DH$  тетраэдра параллельно ребру  $AC$ ;
- центры граней  $ABC$ ,  $ABD$  и  $BCD$ .

3. Дана правильная четырёхугольная пирамида  $SABCD$  с вершиной  $S$ . Все рёбра пирамиды равны  $a$ . Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

- середину ребра  $SA$  параллельно плоскости основания пирамиды;
- диагональ  $BD$  основания и середину ребра  $SC$ ;

- в) ребро  $AB$  и середину ребра  $SD$ ;
- г) центр основания параллельно плоскости  $ASB$ ;
- д) середину ребра  $SC$  и точку  $A$  параллельно диагонали  $BD$  основания.

4. Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ . Все рёбра призмы равны  $a$ . Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

- а) вершины  $A$ ,  $B_1$  и  $C$ ;
- б) ребро  $BC$  и центр основания  $A_1B_1C_1$ ;
- в) центры граней  $ABC$ ,  $AA_1B_1B$  и  $BB_1C_1C$ ;
- г) прямую  $BC_1$  параллельно медиане  $AM$  основания  $ABC$ ;
- д) середину ребра  $BB_1$  параллельно прямым  $BA_1$  и  $B_1C_1$ .

5. Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ . Все рёбра призмы равны  $a$ . Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

- а) вершины  $A$ ,  $B$  и  $C_1$ ;
- б) вершины  $B$ ,  $F$  и  $C_1$ ;
- в) вершины  $A$ ,  $B$  и  $D_1$ ;
- г) центр основания  $ABCDEF$  параллельно прямым  $DE$  и  $AE_1$ ;
- д) середины рёбер  $BC$ ,  $EF$  и центр грани  $AA_1B_1B$ .

6. Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  с вершиной  $S$ . Стороны основания пирамиды равны  $a$ , а боковые рёбра равны  $2a$ . Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

- а) вершину  $S$  и диагональ  $BD$  основания;
- б) середины рёбер  $AB$  и  $EF$  параллельно высоте пирамиды;
- в) вершину  $S$  и середины рёбер  $AB$  и  $AF$ ;
- г) точки  $A$ ,  $D$  и середину ребра  $SE$ ;
- д) ребро  $AB$  и середину ребра  $SD$ .

### Задачи на доказательство и вычисление

7.1. Плоскость  $\alpha$  проходит через высоту  $DD_1$  правильного тетраэдра  $ABCD$  и ребро  $AD$ .

- а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  перпендикулярна ребру  $BC$ .
- б) Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью  $\alpha$ , если рёбра тетраэдра равны  $a$ .

7.2. Через вершины  $C$ ,  $B_1$  и  $D_1$  куба  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  проведена плоскость  $\alpha$ .

- а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  перпендикулярна диагонали  $AC_1$  куба.
- б) Найдите площадь куба плоскостью  $\alpha$ , если ребро куба равно  $a$ .

**7.3.** Через вершину  $S$  и диагональ  $BD$  основания правильной шестиугольной пирамиды  $SAB CDEF$  проведена плоскость  $\alpha$ .

а) Докажите, что расстояние от центра основания до этой плоскости в три раза меньше расстояния до этой плоскости от точки  $F$ .

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $\alpha$ , если сторона основания равна  $\sqrt{3}$ , а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен  $60^\circ$ .

**7.4.** Плоскость  $\alpha$  проходит через сторону  $AB$  основания  $ABC$  правильной треугольной призмы  $ABC A_1 B_1 C_1$  и середину ребра  $B_1 C_1$ .

а) Пусть  $M$  — точка пересечения плоскости  $\alpha$  с прямой  $CC_1$ . Докажите, что  $C_1$  — середина отрезка  $CM$ .

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $\alpha$ , если все рёбра призмы равны  $a$ .

**7.5.** Через вершину  $S$  правильной четырёхугольной пирамиды и середины сторон  $AD$  и  $CD$  основания проведена плоскость  $\alpha$ ;  $K$  — точка пересечения этой плоскости с прямой  $BC$ .

а) Докажите, что отрезок  $CK$  вдвое меньше стороны основания.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $\alpha$ , если сторона основания пирамиды равна  $a$ , а боковое ребро равно  $2a$ .

**7.6.** Дана правильная шестиугольная призма. Плоскость  $\alpha$  проходит через сторону одного основания и противоположащую ей сторону другого основания.

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  проходит через середины двух противоположных боковых рёбер призмы.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $\alpha$ , если боковые грани призмы — квадраты со стороной  $2$ .

**7.7.** Через диагональ  $B_1 D_1$  грани  $A_1 B_1 C_1 D_1$  и середину ребра  $DC$  правильной четырёхугольной призмы  $ABCDA_1 B_1 C_1 D_1$  проведена плоскость  $\alpha$ .

а) Постройте точку пересечения этой плоскости с прямой  $CC_1$ .

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $\alpha$ , если  $AB = a$ ,  $CC_1 = 2a$ .

**7.8.** Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна основанию правильной треугольной пирамиды  $SABC$  и делит стороны  $AB$  и  $BC$  основания пополам.

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит боковое ребро в отношении  $1 : 3$ , считая от вершины  $S$ .

б) Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если известно, что сторона основания равна  $2$ , а высота пирамиды равна  $4$ .



**7.9.** Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $SA$  и  $SB$  правильной треугольной пирамиды  $SABC$  с вершиной  $S$ . Через  $M$  и  $N$  проведена плоскость, перпендикулярная плоскости основания.

а) Докажите, что эта плоскость делит медиану  $CE$  основания в отношении  $1 : 5$ , считая от точки  $E$ .

б) Найдите площадь сечения, если  $AB = 36$ ,  $SA = 31$ .

**7.10.** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 12, а боковое ребро  $SA$  равно 13. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $SA$  и  $SB$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $MN$  и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит медиану  $CE$  основания в отношении  $5 : 1$ , считая от точки  $C$ .

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды  $SABC$  плоскостью  $\alpha$ .

**7.11.** На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1 E = 6EA$ . Точка  $T$  — середина ребра  $B_1 C_1$ . Известно, что  $AB = 4\sqrt{2}$ ,  $AD = 12$ ,  $AA_1 = 14$ .

а) Докажите, что плоскость  $ETD_1$  делит ребро  $BB_1$  в отношении  $4 : 3$ .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью  $ETD_1$ .

**7.12.** На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1 E : EA = 5 : 3$ , на ребре  $BB_1$  — точка  $F$  так, что  $B_1 F : FB = 5 : 11$ . Точка  $T$  — середина ребра  $B_1 C_1$ . Известно, что  $AB = 6\sqrt{2}$ ,  $AD = 10$ ,  $AA_1 = 16$ .

а) Докажите, что плоскость  $EFT$  проходит через вершину  $D_1$ .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью  $EFT$ .

**7.13.** Дана правильная четырёхугольная пирамида  $PABCD$  с вершиной в точке  $P$ . Через точку  $C$  и середину ребра  $AB$  перпендикулярно к основанию пирамиды проведена плоскость  $\alpha$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит ребро  $BP$  в отношении  $2 : 1$ , считая от точки  $B$ .

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $\alpha$ , если известно, что  $PA = 10$ ,  $AC = 16$ .

**7.14.** В правильной шестиугольной пирамиде с вершиной  $S$  стороны основания  $ABCDEF$  равны 6, а боковые рёбра равны 12. Точки  $K$  и  $M$  — середины рёбер  $BF$  и  $SE$  соответственно.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью  $BKM$ .

б) Найдите площадь полученного сечения.

**7.15.** Точка  $M$  — середина ребра  $CD$  единичного куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Через вершину  $A_1$  проведена плоскость, параллельная прямым  $AM$  и  $D_1 M$ .

- а) Докажите, что эта плоскость проходит через середину ребра  $AB$ .
- б) Найдите площадь сечения куба этой плоскостью.

**7.16.** Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с основаниями  $ABCD$  и  $A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AD$  и  $CD$  соответственно, точка  $K$  лежит на ребре  $BB_1$ , причём  $B_1 K : KB = 1 : 2$ .

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точки  $M$ ,  $N$  и  $K$ , делит ребро  $CC_1$  в отношении  $2 : 7$ , считая от точки  $C$ .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью, если параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — правильная четырёхугольная призма, сторона основания  $ABCD$  равна  $4\sqrt{2}$ , а боковое ребро равно 12.

**7.17.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  проведено сечение плоскостью, проходящей через середину  $M$  ребра  $AB$ , точку  $B_1$  и точку  $K$ , лежащую на ребре  $AC$  и делящую его в отношении  $AK : KC = 1 : 3$ .

а) Докажите, что эта плоскость проходит через середину ребра  $A_1 C_1$ .

б) Найдите площадь сечения, если известно, что сторона основания призмы равна  $4\sqrt{2}$ , а высота призмы равна  $8\sqrt{2}$ .

**7.18.** Основание четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  — параллелограмм  $ABCD$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра  $AB$  параллельно плоскости  $SAD$ .

б) Найдите площадь полученного сечения, если площадь грани  $SAD$  равна 16.

**7.19.** Основанием пирамиды  $SABCD$  с равными боковыми рёбрами является прямоугольник  $ABCD$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через сторону  $AB$  основания и середину высоты пирамиды.

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит боковое ребро  $SD$  в отношении  $1 : 2$ , считая от вершины  $S$ .

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $\alpha$ , если  $AB = 6$ ,  $AD = 8$ , а высота пирамиды равна 6.

**7.20.** Через середину ребра  $AB$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  проведена плоскость, параллельная прямым  $BD_1$  и  $A_1 C_1$ .

а) Докажите, что эта плоскость делит диагональ  $DB_1$  в отношении  $3 : 5$ , считая от от вершины  $D$ .

б) Найдите площадь полученного сечения, если ребро куба равно 4.

**7.21.** Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $BA_1$  параллельно прямой  $CB_1$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит диагональ  $AC_1$  параллелепипеда в отношении  $1:2$ , считая от вершины  $A$ .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью  $\alpha$ , если он прямой, его основание  $ABCD$  — ромб с диагоналями  $AC = 10$  и  $BD = 8$ , а боковое ребро параллелепипеда равно 12.

**7.22.** Дана треугольная призма  $ABCA_1 B_1 C_1$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $BC_1$  параллельно прямой  $AB_1$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  проходит через середину ребра  $AC$ .

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $\alpha$ , если призма правильная, сторона её основания равна  $2\sqrt{3}$ , а боковое ребро равно 1.

**7.23.** В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  сторона основания  $AB$  равна 6, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $4\sqrt{3}$ . На рёбрах  $AB$ ,  $A_1 D_1$  и  $C_1 D_1$  отмечены точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = A_1 N = C_1 K = 1$ .

а) Пусть  $L$  — точка пересечения плоскости  $MNK$  с ребром  $BC$ . Докажите, что  $MNKL$  — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $MNK$ .

**7.24.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  сторона основания  $AB$  равна 6, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $2\sqrt{2}$ . На рёбрах  $AB$ ,  $A_1 B_1$  и  $B_1 C_1$  отмечены точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = B_1 N = C_1 K = 2$ .

а) Пусть  $L$  — точка пересечения плоскости  $MNK$  с ребром  $AC$ . Докажите, что  $MNKL$  — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $MNK$ .

## § 8. Объём многогранника

Объём призмы равен произведению площади основания на высоту:  $V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн}} \cdot h$ .

Объём пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту:  $V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$ .

Иногда удобно использовать такую формулу объёма треугольной призмы:  $V = \frac{1}{2} Pd$ , где  $P$  — площадь боковой грани призмы, а  $d$  — расстояние от этой грани до параллельного ей ребра.

Отношение объёмов подобных многогранников равно кубу коэффициента подобия.

Если плоскость, проходящая через вершину, разбивает пирамиду на две пирамиды, то отношение объёмов этих пирамид равно отношению площадей их оснований.

Если плоскость пересекает боковые рёбра  $SA$ ,  $SB$  и  $SC$  треугольной пирамиды  $SABC$  (или их продолжения) в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  соответственно, то  $\frac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SABC}} = \frac{SA_1}{SA} \cdot \frac{SB_1}{SB} \cdot \frac{SC_1}{SC}$ .

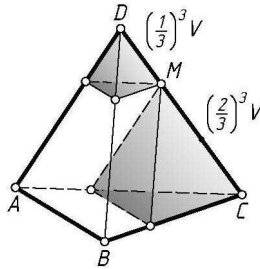
**Пример 1.** На ребре единичного правильного тетраэдра взята точка, которая делит это ребро в отношении  $1 : 2$ . Через эту точку проведены две плоскости, параллельные двум граням тетраэдра. Эти плоскости отсекают от тетраэдра две треугольные пирамиды. Найдите объём оставшейся части тетраэдра.

Ответ:  $\frac{\sqrt{2}}{18}$ .

Р е ш е н и е. Высота правильного тетраэдра с ребром 1 равна  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ , площадь основания равна  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ . Следовательно, если  $V$  — объём такого тетраэдра, то

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Пусть точка  $M$  лежит на ребре  $CD$  данного правильного тетраэдра  $DABC$ , причём  $\frac{DM}{MC} = \frac{1}{2}$ . Первая плоскость проходит через точку  $M$  параллельно плоскости  $ABC$ . Она отсекает от данного тетраэдра подобный ему тетраэдр, причём коэффициент подобия равен  $\frac{DM}{DC} = \frac{1}{3}$ . Значит, объём отсечённого тетраэдра равен  $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot V = \frac{1}{27}V$ . Вторая плоскость проходит через точку  $M$  параллельно плоскости  $ABD$ . Она от-



секает от данного тетраэдра подобный ему тетраэдр, причём коэффициент подобия равен  $\frac{CM}{CD} = \frac{2}{3}$ . Значит, объём отсечённого тетраэдра равен  $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot V = \frac{8}{27}V$ . Следовательно, объём оставшейся части тетраэдра равен

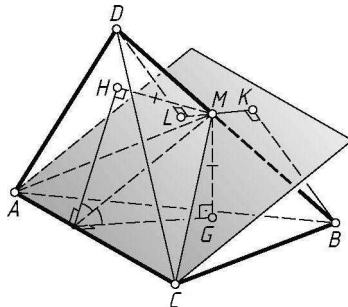
$$V - \frac{1}{27}V - \frac{8}{27}V = V - \frac{1}{3}V = \frac{2}{3}V = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{18}. \quad \triangleleft$$

**Пример 2.** Докажите, что биссекторная плоскость двугранного угла при ребре  $AC$  пирамиды  $DABC$  делит объём пирамиды и ребро  $BD$  на части, пропорциональные площадям граней  $ABC$  и  $ADC$ .

**Решение.** Пусть биссекторная плоскость двугранного угла с ребром  $AC$  пересекает ребро  $BD$  в точке  $M$ , а  $MG$  и  $MH$  — перпендикуляры, опущенные из точки  $M$  на плоскости граней  $ABC$  и  $ADC$  соответственно. Точка, лежащая на биссекторной плоскости двугранного угла, равноудалена от его граней, поэтому  $MG = MH$ . Следовательно,

$$\frac{V_{MABC}}{V_{MADC}} = \frac{\frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot MG}{\frac{1}{3}S_{\Delta ADC} \cdot MH} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADC}}.$$

С другой стороны, если  $BK$  и  $DL$  — перпендикуляры, опущенные из точек  $B$  и  $D$  на плоскость  $AMC$ , то из подобия прямоугольных тре-



угольников  $BKM$  и  $DLM$  получаем, что  $\frac{BK}{DL} = \frac{BM}{DM}$ . Значит,

$$\frac{V_{MABC}}{V_{MADC}} = \frac{\frac{1}{3}S_{\triangle AMC} \cdot BK}{\frac{1}{3}S_{\triangle AMC} \cdot DL} = \frac{BK}{DL} = \frac{BM}{DM}.$$

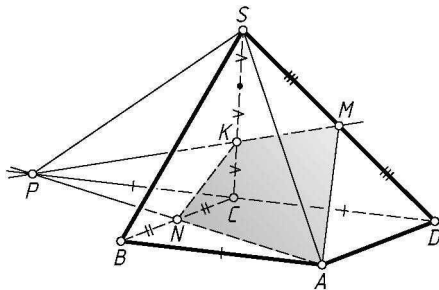
Следовательно,

$$\frac{V_{MABC}}{V_{MADC}} = \frac{BM}{DM} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}}. \quad \triangleleft$$

**Пример 3.** Основание пирамиды  $SABCD$  — параллелограмм  $ABCD$ , точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $SD$  и  $BC$  соответственно. Найдите объём большей из частей, на которые плоскость  $AMN$  разбивает пирамиду  $SABCD$ , если объём пирамиды  $SABCD$  равен  $V$ .

Ответ:  $\frac{7}{12}V$ .

**Решение.** Пусть прямые  $AN$  и  $CD$ , лежащие в плоскости  $ABC$ , пересекаются в точке  $P$ , а прямые  $MP$  и  $SC$ , лежащие в плоскости  $CSD$ , — в точке  $K$ . Тогда  $K$  — точка пересечения плоскости  $AMN$  с ребром  $SC$ .



Из равенства треугольников  $PCN$  и  $ABN$  следует, что  $CP = AB = CD$ , значит,  $C$  — середина отрезка  $DP$ . Тогда  $K$  — точка пересечения медиан  $SC$  и  $PM$  треугольника  $DSP$ , следовательно,  $CK : KS = 1 : 2$ .

Рассмотрим треугольную пирамиду  $MADP$ . Площадь её основания  $ADP$  равна площади основания  $ABCD$  данной пирамиды, а высота, опущенная из вершины  $M$ , вдвое меньше высоты данной пирамиды (см. с. 30), значит,  $V_{MADP} = \frac{1}{2}V$ . Площадь основания  $CPN$  треугольной пирамиды  $KCPN$  в четыре раза меньше площади  $ABCD$ , а высота, опущенная на плоскость основания  $CPN$ , вдвое меньше высоты пирамиды  $SABCD$ , значит,

$$V_{KCPN} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}V = \frac{1}{8}V.$$

Тогда объём части пирамиды  $SABCD$ , содержащей точку  $D$ , равен

$$V_{MADP} - V_{KCPN} = \frac{1}{2}V - \frac{1}{12}V = \frac{5}{12}V < \frac{1}{2}V.$$

Следовательно, объём большей части равен  $\frac{7}{12}V$ .  $\triangleleft$

### Подготовительные задачи

- Объём параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равен 1. Найдите:
  - объём пирамиды  $A_1 ABD$ ;
  - объём треугольной пирамиды, отсекаемой от параллелепипеда плоскостью, проходящей через вершины  $B, D$  и середину ребра  $CC_1$ ;
  - объём пирамиды  $ACB_1 D_1$ ;
  - объёмы частей, на которые параллелепипед разбивается плоскостью, проходящей через вершины  $A, C$  и середину ребра  $A_1 D_1$ ;
  - объём общей части пирамид  $ACB_1 D_1$  и  $BDA_1 C_1$ .
- Объём треугольной пирамиды  $DABC$  равен 1. Найдите:
  - объёмы частей, на которые пирамида разбивается плоскостью, проходящей через точки  $A, D$  и середину ребра  $BC$ ;
  - объёмы частей, на которые пирамида разбивается плоскостью, проходящей через вершину  $D$  и середины рёбер  $AB$  и  $BC$ ;
  - объёмы частей, на которые пирамида разбивается плоскостью, проходящей через середины рёбер  $AB, BC$  и  $BD$ ;
  - объём пирамиды, вершины которой —  $A, B$  и середины рёбер  $AC$  и  $BD$ ;
  - объёмы частей, на которые пирамида разбивается плоскостью, проходящей через середины рёбер  $AB, BC$  и  $CD$ .
- Основание четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  — параллелограмм  $ABCD$ . Объём пирамиды равен 1. Найдите объёмы частей, на которые пирамида разбивается плоскостью, проходящей через:
  - средины рёбер  $SA, SB$  и  $SC$ ;
  - вершину  $S$  и середины рёбер  $AB$  и  $BC$ ;
  - точки  $A, C$  и середину ребра  $SB$ ;
  - точку  $A$  и середину ребра  $SC$  параллельно прямой  $BD$ ;
  - точки  $A, B$  и середину ребра  $SD$ .
- Объём треугольной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  равен 1. Найдите:
  - объёмы частей, на которые призма разбивается плоскостью, проходящей через вершины  $A, C$  и  $B_1$ ;

- б) объёмы частей, на которые призма разбивается плоскостью, проходящей через вершину  $C_1$  и середины рёбер  $AC$  и  $BC$ ;
- в) объёмы частей, на которые призма разбивается плоскостью, проходящей через вершины  $A$ ,  $B$  и середину ребра  $A_1C_1$ ;
- г) объёмы частей, на которые призма разбивается плоскостью, проходящей через вершины  $C$ ,  $A_1$  и середину ребра  $BB_1$ ;
- д) объём общей части пирамид  $ABCB_1$  и  $A_1B_1C_1B$ .

5. Основания  $ABCDEF$  и  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  — правильные шестиугольники. Объём призмы равен 1. Найдите:

- а) объём пятиугольной призмы  $ABCDE A_1B_1C_1D_1E_1$ ;
- б) объём пирамиды  $BCED_1$ ;
- в) объём пирамиды  $A_1BDF$ ;
- г) объёмы частей, на которые призма разбивается плоскостью, проходящей через вершины  $A$ ,  $C$  и  $D_1$ ;
- д) объёмы частей, на которые призма разбивается плоскостью, проходящей через вершины  $B$ ,  $C$  и  $A_1$ .

6. Основание  $ABCDEF$  шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$  — правильный шестиугольник. Объём пирамиды равен 1. Найдите:

- а) объём четырёхугольной пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью, проходящей через точки  $A$ ,  $S$  и середину ребра  $DE$ ;
- б) объём пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра  $SA$  параллельно диагоналям  $AD$  и  $CE$  основания;
- в) объём пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью, проходящей через точки  $B$ ,  $D$  и середину ребра  $SC$ ;
- г) объём пирамиды  $SBCM$ , где  $M$  — середина  $SD$ ;
- д) объёмы частей, на которые пирамида разбивается плоскостью, проходящей через точки  $B$ ,  $C$  и середину ребра  $SE$ .

### Задачи на доказательство и вычисление

8.1. Диагональ прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  равна 13, а диагонали двух соседних граней равны  $4\sqrt{10}$  и  $3\sqrt{17}$ .

- а) Докажите, что треугольник  $AC_1D_1$  прямоугольный.
- б) Найдите объём параллелепипеда.

8.2. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна  $4\sqrt{2}$  и образует с боковыми гранями углы  $30^\circ$  и  $45^\circ$ .

- а) Докажите, что одна из этих граней — квадрат.
- б) Найдите объём параллелепипеда.



**8.3.** Сторона основания  $ABC$  правильной треугольной пирамиды  $ABCD$  равна 6, а площадь сечения, проходящего через ребро  $AB$  и середину бокового ребра  $CD$ , равна  $6\sqrt{6}$ .

а) Докажите, что плоскость сечения образует с плоскостью основания угол  $45^\circ$ .

б) Найдите объём пирамиды  $ABCD$ .

**8.4.** Сторона основания  $ABCDEF$  правильной шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$  равна 4, а площадь сечения, проходящего через прямую  $CF$  и середину бокового ребра  $SD$ , равна  $10\sqrt{3}$ .

а) Докажите, что плоскость сечения образует с плоскостью основания угол  $60^\circ$ .

б) Найдите объём пирамиды  $SABCDEF$ .

**8.5.** Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер соответственно  $CC_1$  и  $B_1C_1$  треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  с основаниями  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ .

а) Докажите, что плоскость  $BA_1M$  делит отрезок  $AN$  в отношении 4:3, считая от точки  $A$ .

б) В каком отношении плоскость  $BA_1M$  делит объём призмы?

**8.6.** Основания  $ABCDEF$  и  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  — правильные шестиугольники,  $M$  — точка пересечения  $BD$  и  $FC$ .

а) Докажите, что плоскость  $BDF_1$  делит отрезок  $FC_1$  в отношении 3:4, считая от точки  $F$ .

б) В каком отношении плоскость  $BDF_1$  делит объём призмы?

**8.7.** Точка  $P$  — середина медианы  $BK$  основания  $ABC$  треугольной пирамиды  $ABCD$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$ , проходящая через точку  $B$  и середину рёбер  $AD$  и  $CD$ , делит отрезок  $DP$  в отношении 2:1, считая от вершины  $D$ .

б) Найдите расстояние от вершины  $C$  до плоскости  $\alpha$ , если объём пирамиды  $ABCD$  равен 16, а площадь её сечения плоскостью  $\alpha$  равна 3.

**8.8.** Через вершину  $D$  треугольной пирамиды  $DABC$  и точку  $M$  пересечения медиан грани  $ABC$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная ребру  $AC$ . На медиане  $DN$  грани  $ACD$  отмечена точка  $P$ , причём  $DP:PN = 2:3$ .

а) Докажите, что прямая  $BP$  проходит через середину отрезка  $DM$ .

б) Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $\alpha$ , если объём пирамиды  $ABCD$  равен 18, а площадь её сечения плоскостью  $\alpha$  равна 4.

**8.9.** Точка  $M$  — середина ребра  $BD$  правильного тетраэдра  $ABCD$ . Плоскость, проходящая через точку  $M$  перпендикулярно ребру  $AD$ , пересекает это ребро в точке  $K$ , а ребро  $CD$  — в точке  $N$ .

а) Докажите, что  $N$  — середина ребра  $CD$ .

б) Найдите объём тетраэдра  $ABCD$ , если объём пирамиды  $DKMN$  равен  $V$ .

**8.10.** Точка  $P$  лежит на ребре  $AD$  правильного тетраэдра  $ABCD$ , причём  $AP : PD = 1 : 2$ . Плоскость, проходящая через точку  $P$  перпендикулярно ребру  $CD$ , пересекает это ребро в точке  $M$ , а ребро  $BD$  — в точке  $Q$ .

а) Докажите, что плоскость  $PMQ$  делит высоту пирамиды пополам.

б) Найдите объём треугольной пирамиды  $QABC$ , если объём пирамиды  $DPMQ$  равен  $V$ .

**8.11.** Плоскость  $\alpha$  проходит через середины рёбер  $AD$ ,  $CD$  и  $BB_1$  параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ .

а) Докажите, что эта плоскость делит ребро  $CC_1$  в отношении  $1 : 5$ , считая от вершины  $C$ .

б) Найдите объём меньшего из многогранников, на которые плоскость  $\alpha$  разбивает параллелепипед, если объём параллелепипеда равен  $V$ .

**8.12.** Плоскость  $\alpha$  проходит через вершину  $D$  и центры граней  $AA_1B_1B$  и  $BB_1C_1C$  параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ .

а) Докажите, что эта плоскость делит ребро  $BB_1$  в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины  $B$ .

б) Найдите объёмы многогранников, на которые плоскость  $\alpha$  разбивает параллелепипед, если его объём равен  $V$ .

**8.13.** Основание четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  — параллелограмм  $ABCD$ . Через середины рёбер  $SC$  и  $AB$  проведена плоскость, параллельная диагонали  $BD$  основания.

а) Докажите, что эта плоскость делит ребро  $SB$  в отношении  $3 : 1$ , считая от вершины пирамиды.

б) В каком отношении эта плоскость делит объём пирамиды?

**8.14.** Основание четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  — параллелограмм  $ABCD$ . Через середину ребра  $SC$  и точку  $A$  проведена плоскость, параллельная диагонали  $BD$  основания. Пусть  $P$  — точка пересечения этой плоскости с прямой  $CD$ .

а) Докажите, что  $D$  — середина отрезка  $CP$ .

б) Найдите объём большей из частей, на которые эта плоскость разбивает пирамиду, если объём пирамиды равен  $V$ .

**8.15.** Высота  $SH$  правильной треугольной пирамиды  $SABC$  относится к высоте основания  $ABC$  как 4 : 9. Плоскость  $\alpha$  проходит через ребро  $AB$  и делит пополам двугранный угол пирамиды при этом ребре.

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит высоту пирамиды в отношении 3 : 5, считая от точки  $H$ .

б) Найдите объём меньшей из частей, на которые пирамида разбивается плоскостью  $\alpha$ , если сторона основания пирамиды равна 6.

**8.16.** Дана правильная четырёхугольная пирамида  $SABCD$  с вершиной  $S$ . Апофема пирамиды вдвое больше стороны основания. Плоскость  $\alpha$  проходит через ребро  $AB$  и делит пополам двугранный угол пирамиды при этом ребре.

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит высоту пирамиды в отношении 4 : 1, считая от вершины  $S$ .

б) Найдите объём большей из частей, на которые пирамида разбивается плоскостью  $\alpha$ , если сторона основания пирамиды равна  $\sqrt{15}$ .

**8.17.** Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . На лучах  $AB$ ,  $AD$  и  $AA_1$  отмечены точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  соответственно, причём  $AK = \frac{5}{2}AB$ ,  $AL = \frac{5}{2}AD$  и  $AN = \frac{5}{2}AA_1$ .

а) Докажите, что плоскость  $KLM$  делит ребро  $B_1 C_1$  пополам.

б) В каком отношении плоскость  $KLM$  делит объём параллелепипеда?

**8.18.** На диагонали  $BD_1$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  отмечена точка  $M$ , причём  $BM : MD_1 = 1 : 3$ . Через точку  $M$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямым  $AB_1$  и  $CB_1$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит ребро  $AB$  в отношении 1 : 3, считая от вершины  $A$ .

б) В каком отношении плоскость  $\alpha$  делит объём параллелепипеда?

**8.19.** Точка  $M$  — середина ребра  $B_1 C_1$  правильной треугольной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  с основаниями  $ABC$  и  $A_1 B_1 C_1$ . Прямые  $BA_1$  и  $CB_1$  перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник  $BMA_1$  равнобедренный.

б) Найдите объём призмы, если расстояние между прямыми  $BA_1$  и  $CB_1$  равно 2.

**8.20.** В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  грань  $ABCD$  — квадрат. Точка  $M$  лежит на ребре  $BC$ , причём  $CM : MB = 1 : 2$ . Известно, что диагональ  $DB_1$  параллелепипеда перпендикулярна отрезку  $C_1 M$ .

а) Докажите, что угол между прямой  $CB_1$  и плоскостью  $A_1B_1C_1$  равен  $30^\circ$ .

б) Найдите объём параллелепипеда, если расстояние между прямыми  $DB_1$  и  $C_1M$  равно  $\sqrt{\frac{3}{7}}$ .

**8.21.** Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AA_1$  и  $CC_1$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Прямые  $A_1C$ ,  $B_1M$  и  $BN$  попарно перпендикулярны.

а) Докажите, что расстояние между плоскостями  $BND$  и  $B_1MD_1$  вдвое меньше диагонали  $A_1C$ .

б) Найдите объём параллелепипеда, если известно, что  $A_1C = a$ ,  $B_1M = b$ ,  $BN = c$ .

**8.22.** Основание пирамиды  $SABCD$  — параллелограмм  $ABCD$ , точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $SC$  и  $SD$  соответственно. Прямые  $SA$ ,  $BM$  и  $CN$  попарно перпендикулярны.

а) Докажите, что отрезок  $CN$  делится плоскостью  $BMD$  в отношении  $2:1$ , считая от точки  $C$ .

б) Найдите объём пирамиды, если  $SA = a$ ,  $BM = b$ ,  $CN = c$ .

## § 9. Фигуры вращения

Сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной его оси и удалённой от основания на расстояние, меньшее высоты, — круг, равный кругу основания.

Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси и удалённой от неё на расстояние, меньшее радиуса основания, есть прямоугольник.

Сечение конуса плоскостью, перпендикулярной его оси и удалённой от основания на расстояние, меньшее высоты, — круг.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину и хорду основания, — равнобедренный треугольник.

Сечение сферы плоскостью, удалённой от центра на расстояние, меньшее радиуса, есть окружность. Центр этой окружности — основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы на плоскость сечения, а радиус равен  $\sqrt{R^2 - d^2}$ , где  $R$  — радиус сферы,  $d$  — расстояние от центра сферы до секущей плоскости (расстояние между центрами сферы и окружности сечения).

Касательная плоскость к сфере — это плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку (точка касания).

Радиус сферы, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной плоскости.

Объём цилиндра равен произведению площади основания на образующую (высоту цилиндра):  $V_{\text{цилиндра}} = S_{\text{осн}} \cdot h = \pi r^2 h$ , где  $r$  — радиус основания цилиндра.

Объём конуса равен трети произведения площади основания на высоту:  $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ , где  $r$  — радиус основания конуса.

Объём шара радиуса  $R$  равен  $\frac{4}{3} \pi R^3$ .

Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на образующую (высоту цилиндра):  $S_{\text{бок. цил.}} = 2\pi r h$ .

Площадь полной поверхности цилиндра равна сумме площадей его боковой поверхности и двух оснований:  $S_{\text{полн. цил.}} = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$ .

Площадь боковой поверхности конуса равна половине произведения длины окружности основания на образующую:  $S_{\text{бок. кон.}} = \pi r l$ .

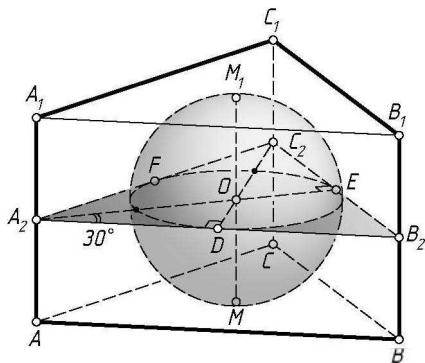
Площадь полной поверхности конуса равна сумме площадей его боковой поверхности и основания:  $S_{\text{полн. кон.}} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)$ .

Площадь сферы радиуса  $R$  равна четвервёрной площади большого круга:  $S_{\text{сф.ри}} = 4\pi R^2$ .

**Пример 1.** Шар касается всех граней правильной треугольной призмы. Найдите отношение объёмов шара и призмы.

*Ответ:*  $2\pi : 9\sqrt{3}$ .

**Решение.** Пусть  $O$  — центр шара радиуса  $R$ , вписанного в правильную треугольную призму  $ABCA_1B_1C_1$ ,  $M$  и  $M_1$  — точки касания шара с основаниями  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  соответственно, а  $D, E$  и  $F$  — с боковыми гранями. Тогда  $M$  и  $M_1$  — центры равносторонних треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , а  $D, E$  и  $F$  — центры прямоугольников  $AA_1B_1B$ ,  $BB_1C_1C$  и  $AA_1C_1C$  соответственно.



В сечении призмы плоскостью, проходящей через центр шара параллельно основаниям, получится равносторонний треугольник  $A_2B_2C_2$ , равный треугольникам  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , и вписанный в него круг радиуса  $R$ , касающийся сторон  $A_2B_2$ ,  $B_2C_2$  и  $A_2C_2$  в точках  $D, E$  и  $F$  соответственно. Центр  $O$  шара лежит на отрезке  $MM_1$  и делит его пополам, значит,  $AA_1 = MM_1 = 2R$ . Точка  $O$  лежит на высоте треугольника  $A_2B_2C_2$  и делит её в отношении  $2 : 1$ , считая от  $C_2$ , значит,  $C_2D = 3OD = 3R$ .

Из прямоугольного треугольника  $OA_2D$  находим, что

$$A_2D = OD \operatorname{ctg} 30^\circ = R\sqrt{3}.$$

Значит,

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta A_2B_2C_2} = \frac{1}{2} A_2B_2 \cdot C_2D = R\sqrt{3} \cdot 3R = 3R^2\sqrt{3}.$$

Пусть  $V_1$  и  $V_2$  — объёмы шара и призмы соответственно. Тогда

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad V_2 = S_{\Delta ABC} \cdot AA_1 = 3R^2\sqrt{3} \cdot 2R = 6R^3\sqrt{3}.$$

Следовательно,

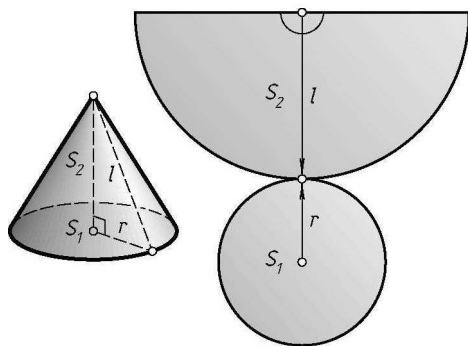
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{6R^3\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

◁

**Пример 2.** Площадь боковой поверхности конуса вдвое больше площади его основания. Найдите угол в развёртке боковой поверхности конуса.

*Ответ:*  $180^\circ$ .

**Решение.** Пусть  $r$  — радиус основания данного конуса,  $l$  — образующая,  $S_1$  — площадь основания конуса,  $S_2$  — площадь боковой поверхности. Тогда  $S_2$  — площадь сектора окружности радиуса  $l$ , являющегося развёрткой боковой поверхности конуса. По условию задачи  $S_2 = 2S_1$ , или  $\pi rl = 2\pi r^2$ . Отсюда находим, что  $r = \frac{l}{2}$ . Тогда площадь указанного сектора равна  $\frac{\pi l^2}{2}$ , т. е. половине площади круга радиуса  $l$ . Значит, сектор является полукругом. Следовательно, угол в развёртке боковой поверхности конуса равен  $180^\circ$ .  $\triangleleft$



**Пример 3.** Площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса под углом  $30^\circ$  к его оси, равна площади осевого сечения. Найдите косинус угла при вершине осевого сечения конуса.

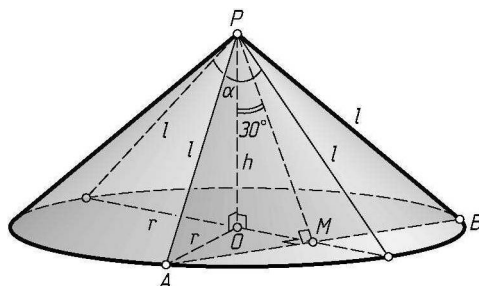
*Ответ:*  $-\frac{1}{7}$ .

**Решение.** Пусть равнобедренный треугольник  $PAB$  — указанное сечение конуса с вершиной  $P$ ,  $O$  — центр окружности основания конуса,  $M$  — середина хорды  $AB$  этой окружности. Тогда угол  $MPO$  — это угол между осью конуса и секущей плоскостью,  $\angle MPO = 30^\circ$ .

Пусть  $r$  — радиус основания конуса,  $h$  — высота конуса,  $l$  — образующая,  $\alpha$  — угол в осевом сечении. Тогда

$$OM = PO \operatorname{tg} \angle MPO = h \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{\sqrt{3}}, \quad PM = 2OM = \frac{2h}{\sqrt{3}},$$

$$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{3}}, \quad S_{\triangle APB} = PM \cdot AM = \frac{2h\sqrt{3r^2 - h^2}}{3}.$$



а так как площадь осевого сечения конуса равна  $rh$ , то по условию задачи получаем

$$\frac{2h\sqrt{3r^2 - h^2}}{3} = rh, \quad \text{или} \quad \sqrt{3r^2 - h^2} = \frac{3}{2}r,$$

откуда находим, что  $r^2 = \frac{4}{3}h^2$ . Следовательно,

$$l = PA = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\frac{4}{3}h^2 + h^2} = h\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

По теореме косинусов

$$\cos \alpha = \frac{l^2 + l^2 - 4r^2}{2l^2} = \frac{\frac{7}{3}h^2 + \frac{7}{3}h^2 - \frac{16}{3}h^2}{2 \cdot \frac{7}{3}h^2} = -\frac{1}{7}. \quad \triangleleft$$

### Подготовительные задачи

1. Радиус основания цилиндра равен 5, высота цилиндра равна 8. Плоскость  $\alpha$ , параллельная оси цилиндра, удалена от оси на расстояние, равное 4. Найдите:

- а) объём цилиндра;
- б) площадь боковой поверхности;
- в) площадь сечения цилиндра плоскостью  $\alpha$ ;
- г) расстояние между осью цилиндра и диагональю прямоугольника сечения;
- д) угол между осью цилиндра и диагональю прямоугольника сечения.

2. Радиус основания конуса равен  $2\sqrt{3}$ , угол в осевом сечении равен  $60^\circ$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через вершину конуса и хорду  $AB$  основания, равную  $2\sqrt{3}$ . Найдите:

- а) объём конуса;
- б) площадь полной поверхности;



- в) площадь сечения конуса плоскостью  $\alpha$ ;
- г) расстояние от центра основания конуса до плоскости  $\alpha$ ;
- д) угол между плоскостями, проходящими через ось конуса и точки  $A$  и  $B$  соответственно;
- е) угол между образующей конуса, проходящей через точку  $B$ , и диаметром основания, проходящим через точку  $A$ .

3. Площадь сечения шара плоскостью  $\alpha$ , удалённой от центра на расстояние, равное 12, равна  $81\pi$ . Найдите:

- а) объём шара;
- б) площадь поверхности шара;
- в) отношение площади поверхности шара к площади полной поверхности вписанного в шар куба;
- г) объём конуса, основание которого — сечение шара плоскостью  $\alpha$ , а вершина лежит на поверхности шара;
- д) боковую поверхность цилиндра, основания которого — сечения шара плоскостью  $\alpha$  и параллельной ей плоскостью.

### Задачи на доказательство и вычисление

9.1. Основания одного цилиндра вписаны в основания правильной призмы, а основания другого цилиндра описаны около оснований этой призмы.

- а) Докажите, что отношение объёмов цилиндров одно и то же для любой заданной правильной призмы.
- б) Найдите это отношение для правильной четырёхугольной призмы.

9.2. Вершины двух конусов совпадают с вершиной правильной пирамиды. Основание одного конуса вписано в основание пирамиды, а другого — описано около основания пирамиды.

- а) Докажите, что отношение объёмов конусов одно и то же для любой заданной правильной  $n$ -угольной пирамиды.
- б) Найдите это отношение для правильной треугольной пирамиды.

9.3. Высота конуса равна 6, а радиус основания равен 8.

- а) Докажите, что наибольшая площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через его вершину, равна 50.
- б) Найдите расстояние от центра основания конуса до этой плоскости.

9.4. Высота конуса равна 4, а радиус основания равен  $\sqrt{34}$ .

- а) Докажите, что наибольшая площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через его вершину, равна 25.

б) Найдите расстояние от центра основания конуса до этой плоскости.

**9.5.** Проведены две параллельные плоскости по одну сторону от центра сферы на расстоянии 3 друг от друга. Эти плоскости дают в сечении две окружности, длины которых равны  $18\pi$  и  $24\pi$ .

а) Точка  $H$  — ортогональная проекция произвольной точки меньшей окружности на плоскость большей. Докажите, что точка  $H$  делит проходящий через неё диаметр большей окружности в отношении 1 : 7.

б) Найдите объём шара, ограниченного данной сферой.

**9.6.** Проведены две параллельные плоскости по разные стороны от центра шара на расстоянии 7 друг от друга. Эти плоскости дают в сечении два круга, площади которых равны  $9\pi$  и  $16\pi$ .

а) Точка  $H$  — ортогональная проекция произвольной точки окружности меньшего круга на плоскость большего. Докажите, что точка  $H$  делит проходящий через неё диаметр большей окружности в отношении 1 : 7.

б) Найдите площадь поверхности шара.

**9.7.** Плоскость  $\alpha$  проходит через диаметр  $AB$  сферы. Через произвольную точку  $M$ , лежащую на сфере, но не лежащую в плоскости  $\alpha$ , проведена плоскость  $\beta$ , перпендикулярная прямой  $AB$ . Отрезок  $CD$  — общая хорда окружностей сечений сферы плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .

а) Докажите, что  $\angle CMD = 90^\circ$ .

б) Вершина конуса совпадает с точкой  $A$ , а окружность основания — с окружностью сечения сферы плоскостью  $\beta$ . Найдите объём конуса, если диаметр сферы равен 15, а  $MB = 3\sqrt{5}$ .

**9.8.** Плоскость  $\alpha$  проходит через диаметр  $AB$  сферы. Через точку  $B$  проведена плоскость, касательная к сфере. На этой плоскости взята точка  $K$ , причём отрезок  $KB$  равен радиусу сферы. Луч  $AK$  пересекает сферу в точке  $M$ . Через точку  $M$  проведена плоскость  $\beta$ , перпендикулярная прямой  $AB$ . Отрезок  $CD$  — общая хорда окружностей сечений сферы плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .

а) Докажите, что  $CD$  — диаметр окружности сечения сферы плоскостью  $\beta$ .

б) Вершина конуса совпадает с точкой  $B$ , а окружность основания — с окружностью сечения сферы плоскостью  $\beta$ . Найдите объём конуса, если радиус сферы равен 5.

**9.9.** Одно основание цилиндра лежит в плоскости основания правильной треугольной пирамиды, а окружность второго вписана в се-

чение пирамиды плоскостью, проходящей через середину её высоты.

а) Докажите, что радиус основания цилиндра в шесть раз меньше высоты основания пирамиды.

б) Найдите отношение объёмов цилиндра и пирамиды.

**9.10.** Одно основание цилиндра лежит в плоскости основания правильной четырёхугольной пирамиды, а окружность второго вписана в сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку на её высоте, делящую эту высоту в отношении  $1 : 2$ , считая от вершины.

а) Докажите, что радиус основания цилиндра в шесть раз меньше стороны основания пирамиды.

б) Найдите отношение объёмов цилиндра и пирамиды.

**9.11.** На окружности основания конуса с вершиной  $P$  выбраны точки  $A$  и  $B$ , делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как  $1 : 2$ .

а) Пусть  $MN$  — диаметр окружности основания, перпендикулярный хорде  $AB$ . Докажите, что объём одной из пирамид  $PABN$  и  $PABM$  вдвое больше объёма другой.

б) Найдите площадь сечения конуса плоскостью  $ABP$ , если радиус основания конуса равен  $6$ , а длина его образующей равна  $7$ .

**9.12.** В окружность основания конуса с вершиной  $P$  вписан правильный шестиугольник  $ABCDEF$ .

а) Докажите, что объём пирамиды  $PABD$  вдвое больше объёма пирамиды  $PDEF$ .

б) Найдите площадь сечения конуса плоскостью  $ABP$ , если радиус основания конуса равен  $6$ , а длина его образующей равна  $9$ .

**9.13.** Диаметр окружности основания цилиндра равен  $20$ , образующая цилиндра равна  $28$ . Плоскость  $\alpha$  пересекает его основания по хордам длины  $12$  и  $16$ .

а) Пусть  $M$  и  $N$  — середины этих хорд,  $P$  — точка пересечения прямой  $MN$  с осью цилиндра. Докажите, что расстояния от точки  $P$  до плоскостей основания цилиндра относятся как  $3 : 4$ .

б) Найдите тангенс угла между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью основания цилиндра.

**9.14.** Диаметр окружности основания цилиндра равен  $26$ , образующая цилиндра равна  $21$ . Плоскость  $\alpha$  пересекает его основания по хордам длины  $24$  и  $10$ .

а) Пусть  $M$  и  $N$  — середины этих хорд,  $P$  — точка пересечения прямой  $MN$  с осью цилиндра. Докажите, что расстояния от точки  $P$  до плоскостей основания цилиндра относятся как  $5 : 12$ .

б) Найдите тангенс угла между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью основания цилиндра.

**9.15.** Через точку  $P$ , лежащую на диаметре  $AB$  шара, проведена плоскость, перпендикулярная этому диаметру и пересекающая шар по кругу радиуса  $r$ .

а) Докажите, что  $r^2 = AP \cdot PB$ .

б) Найдите высоту конуса наибольшего возможного объёма, вписанного в шар радиуса  $R$ .

**9.16.** Основания цилиндра — сечения шара плоскостями, перпендикулярными его диаметру  $AB$ .

а) Докажите, что квадрат образующей цилиндра равен разности квадратов диаметров шара и основания цилиндра.

б) Найдите высоту цилиндра наибольшего возможного объёма, вписанного в шар радиуса  $R$ .

**9.17.** Угол при вершине осевого сечения конуса равен  $\arccos \frac{7}{8}$ .

а) Докажите, что площадь полной поверхности конуса в пять раз больше площади его основания.

б) Найдите угол в развёртке боковой поверхности.

**9.18.** Угол при вершине осевого сечения конуса равен  $\arccos \frac{7}{9}$ .

а) Докажите, что площадь полной поверхности конуса в четыре раза больше площади его основания.

б) Найдите угол в развёртке боковой поверхности.

**9.19.** Вокруг куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  описана сфера, т. е. все вершины куба лежат на сфере. На ребре  $CC_1$  взята точка  $M$ , при этом плоскость  $ABM$  образует угол  $15^\circ$  с плоскостью  $ABC$ .

а) Докажите, что расстояние от центра сферы до плоскости  $ABM$  вдвое меньше радиуса окружности, описанной около грани куба.

б) Найдите длину линии пересечения плоскости  $ABM$  и сферы, если ребро куба равно 2.

**9.20.** Вокруг единичного куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  описана сфера. На ребре  $B_1 C_1$  взята точка  $M$ , при этом плоскость  $ABM$  образует угол  $75^\circ$  с плоскостью  $ABC$ .

а) Докажите, что расстояние от центра сферы до плоскости  $ABM$  вдвое меньше радиуса окружности, описанной около грани куба.

б) Найдите длину линии пересечения плоскости  $ABM$  и сферы.

## § 10. Элементы правильных пирамид

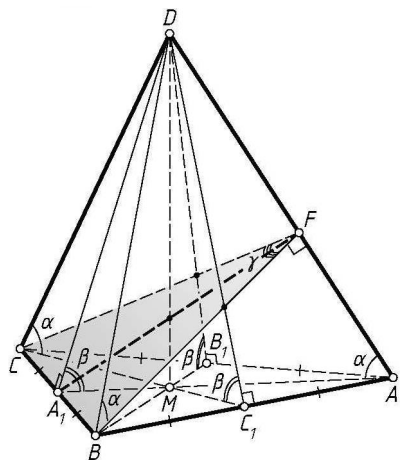
**Определение.** Пирамида называется правильной, если её основание — правильный многоугольник, а высота пирамиды проходит через центр основания.

Боковые рёбра правильной пирамиды равны, боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Двугранные углы при основании равны, двугранные углы при боковых рёбрах равны.

### 1. Правильная треугольная пирамида

Основание правильной треугольной пирамиды — равносторонний треугольник, его центр — точка пересечения медиан (высот, биссектрис, серединных перпендикуляров к сторонам).

Пусть  $DABC$  — правильная треугольная пирамида с вершиной  $D$ ,  $M$  — центр основания,  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — середины сторон соответственно  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  основания  $ABC$ . Тогда  $MA$ ,  $MB$  и  $MC$  — ортогональные проекции боковых рёбер  $DA$ ,  $DB$  и  $DC$  на плоскость основания;  $MA_1$ ,  $MB_1$  и  $MC_1$  — ортогональные проекции апофем  $DA_1$ ,  $DB_1$  и  $DC_1$  на плоскость основания.



Если сторона основания равна  $a$ , то

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad MA = MB = MC = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$MA_1 = MB_1 = MC_1 = \frac{1}{3}AA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a}{2\sqrt{3}}, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Из теоремы о трёх перпендикулярах следует, что противоположные рёбра правильной треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, т. е.  $AB \perp CD$ ,  $AC \perp BD$  и  $BC \perp AD$ .

Угол между боковым ребром и плоскостью основания (будем обозначать его  $\alpha$ ):

$$\angle DAM = \angle DBM = \angle DCM = \alpha.$$

Угол между боковой гранью и основанием (будем обозначать его  $\beta$ ):

$$\angle DA_1M = \angle DB_1M = \angle DC_1M = \beta.$$

Пусть  $F$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $A_1$  на прямую  $DA$ . Тогда  $DA$  — перпендикуляр к плоскости  $BFC$ , так как  $DA \perp A_1F$  и  $DA \perp BC$ . Значит, угол между боковыми гранями  $ABD$  и  $ACD$  — это угол  $BFC$  (будем обозначать его  $\gamma$ ). Аналогично строятся углы при остальных боковых рёбрах пирамиды. Кроме того,  $A_1F$  — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых  $DA$  и  $BC$ , так что расстояние между этими прямыми равно длине отрезка  $A_1F$ .

**Пример 1.** Все рёбра треугольной пирамиды  $DABC$  равны  $a$  (правильный тетраэдр). Найдите:

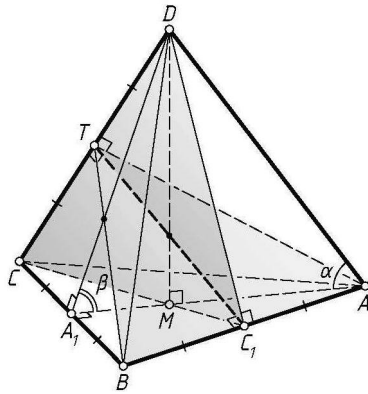
- высоту тетраэдра;
- объём;
- угол между ребром  $AD$  и плоскостью  $ABC$ ;
- угол между гранями;
- расстояние между скрещивающимися рёбрами;
- \* радиус описанного шара (все вершины пирамиды лежат на поверхности шара);
- \* радиус вписанного шара (все грани пирамиды касаются шара).

*Ответ:* а)  $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ ; б)  $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ ; в)  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$ ; г)  $\arccos \frac{1}{3}$ ; д)  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ ; е)  $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ ; ж)  $r = \frac{1}{3}R = \frac{a\sqrt{6}}{12}$ .

**Решение.** а) Правильный тетраэдр — это частный случай правильной треугольной пирамиды; его высота, проведённая из вершины  $D$ , проходит через центр  $M$  равностороннего треугольника  $ABC$ . Из прямоугольного треугольника  $AMD$  находим, что

$$DM = \sqrt{DA^2 - AM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\text{б) Имеем } V_{DABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot DM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$



в) Из прямоугольного треугольника  $AMD$  находим, что

$$\cos \alpha = \cos \angle DAM = \frac{AM}{DA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

г) Пусть  $A_1$  — середина ребра  $BC$ . Из прямоугольного треугольника  $A_1MD$  находим, что

$$\cos \beta = \cos \angle DA_1M = \frac{MA_1}{DA_1} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}.$$

д) Пусть  $C_1$  и  $T$  — середины противоположных ребер  $AB$  и  $CD$  соответственно. В равнобедренном треугольнике  $ATB$  медиана  $TC_1$  является высотой, значит,  $TC_1 \perp AB$ . В равнобедренном треугольнике  $CC_1D$  медиана  $TC_1$  также является высотой, значит,  $TC_1 \perp CD$ . Следовательно,  $TC_1$  — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых  $AB$  и  $CD$ . Из прямоугольного треугольника  $CC_1T$  находим, что

$$TC_1 = \sqrt{CC_1^2 - CT^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \quad \triangleleft$$

**Пример 2.** Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна  $a$ , боковая грань образует с плоскостью основания угол  $45^\circ$ . Найдите:

- объем пирамиды;
- угол между боковым ребром и плоскостью основания;
- расстояние между скрещивающимися ребрами;
- угол между боковыми гранями;
- расстояние от точки  $B$  до плоскости  $ADC$ ;





г) Медиана  $FA_1$  треугольника  $BFC$  является его высотой, значит,  $BFC$  — равнобедренный треугольник, а  $A_1F$  — его биссектриса. Тогда  $\angle BFA_1 = \frac{\gamma}{2}$  и

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{BA_1}{A_1F} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{15}}{10}} = \frac{\sqrt{15}}{3}.$$

Следовательно,  $\gamma = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{15}}{3}$ . Тогда

$$\cos \gamma = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{5}{3}}{1 + \frac{5}{3}} = -\frac{1}{4}.$$

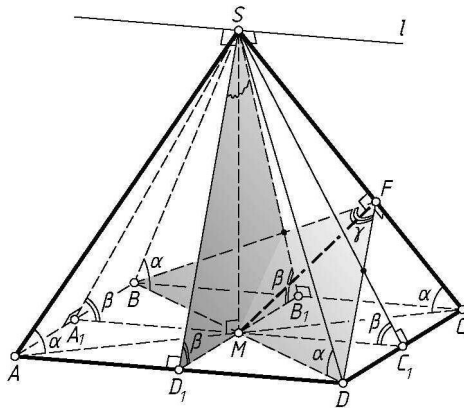
д) Пусть  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $B$  на прямую  $DB_1$ . Тогда  $BH \perp DB_1$  и  $BH \perp AC$ , значит,  $BH$  — перпендикуляр к плоскости  $ADC$ , а расстояние от точки  $B$  до этой плоскости равно длине отрезка  $BH$ . Из прямоугольного треугольника  $BHB_1$  находим, что

$$BH = BB_1 \sin \beta = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{4}. \quad \triangleleft$$

## 2. Правильная четырёхугольная пирамида

Основание правильной четырёхугольной пирамиды — квадрат, его центр — точка пересечения диагоналей.

Пусть  $SABCD$  — правильная четырёхугольная пирамида с вершиной  $S$ ,  $M$  — центр основания,  $A_1, B_1, C_1$  и  $D_1$  — середины сторон соответственно  $AB, BC, CD$  и  $AD$  основания  $ABCD$ . Тогда  $MA, MB, MC$  и  $MD$  — ортогональные проекции боковых рёбер  $SA, SB, SC$  и  $SD$  на плоскость основания;  $MA_1, MB_1, MC_1$  и  $MD_1$  — ортогональные проекции апофем  $SA_1, SB_1, SC_1$  и  $SD_1$  на плоскость основания.



Если сторона основания равна  $a$ , то

$$AC = BD = a\sqrt{2}, \quad MA = MB = MC = MD = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

$$MA_1 = MB_1 = MC_1 = MD_1 = \frac{1}{2}B_1D_1 = \frac{a}{2}, \quad S_{ABCD} = a^2.$$

Из теоремы о трёх перпендикулярах следует, что боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с этим ребром диагонали основания, т. е.  $SA \perp BD$ ,  $SC \perp BD$ ,  $SB \perp AC$  и  $SD \perp AC$ .

Угол между боковым ребром и плоскостью основания (будем обозначать его  $\alpha$ ):

$$\angle SAM = \angle SBM = \angle SCM = \angle SDM = \alpha.$$

Угол между боковой гранью и основанием (будем обозначать его  $\beta$ ):

$$\angle SA_1M = \angle SB_1M = \angle SC_1M = \angle SD_1M = \beta.$$

Пусть  $F$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на прямую  $SC$ . Тогда  $SC$  — перпендикуляр к плоскости  $BFD$ , так как  $SC \perp MF$  и  $SC \perp BD$ . Значит, угол между боковыми гранями  $BSC$  и  $DSC$  — это угол  $BFD$  (будем обозначать его  $\gamma$ ). Аналогично строятся углы при остальных боковых рёбрах пирамиды. Кроме того,  $MF$  — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых  $SC$  и  $BD$ , так что расстояние между этими прямыми равно длине отрезка  $MF$ .

Плоскости  $ASD$  и  $BSC$  проходят через параллельные прямые  $AD$  и  $BC$ , значит, прямая  $l$  пересечения этих плоскостей проходит через точку  $S$  параллельно им. Отсюда следует, что линейный угол двугранного угла между противоположными боковыми гранями  $ASD$  и  $BSC$  — это угол между апофемами  $SB_1$  и  $SD_1$ , т. е. угол  $B_1SD_1$ .

**Пример 3.** Сторона основания  $ABCD$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  равна  $a$ , боковое ребро образует с плоскостью основания угол  $60^\circ$ . Найдите:

- объём пирамиды;
- угол между боковой гранью и плоскостью основания;
- расстояние между диагональю основания и скрещивающимся с ней боковым ребром;
- угол между соседними боковыми гранями;
- угол между противоположными боковыми гранями;
- расстояние от точки  $A$  до плоскости  $CSD$ ;
- \* радиус описанного шара;
- \* радиус вписанного шара;
- \* угол между апофемой и соседней боковой гранью.



г) Медиана  $FM$  треугольника  $BFD$  является его высотой, значит,  $BFD$  — равнобедренный треугольник, а  $FM$  — его биссектриса. Тогда  $\angle BFM = \frac{\gamma}{2}$  и

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{BM}{FM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,  $\gamma = 2 \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}}$ . Тогда

$$\cos \gamma = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{4}{3}}{1 + \frac{4}{3}} = -\frac{1}{7}.$$

д) Линейный угол двугранного угла, образованного противоположными боковыми гранями  $ASB$  и  $CSD$ , — это угол  $A_1SC_1$ . Из прямоугольного треугольника  $A_1SM$  находим, что

$$\operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \angle A_1SC_1 \right) = \operatorname{tg} \angle A_1SM = \frac{MA_1}{SM} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Следовательно,  $\angle A_1SC_1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{6}}$ . Тогда

$$\cos \angle A_1SC_1 = \frac{1 - \frac{1}{6}}{1 + \frac{1}{6}} = \frac{5}{7}.$$

е) Поскольку  $AB \parallel CD$ , прямая  $AB$  параллельна плоскости  $CSD$ , значит, все точки прямой  $AB$  равноудалены от этой плоскости. Тогда искомое расстояние равно расстоянию от точки  $A_1$  до плоскости  $CSD$ , т. е. высоте  $A_1H$  треугольника  $A_1SC_1$ . Из прямоугольного треугольника  $A_1HC_1$  находим, что

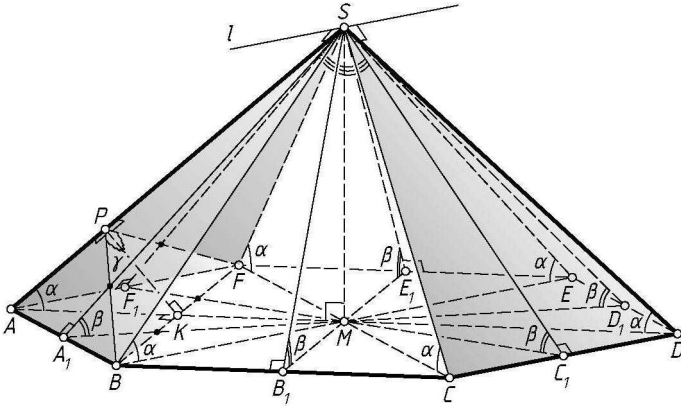
$$A_1H = A_1C_1 \sin \beta = a \cdot \sqrt{\frac{6}{7}} = a \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}. \quad \triangleleft$$

### 3. Правильная шестиугольная пирамида

Основание правильной шестиугольной пирамиды — правильный шестиугольник, его центр — точка пересечения больших диагоналей. Эти диагонали разбивают правильный шестиугольник на шесть равносторонних треугольников со сторонами, равными стороне шестиугольника.

Пусть  $SABCDEF$  — правильная шестиугольная пирамида с вершиной  $S$ ,  $M$  — центр основания,  $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1$  и  $F_1$  — середины сторон

соответственно  $AB, BC, CD, DE, EF$  и  $FA$  основания  $ABCDEF$ . Тогда  $MA, MB, MC, MD, ME$  и  $MF$  — ортогональные проекции боковых рёбер  $SA, SB, SC, SD, SE$  и  $SF$  на плоскость основания;  $MA_1, MB_1, MC_1, MD_1, ME_1$  и  $MF_1$  — ортогональные проекции апофем  $SA_1, SB_1, SC_1, SD_1, SE_1$  и  $SF_1$  на плоскость основания.



Если сторона основания равна  $a$ , то

$$MA = MB = MC = MD = ME = MF = a, \quad AD = BE = CF = 2a,$$

$$AC = BD = CE = DF = EA = FB = a\sqrt{3}, \quad FC \parallel AB, \quad AD \parallel BC, \quad BE \parallel CD,$$

$$MA_1 = MB_1 = MC_1 = MD_1 = ME_1 = MF_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{ABCDEF} = 6S_{\triangle AMB} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Из теоремы о трёх перпендикулярах следует, что  $SA \perp BF$ . Аналогично для остальных боковых рёбер. Кроме того, отрезки  $BF$  и  $AM$  делятся их точкой пересечения  $K$  пополам,  $BD \perp AB$  и т. д.

Угол между боковым ребром и плоскостью основания (будем обозначать его  $\alpha$ ):

$$\angle SAM = \angle SBM = \angle SCM = \angle SDM = \angle SEM = \angle SFM = \alpha.$$

Угол между боковой гранью и основанием (будем обозначать его  $\beta$ ):

$$\angle SA_1M = \angle SB_1M = \angle SC_1M = \angle SD_1M = \angle SE_1M = \angle SF_1M = \beta.$$

Пусть  $P$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $K$  на прямую  $SA$ . Тогда  $SA$  — перпендикуляр к плоскости  $BPF$ , так как  $SA \perp KP$  и  $SA \perp BF$ . Значит, угол между боковыми гранями  $ASB$  и  $ASF$  — это угол  $BPF$  (будем обозначать его  $\gamma$ ). Аналогично строятся

углы при остальных боковых рёбрах пирамиды. Кроме того,  $KP$  — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых  $SA$  и  $BF$ , так что расстояние между этими прямыми равно длине отрезка  $KP$ .

Плоскости противоположных боковых граней  $ASF$  и  $CSD$  проходят через параллельные прямые  $AF$  и  $CD$ , значит, прямая  $l$  пересечения этих плоскостей проходит через точку  $S$  параллельно этим прямым. Отсюда следует, что линейный угол двугранного угла между противоположными боковыми гранями  $ASF$  и  $CSD$  — это угол между апофемами  $SF_1$  и  $SC_1$ , т. е. угол  $C_1SF_1$ .

**Пример 4.** Сторона основания  $ABCDEF$  правильной шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$  равна  $a$ , а апофема пирамиды равна  $a\sqrt{3}$ . Найдите:

- объём пирамиды;
- угол между боковой гранью и плоскостью основания;
- угол между боковым ребром и плоскостью основания;
- расстояние между боковым ребром  $SA$  и диагональю  $BF$  основания;
- угол между соседними боковыми гранями;
- угол между противоположными боковыми гранями;
- расстояние от точки  $A$  до плоскости  $DSE$ ;
- \* радиус описанного шара;
- \* радиус вписанного шара;
- \* угол между апофемой и соседней боковой гранью.

*Ответ:* а)  $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$ ; б)  $60^\circ$ ; в)  $\arccos \frac{2}{\sqrt{13}}$ ; г)  $\frac{3a}{2\sqrt{13}}$ ; д)  $2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{13}{3}} = \arccos\left(-\frac{5}{8}\right)$ ; е)  $60^\circ$ ; ж)  $\frac{3}{2}a$ ; з)  $R = \frac{13}{12}a$ ; и)  $r = \frac{a}{2}$ ; к)  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{8}$ .

**Решение.** Используем введённые выше обозначения.

а) Поскольку  $MA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , в прямоугольном треугольнике  $SA_1M$  катет  $MA_1$  вдвое меньше гипотенузы. Значит,  $\angle A_1SM = 30^\circ$ . Тогда

$$SM = MA_1 \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}a.$$

Следовательно,

$$V_{SABCDEF} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABCDEF} \cdot SM = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2}a = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}.$$

б) Из прямоугольного треугольника  $SA_1M$  находим, что

$$\beta = \angle SA_1M = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$



Следовательно,  $\gamma = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{13}{3}}$ . Тогда

$$\cos \gamma = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{13}{3}}{1 + \frac{13}{3}} = -\frac{5}{8}.$$

е) Линейный угол двугранного угла, образованного противолежащими боковыми гранями  $ASF$  и  $CSD$ , — это угол  $F_1SC_1$ . Треугольник  $F_1SC_1$  равносторонний, поэтому  $\angle F_1SC_1 = 60^\circ$ .

ж) Поскольку  $AB \parallel DE$ , прямая  $AB$  параллельна плоскости  $DSE$ , значит, все точки прямой  $AB$  равноудалены от этой плоскости. Тогда искомое расстояние равно расстоянию от точки  $A_1$  до плоскости  $DSE$ , т. е. высоте  $A_1H$  равностороннего треугольника  $A_1SD_1$ . Следовательно,  $A_1H = SM = \frac{3}{2}a$ .  $\triangleleft$

### Тренировочные задачи

1. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна  $a$ , боковое ребро образует с плоскостью основания угол  $45^\circ$ . Найдите:

- объём пирамиды;
- угол между боковой гранью и основанием;
- расстояние между скрещивающимися рёбрами;
- угол между боковыми гранями;
- расстояние от вершины основания до противоположной боковой грани;
- \* радиус описанного шара;
- \* радиус вписанного шара;
- \* угол между апофемой и соседней боковой гранью.

2. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна  $a$ , боковая грань образует с плоскостью основания угол  $60^\circ$ . Найдите:

- объём пирамиды;
- угол между боковым ребром и основанием;
- расстояние между диагональю основания и скрещивающимся с ней боковым ребром;
- угол между противоположными боковыми гранями;
- угол между соседними боковыми гранями;
- расстояние от вершины основания до противоположной боковой грани;
- \* радиус описанного шара;
- \* радиус вписанного шара;
- \* угол между апофемой и соседней боковой гранью.



3. Страна основания и высота правильной шестиугольной пирамиды равны  $a$ . Найдите:

- а) угол между боковым ребром и основанием;
- б) угол между боковой гранью и основанием;
- в) плоский угол при вершине пирамиды;
- г) угол между соседними боковыми гранями;
- д) расстояние от вершины основания до противоположной боковой грани;
- е)\* радиус описанного шара;
- ж)\* радиус вписанного шара;
- з)\* угол между апофемой и соседней боковой гранью.

4. Страна основания и апофема правильной треугольной пирамиды равны  $a$ . Найдите:

- а)\* радиус описанного шара;
- б)\* радиус вписанного шара;
- в) угол между боковыми гранями;
- г)\* угол между апофемой и соседней гранью.

5. Страна основания и апофема правильной четырёхугольной пирамиды равны  $a$ . Найдите:

- а)\* радиус описанного шара;
- б)\* радиус вписанного шара;
- в) угол между соседними боковыми гранями;
- г)\* угол между апофемой и соседней боковой гранью.

6. Страна основания правильной треугольной пирамиды равна  $a$ , а расстояние между скрещивающимися рёбрами равно  $\frac{3}{8}a$ . Найдите:

- а) угол между боковым ребром и плоскостью основания;
- б) угол между боковой гранью и плоскостью основания;
- в) угол между боковыми гранями;
- г)\* радиус описанного шара;
- д)\* радиус вписанного шара;
- е)\* угол между апофемой и соседней боковой гранью.

7. Страна основания правильной четырёхугольной пирамиды равна  $a$ , а расстояние между диагональю основания и скрещивающимся с ней боковым ребром равно  $\frac{a}{4}$ . Найдите:

- а) угол между боковым ребром и плоскостью основания;
- б) угол между боковой гранью и плоскостью основания;
- в) угол между соседними боковыми гранями;
- г)\* радиус описанного шара;
- д)\* радиус вписанного шара;

е)\* угол между апофемой и соседней боковой гранью.

**8\***. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна  $a$ ; угол между апофемой и соседней боковой гранью равен  $45^\circ$ .  
Найдите:

- а) угол между боковым ребром и основанием;
- б) угол между боковой гранью и основанием;
- в) угол между боковыми гранями;
- г) радиус описанного шара;
- д) радиус вписанного шара.

## Приложение 1. Метод координат

Приведём основные формулы.

1. Расстояние между точками  $A(x_1; y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$  (как и модуль вектора  $\overrightarrow{AB}$ ) в прямоугольной декартовой системе координат Охуз находится по формуле

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Координаты середины  $C$  отрезка  $AB$  равны средним арифметическим соответствующих координат его концов:  $x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ,  $y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}$ ,  $z_C = \frac{z_1 + z_2}{2}$ . Координаты точки пересечения медиан треугольника равны средним арифметическим соответствующих координат его вершин.

2. Скалярным произведением векторов  $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$  и  $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$  называется число

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

3. Если  $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$  и  $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$  — ненулевые векторы, а  $\varphi$  — угол между ними, то

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

4. Векторы  $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$  и  $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$  перпендикулярны (ортогональны) тогда и только тогда, когда  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , или  $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$ .

5. Уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  перпендикулярно ненулевому вектору  $\vec{n}(A; B; C)$  (вектору нормали плоскости), имеет вид

$$\overrightarrow{M_0 M} \cdot \vec{n} = 0, \quad \text{или} \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

6. Любое линейное уравнение с тремя неизвестными

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где числа  $A$ ,  $B$  и  $C$  одновременно не равны нулю, есть уравнение некоторой плоскости, причём  $\vec{n}(A; B; C)$  — вектор нормали этой плоскости.

7. (Уравнение плоскости в отрезках.) Если плоскость не проходит через начало координат, то её уравнение можно представить в виде

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

где  $(p; 0; 0)$ ,  $(0; q; 0)$ ,  $(0; 0; r)$  — точки пересечения плоскости с осями  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно.

Если плоскость не проходит через начало координат и параллельна одной из координатных осей, например  $Ox$ , то её уравнение имеет вид

$$\frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

где  $(0; q; 0)$ ,  $(0; 0; r)$  — точки пересечения плоскости с осями  $Oy$  и  $Oz$  соответственно.

8. Косинус угла между плоскостями равен модулю косинуса угла между векторами нормалей этих плоскостей, т. е. если  $\varphi$  — угол между плоскостями, заданными уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то

$$\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

9. Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  параллельно ненулевому вектору  $\vec{m}(a; b; c)$  (направляющий вектор прямой), имеют вид

$$x - x_0 = at, \quad y - y_0 = bt, \quad z - z_0 = ct.$$

10. Расстояние  $d$  от точки  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  до плоскости, заданной уравнением  $Ax + By + Cz + D = 0$ , находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

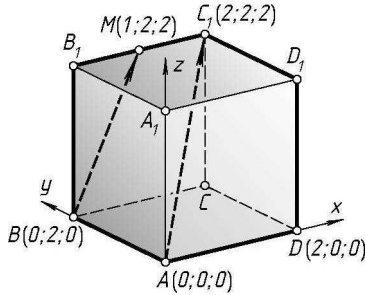
11. Если  $\varphi$  — угол между прямой с направляющим вектором  $\vec{m}(a; b; c)$  и плоскостью  $Ax + By + Cz + D = 0$  с вектором нормали  $\vec{n}(A; B; C)$ , то  $\sin \varphi$  равен модулю косинуса угла между этими векторами, т. е.

$$\sin \varphi = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

**Пример 1.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точка  $M$  — середина ребра  $B_1 C_1$ . Найдите угол между прямыми  $AC_1$  и  $BM$ .

*Ответ:*  $\arccos \sqrt{\frac{3}{5}}$ .

**Решение.** Введём прямоугольную систему координат, взяв за её начало вершину  $A$  и направив оси  $Ax$ ,  $Ay$  и  $Az$  по лучам  $AD$ ,  $AB$



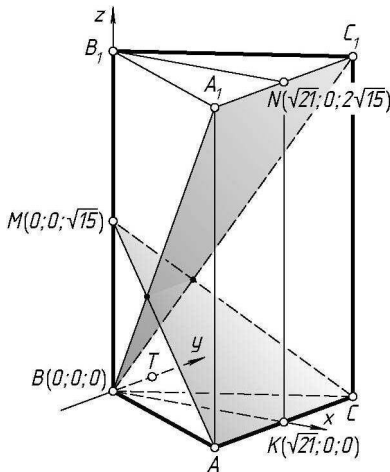
и  $AA_1$  соответственно. Пусть ребро куба равно 2. Найдём координаты нужных точек:  $A(0; 0; 0)$ ,  $C_1(2; 2; 2)$ ,  $B(0; 2; 0)$ ,  $M(1; 2; 2)$ . Косинус угла между прямыми  $AC_1$  и  $BM$  равен модулю косинуса угла между векторами  $\overrightarrow{AC_1}(2; 2; 2)$  и  $\overrightarrow{BM}(1; 0; 2)$ , т. е.

$$\cos \varphi = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2}} = \sqrt{\frac{3}{5}}. \quad \triangleleft$$

**Пример 2.** Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$  со стороной основания  $2\sqrt{7}$  и боковым ребром  $2\sqrt{15}$ . Точка  $M$  — середина ребра  $BB_1$ . Найдите угол между плоскостями  $AMC$  и  $A_1BC_1$ .

*Ответ:*  $\arccos \frac{1}{6}$ .

**Решение.** Пусть  $K$  и  $N$  — середины рёбер  $AC$  и  $A_1C_1$  соответственно. На прямой, проходящей через вершину  $B$  параллельно  $AC$ , отметим точку  $T$  так, чтобы луч  $BT$  был сонаправлен с лучом  $AC$ .



Введём прямоугольную систему координат, взяв за её начало вершину  $V$  и направив оси  $Vx$ ,  $Vy$  и  $Vz$  по лучам  $VK$ ,  $VT$  и  $VB_1$  соответственно. Найдём координаты точек:  $B(0; 0; 0)$ ,  $K(\sqrt{21}; 0; 0)$ ,  $N(\sqrt{21}; 0; 2\sqrt{15})$ ,  $M(0; 0; \sqrt{15})$ . Тогда уравнение плоскости  $A_1BC_1$  можно записать в виде  $z = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{7}}x$ , или  $2x\sqrt{5} - z\sqrt{7} = 0$ , а уравнение плоскости  $AMC$  имеет вид  $\frac{x}{\sqrt{21}} + \frac{z}{\sqrt{15}} = 1$ , или  $x\sqrt{5} + z\sqrt{7} - \sqrt{105} = 0$ . Косинус угла между плоскостями  $A_1BC_1$  и  $AMC$  равен модулю косинуса угла между векторами нормалей этих плоскостей, т. е. между векторами  $\vec{n}_1(2\sqrt{5}; 0; -\sqrt{7})$  и  $\vec{n}_2(\sqrt{5}; 0; \sqrt{7})$ . Следовательно,

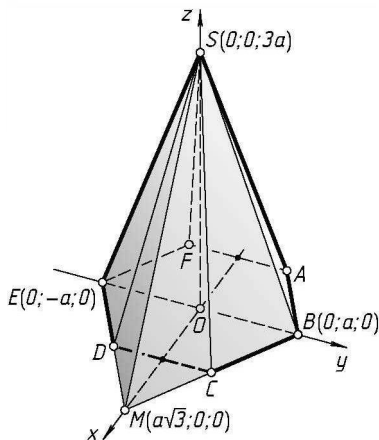
$$\cos \varphi = \frac{|2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + 0 \cdot 0 - \sqrt{7} \cdot \sqrt{7}|}{\sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{7})^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{7})^2}} = \frac{1}{6}. \quad \triangleleft$$

**Пример 3.** Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$ . Сторона основания  $ABCDEF$  втрое меньше высоты  $SO$ . Найдите угол между плоскостями  $BSC$  и  $DSE$ .

*Ответ:*  $\arccos \frac{5}{13}$ .

**Решение.** Положим  $AB = a$ , тогда  $SO = 3a$ . Пусть  $M$  — точка пересечения прямых  $BC$  и  $DE$ . Введём прямоугольную систему координат, взяв за её начало точку  $O$  и направив оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  по лучам  $OM$ ,  $OB$  и  $OS$  соответственно. Выпишем координаты нужных нам точек:  $O(0; 0; 0)$ ,  $B(0; a; 0)$ ,  $E(0; -a; 0)$ ,  $M(a\sqrt{3}; 0; 0)$  и  $S(0; 0; 3a)$ . Тогда уравнения плоскостей  $BSC$  и  $DSE$  можно записать в виде

$$\frac{x}{a\sqrt{3}} + \frac{y}{a} + \frac{z}{3a} = 1, \quad \frac{x}{a\sqrt{3}} - \frac{y}{a} + \frac{z}{3a} = 1,$$



или

$$x\sqrt{3} + 3y + z - 3a = 0, \quad x\sqrt{3} - 3y + z - 3a = 0.$$

Косинус угла  $\varphi$  между плоскостями равен модулю косинуса угла между векторами нормалей этих плоскостей, т. е.

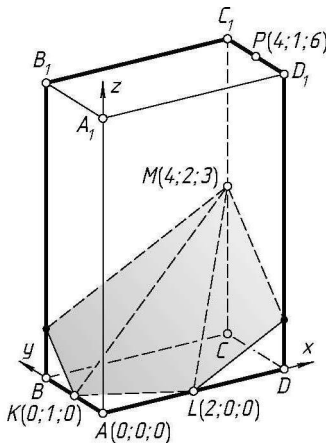
$$\cos \varphi = \frac{|\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{5}{13}. \quad \triangleleft$$

**Пример 4.** Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с рёбрами  $AB = 2$ ,  $AD = 4$ ,  $AA_1 = 6$ . Найдите расстояние от середины ребра  $D_1 C_1$  до плоскости, проходящей через середины рёбер  $AB$ ,  $AD$  и  $CC_1$ .

Ответ:  $\frac{8}{3}$ .

**Решение.** Пусть  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $P$  — середины рёбер  $AB$ ,  $AD$ ,  $CC_1$  и  $C_1 D_1$  соответственно. Введём прямоугольную систему координат, взяв за её начало вершину  $A$  и направив оси  $Ax$ ,  $Ay$  и  $Az$  по лучам  $AD$ ,  $AB$  и  $AA_1$  соответственно. Найдём координаты следующих точек:  $L(2; 0; 0)$ ,  $K(0; 1; 0)$ ,  $M(4; 2; 3)$ ,  $P(4; 1; 6)$ . Тогда уравнение плоскости  $KLM$  в отрезках имеет вид  $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{c} = 1$ . Подставив в это уравнение координаты точки  $M$ , найдём, что  $c = -1$ . Таким образом, уравнение плоскости  $KLM$  можно записать в виде  $\frac{x}{2} + y - z = 1$ , или  $x + 2y - 2z - 2 = 0$ . Пусть расстояние от точки  $P(4; 1; 6)$  до этой плоскости равно  $d$ . Тогда

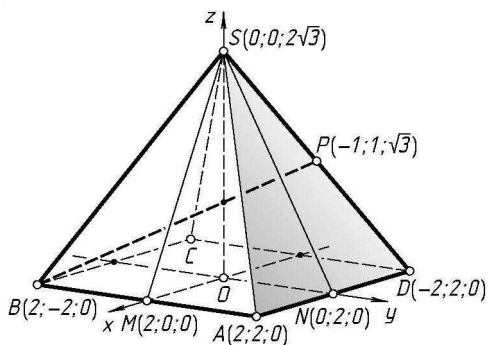
$$d = \frac{|4 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 6 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{8}{3}. \quad \triangleleft$$



**Пример 5.** Дана правильная четырёхугольная пирамида  $SABCD$  с вершиной  $S$ . Известно, что её высота относится к стороне основания как  $\sqrt{3} : 2$ . Найдите угол между плоскостью  $ASD$  и прямой, проходящей через точку  $B$  и середину ребра  $SD$ .

Ответ:  $\arcsin \frac{2}{\sqrt{7}}$ .

**Решение.** Пусть высота  $SO$  пирамиды равна  $2\sqrt{3}$ , сторона основания равна 4,  $P$  — середина ребра  $SD$ ,  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AB$  и  $AD$  соответственно. Введём прямоугольную систему координат, взяв за её начало точку  $O$  и направив оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  по лучам  $OM$ ,  $ON$  и  $OS$  соответственно. Найдём координаты следующих точек:  $N(0; 2; 0)$ ,  $S(0; 0; 2\sqrt{3})$ ,  $B(2; -2; 0)$ ,  $P(-1; 1; \sqrt{3})$ . Тогда уравнение плоскости  $ASD$  можно записать в виде  $\frac{y}{2} + \frac{z}{2\sqrt{3}} = 1$ , или  $y\sqrt{3} + z - 2\sqrt{3} = 0$ , а в качестве направляющего вектора прямой  $BP$  можно взять вектор  $\vec{PB}(3; -3; -\sqrt{3})$ .



Если  $\varphi$  — искомый угол, то  $\sin \varphi$  равен модулю косинуса угла между вектором нормали  $\vec{n}(0; \sqrt{3}; 1)$  плоскости  $ASD$  и вектором  $\vec{PB}(3; -3; -\sqrt{3})$ , т. е.

$$\sin \varphi = \frac{|0 \cdot 3 + \sqrt{3} \cdot (-3) + 1 \cdot (-\sqrt{3})|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 3^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{2}{\sqrt{7}}. \quad \triangleleft$$

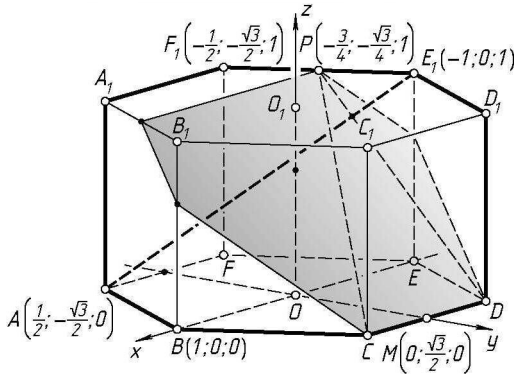
**Пример 6.** Боковое ребро правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  равно стороне основания. Точка  $P$  — середина ребра  $E_1 F_1$ . Найдите угол между прямой  $AE_1$  и плоскостью  $CDP$ .

Ответ:  $\arcsin \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{43}}$ .

**Решение.** Пусть  $O$  и  $O_1$  — центры оснований  $ABCDEF$  и  $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  соответственно,  $M$  — середина ребра  $CD$ , и пусть сто-



рона основания равна 1. Введём прямоугольную систему координат, взяв за её начало точку  $O$  и направив оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  по лучам  $OB$ ,  $OM$  и  $OO_1$  соответственно. Найдём координаты следующих точек:  $M\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ ,  $P\left(-\frac{3}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{4}; 1\right)$ ,  $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ ,  $E_1(-1; 0; 1)$ . Плоскость  $CDP$  проходит через прямую  $CD$ , параллельную оси  $Ox$ , поэтому её уравнение можно записать в виде  $\frac{y}{OM} + \frac{z}{c} = 1$ , или  $\frac{2y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{c} = 1$ . Кроме того, координаты точки  $P$  удовлетворяют этому уравнению, т. е.  $-\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{c} = 1$ . Отсюда находим, что  $c = \frac{2}{3}$ . Таким образом, уравнение плоскости  $CDP$  имеет вид  $\frac{2y}{\sqrt{3}} + \frac{3z}{2} = 1$ , или  $4y + 3z\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0$ .



В качестве направляющего вектора прямой  $AE_1$  можно взять вектор  $\overrightarrow{E_1A}\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -1\right)$ .

Если  $\varphi$  — искомый угол, то  $\sin \varphi$  равен модулю косинуса угла между вектором нормали  $\vec{n}(0; 4; 3\sqrt{3})$  плоскости  $CDP$  и вектором  $\overrightarrow{E_1A}\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -1\right)$ , т. е.

$$\sin \varphi = \frac{\left|0 \cdot \frac{3}{2} + 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\sqrt{3} \cdot (-1)\right|}{\sqrt{4^2 + (3\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{43}} \quad \triangleleft$$

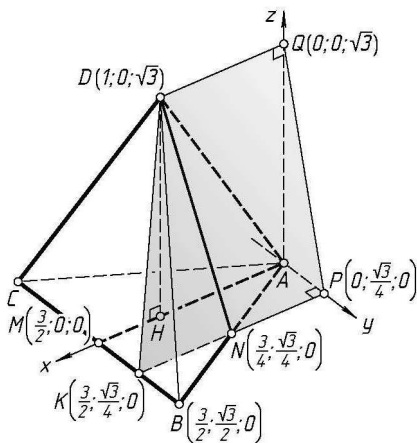
**Пример 7.** Дана правильная треугольная пирамида  $DABC$  с вершиной  $D$ , стороной основания  $AB = \sqrt{3}$  и высотой  $DH = \sqrt{3}$ . Найдите расстояние между прямыми  $AM$  и  $DN$ , где  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $BC$  и  $AB$  соответственно.

Ответ:  $\sqrt{\frac{3}{17}}$ .

**Решение.** Пусть  $P$  — проекция точки  $N$  на прямую, проведённую через точку  $A$  параллельно  $BC$ , а  $Q$  — проекция точки  $D$  на прямую, проведённую через точку  $A$  параллельно  $DH$ . Введём прямоугольную систему координат, взяв за её начало точку  $A$  и направив оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  по лучам  $AM$ ,  $AP$  и  $AQ$  соответственно. Найдём координаты следующих точек:  $A(0; 0; 0)$ ,  $M\left(\frac{3}{2}; 0; 0\right)$ ,  $D(1; 0; \sqrt{3})$ ,  $N\left(\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 0\right)$ . Пусть  $K$  — точка пересечения прямых  $NP$  и  $BC$ . Тогда прямая  $AM$  параллельна плоскости  $DNK$ , так как  $AM \parallel NK$ . Значит, расстояние между прямыми  $AM$  и  $DN$  равно расстоянию от произвольной точки прямой  $AM$  (например, от точки  $A(0; 0; 0)$ ) до этой плоскости. Уравнение плоскости  $DNK$  можно записать в виде  $\frac{y}{AP} + \frac{z}{AQ} = 1$ , или  $\frac{4y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}} = 1$ . Значит, уравнение плоскости  $DNK$  имеет вид  $4y + z - \sqrt{3} = 0$ . По формуле расстояния от точки до плоскости находим, что

$$d = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \sqrt{\frac{3}{17}}.$$

◁



## Приложение 2. Задачи ЕГЭ 2017 и 2018 г.

1. Длина диагонали куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$  равна 3. На луче  $A_1C$  отмечена точка  $P$  так, что  $A_1P = 4$ .

- а) Докажите, что  $PBDC_1$  — правильный тетраэдр.
- б) Найдите длину отрезка  $AP$ .

**Решение.** а) *Первый способ.* Поскольку  $A_1C = AB\sqrt{3}$ , а  $BD = BC_1 = DC_1 = AB\sqrt{2}$ , то  $AB = \sqrt{3}$ , а  $BD = BC_1 = DC_1 = \sqrt{6}$ .

Известно, что диагональ  $A_1C$  перпендикулярна плоскости  $BDC_1$ , проходит через центр  $H$  равностороннего треугольника  $BDC_1$  и делится им в отношении  $1 : 2$ , считая от точки  $C$ . Значит,

$$CH = \frac{1}{3}AC_1 = 1, \quad PH = PC + CH = 1 + 1 = 2,$$

а  $PH$  — высота правильной треугольной пирамиды  $PBDC_1$  с вершиной  $P$ .

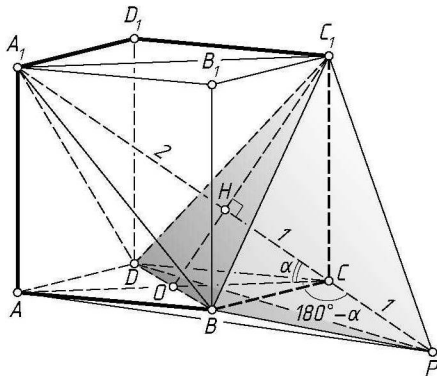
Пусть  $O$  — центр квадрата  $ABCD$ . Тогда

$$HC_1 = \frac{2}{3}C_1O = \frac{2}{3} \cdot \frac{BD\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}.$$

Из прямоугольного треугольника  $PHC_1$  находим, что

$$PC_1 = \sqrt{HC_1^2 + PH^2} = \sqrt{2 + 4} = \sqrt{6} = BD.$$

Аналогично  $PB = PD = \sqrt{6}$ . Таким образом, все грани пирамиды  $PBDC_1$  — правильные треугольники (со стороной  $\sqrt{6}$ ). Следовательно, это правильный тетраэдр.



*Второй способ.* Известно, что диагональ  $A_1C$  перпендикулярна плоскости  $BDC_1$ , проходит через центр  $H$  равностороннего треугольника  $BDC_1$  и делится им в отношении  $1:2$ , считая от точки  $C$ . Значит,

$$CH = \frac{1}{3}AC_1 = 1, \quad PH = PC + CH = 1 + 1 = 2 = A_1H.$$

Тогда точка  $P$  симметрична точке  $A_1$  относительно плоскости  $BDC_1$ , а тетраэдр  $PBDC_1$  симметричен правильному тетраэдру  $A_1BDC_1$ . Следовательно,  $PBDC_1$  также правильный тетраэдр.

б) Точка  $P$  лежит в плоскости  $AA_1C$ , так как она лежит на прямой  $A_1C$ , лежащей в этой плоскости. Длину отрезка  $AP$  найдём из треугольника  $APC$ .

Обозначим  $\angle ACA_1 = \alpha$ . Тогда

$$\angle ACP = 180^\circ - \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{AC}{A_1C} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\cos \angle ACP = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{AC^2 + CP^2 - 2AC \cdot CP \cos \angle ACP} = \\ &= \sqrt{6 + 1 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}} = \sqrt{6 + 1 + 4} = \sqrt{11}. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\sqrt{11}$ .

2. Сечением прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью  $\alpha$ , содержащей прямую  $BD_1$  и параллельной прямой  $AC$ , является ромб.

а) Докажите, что грань  $ABCD$  — квадрат.

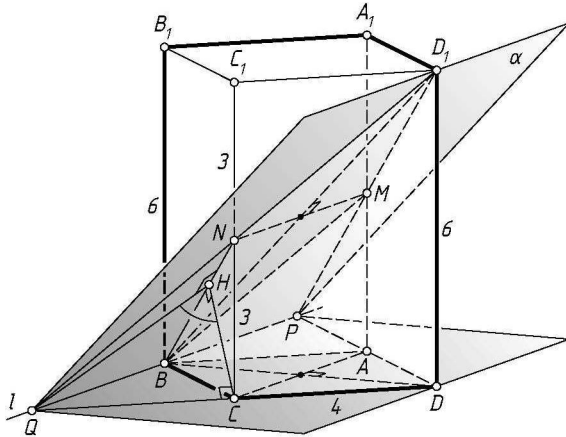
б) Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $BCC_1$ , если  $AA_1 = 6$ ,  $AB = 4$ .

**Решение.** а) Плоскость  $ABCD$  проходит через прямую  $AC$ , параллельную плоскости  $\alpha$ , и имеет с плоскостью  $\alpha$  общую точку  $B$ , следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой  $l$ , проходящей через точку  $B$  параллельно  $AC$ .

Пусть прямая  $l$  пересекает прямые  $AD$  и  $CD$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно,  $M$  — точка пересечения  $D_1P$  и  $AA_1$ ,  $N$  — точка пересечения  $D_1Q$  и  $CC_1$ . Тогда сечение параллелепипеда плоскостью  $\alpha$  — ромб  $BMD_1N$ .

Поскольку  $CQ \parallel AB$  и  $BQ \parallel AC$ , четырёхугольник  $ABQC$  — параллелограмм, поэтому  $CQ = AB = CD = C_1D_1$ . Треугольники  $CNQ$  и  $C_1ND_1$  равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, следовательно,

$N$  — середина  $QD_1$ . Аналогично докажем, что  $M$  — середина  $PD_1$ , поэтому  $MN$  — средняя линия треугольника  $PD_1Q$ ,  $MN \parallel PQ \parallel AC$ , а так как  $BD_1 \perp MN$  (как диагонали ромба), то  $BD_1 \perp AC$ . Тогда по теореме о трёх перпендикулярах  $BD \perp AC$ , т. е. диагонали прямоугольника  $ABCD$  перпендикулярны, следовательно, это квадрат.



б) Плоскости  $\alpha$  и  $BCC_1$  пересекаются по прямой  $BN$ , а  $QC$  — перпендикуляр к плоскости  $BCC_1$ . Пусть  $CH$  — высота прямоугольного треугольника  $BCN$ . Тогда по теореме о трёх перпендикулярах  $QH \perp BN$ . Значит,  $CHQ$  — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями  $\alpha$  и  $BCC_1$ . Тогда

$$CH = \frac{BC \cdot CN}{BN} = \frac{BC \cdot CN}{\sqrt{BC^2 + CN^2}} = \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{12}{5},$$

$$\operatorname{tg} \angle CHQ = \frac{CQ}{CH} = \frac{4}{\frac{12}{5}} = \frac{5}{3}. \quad \triangleleft$$

Ответ:  $\operatorname{arctg} \frac{5}{3}$ .

3. Основание пирамиды  $PABCD$  — трапеция  $ABCD$ , причём  $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$ . Плоскости  $PAB$  и  $PCD$  перпендикулярны плоскости основания, прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $K$ .

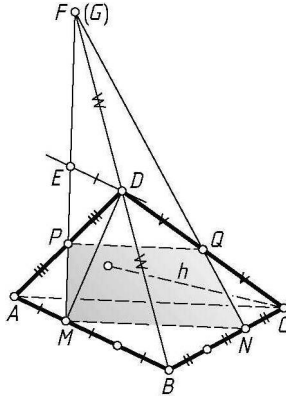
а) Докажите, что плоскости  $PAB$  и  $PCD$  перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды  $PKBC$ , если  $AB = BC = CD = 3$ , а высота пирамиды равна 8.

Решение. а) Плоскости  $PAB$  и  $PCD$ , перпендикулярные плоскости  $ABC$ , пересекаются по прямой, проходящей через точку  $P$  перпендикулярно плоскости  $ABC$ . Значит,  $PK$  — высота данной пирамиды.



и  $APM$  получаем, что  $DE = AM = \frac{1}{2}MB$ . Значит,  $DE$  — средняя линия треугольника  $BFM$ . Следовательно,  $BF = 2BD$ . Аналогично докажем, что если  $G$  — точка пересечения прямых  $BD$  и  $NQ$ , то  $BG = 2BD$ . Значит, точки  $F$  и  $G$  совпадают. Следовательно, точки  $P$ ,  $Q$ ,  $M$  и  $N$  лежат в плоскости пересекающихся прямых  $MP$  и  $NQ$ .



б) Пусть  $V$ ,  $V_1$  и  $V_2$  — объёмы треугольных пирамид  $DABC$ ,  $NFBM$  и  $QFDP$  соответственно,  $S_{\Delta ADB} = S$ , а высота треугольной пирамиды  $DABC$ , опущенная из вершины  $C$ , равна  $h$ . Тогда, поскольку  $NB = \frac{2}{3}CB$ , расстояние от точки  $N$  до плоскости  $ABD$  равно  $\frac{2}{3}h$ . Аналогично расстояние от точки  $Q$  до плоскости  $ABD$  равно  $\frac{1}{2}h$ . Кроме того,

$$S_{\Delta FBM} = 2S_{\Delta BDM} = 2 \cdot \frac{2}{3}S_{\Delta ABD} = \frac{4}{3}S,$$

$$S_{\Delta FDP} = \frac{1}{2}S_{\Delta ADF} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}S.$$

Значит,

$$V_1 = \frac{1}{3}S_{\Delta FBM} \cdot \frac{2}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}S \cdot \frac{2}{3}h = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{3}Sh = \frac{8}{9}V,$$

$$V_2 = \frac{1}{3}S_{\Delta FDP} \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}S \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{4}V.$$

Пусть  $V_3$  — объём той части пирамиды  $DABC$ , которая содержит точку  $B$ . Тогда

$$V_3 = V_1 - V_2 = \frac{8}{9}V - \frac{1}{4}V = \frac{23}{36}V,$$

а объём оставшейся части равен

$$V - \frac{23}{36}V = \frac{13}{36}V.$$

Следовательно, искомое отношение равно  $\frac{13}{23}$ .  $\triangleleft$

*Ответ:* 13 : 23.

5. На рёбрах  $AB$  и  $BC$  треугольной пирамиды  $ABCD$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $AM : MB = CN : NB = 1 : 3$ . Точки  $P$  и  $Q$  — середины рёбер  $DA$  и  $DC$  соответственно.

а) Докажите, что точки  $P$ ,  $Q$ ,  $M$  и  $N$  лежат в одной плоскости.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость  $PQM$  разбивает пирамиду.

*Ответ:* 9 : 23.

6. Дана четырёхугольная пирамида  $SABCD$ , в основании которой лежит прямоугольник  $ABCD$ . Основанием высоты пирамиды является точка пересечения диагоналей основания. Известно, что  $AB = 2\sqrt{3}$ ,  $BC = 2\sqrt{6}$ . Из точек  $A$  и  $C$  опущены перпендикуляры  $AP$  и  $CQ$  на ребро  $SB$ .

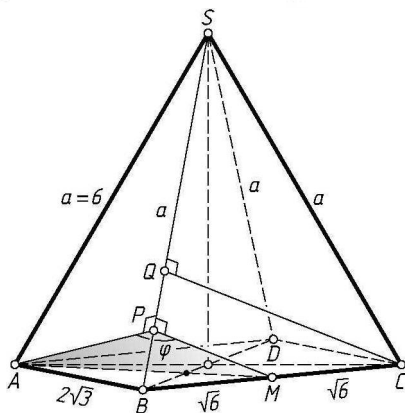
а) Докажите, что  $P$  — середина  $BQ$ .

б) Найдите угол между гранями  $SBA$  и  $SBC$ , если  $AS = 6$ .

**Решение.** а) Высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания, значит, боковые рёбра пирамиды равны. Обозначим  $SA = SB = SC = SD = a$ . Тогда

$$AB^2 - BP^2 = AP^2 = SA^2 - SP^2, \quad \text{или} \quad 12 - BP^2 = a^2 - (a - BP)^2,$$

откуда  $BP = \frac{6}{a}$ . Из равнобедренного треугольника  $BSC$  аналогично находим, что  $BQ = \frac{12}{a}$ . Следовательно,  $BP = \frac{1}{2}BQ$ , т. е.  $P$  — середина  $BQ$ .





б) В равнобедренном треугольнике  $BSC$  через точку  $P$ , лежащую на боковой стороне  $SB$ , проведём прямую, параллельную высоте  $CQ$ . Пусть  $M$  — точка её пересечения со стороной  $BC$ . По теореме Фалеса  $M$  — середина  $BC$ . Значит,

$$PM = \frac{1}{2}CQ = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 - BQ^2} = \frac{1}{2}\sqrt{24 - \left(\frac{12}{a}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{24 - 4} = \sqrt{5}.$$

Из равнобедренного треугольника  $ASB$  находим, что

$$AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{12 - \left(\frac{6}{a}\right)^2} = \sqrt{12 - 1} = \sqrt{11}.$$

Из прямоугольного треугольника  $ABM$  находим, что

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 = 12 + 6 = 18.$$

Так как  $AP \perp SB$  и  $MP \perp SB$ , то  $\angle APM = \varphi$  — линейный угол двугранного угла между гранями  $SBA$  и  $SBC$ . По теореме косинусов

$$\cos \varphi = \frac{AP^2 + MP^2 - AM^2}{2AP \cdot MP} = \frac{11 + 5 - 18}{2 \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{55}}.$$

Следовательно,  $\varphi = 180^\circ - \arccos \frac{1}{\sqrt{55}}$ . ◁

Ответ:  $180^\circ - \arccos \frac{1}{\sqrt{55}}$ .

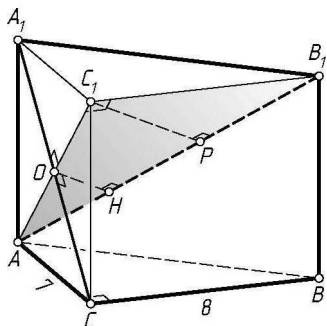
7. Основанием прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  является прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ . Прямые  $CA_1$  и  $AB_1$  перпендикулярны.

а) Докажите, что  $AA_1 = AC$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $CA_1$  и  $AB_1$ , если  $BC = 8$  и  $AC = 7$ .

Решение. а) Прямая  $BC$  перпендикулярна плоскости  $ACA_1$ , так как  $BC \perp AC$  и  $BC \perp AA_1$ . Поскольку  $B_1C_1 \parallel BC$ , то  $B_1C_1$  — перпендикуляр к плоскости  $ACA_1$ , а  $AC_1$  — ортогональная проекция наклонной  $AB_1$  на эту плоскость. По условию задачи  $CA_1 \perp AB_1$ , значит, по теореме о трёх перпендикулярах  $AC_1 \perp CA_1$ . Диагонали прямоугольника  $AA_1C_1C$

перпендикулярны, значит, это квадрат. Следовательно,  $AA_1 = AC$ .



б) Пусть  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из центра  $O$  квадрата  $AA_1C_1C$  на прямую  $AB_1$ . Прямая  $CA_1$  перпендикулярна плоскости  $AC_1B_1$ , так как  $CA_1 \perp AC_1$  и  $CA_1 \perp B_1C_1$ . Значит,  $OH \perp CA_1$ , и  $OH$  — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых  $CA_1$  и  $AB_1$ . Тогда расстояние между этими прямыми равно длине отрезка  $OH$ , т. е. половине высоты  $C_1P$  прямоугольного треугольника  $AC_1B_1$ , опущенной из вершины прямого угла. Из прямоугольных треугольников  $ACC_1$  и  $AC_1B_1$  находим, что

$$AC_1 = 7\sqrt{2}, \quad AB_1 = \sqrt{AC_1^2 + B_1C_1^2} = \sqrt{98 + 64} = 9\sqrt{2},$$

поэтому

$$C_1P = \frac{AC_1 \cdot B_1C_1}{AB_1} = \frac{7\sqrt{2} \cdot 8}{9\sqrt{2}} = \frac{56}{9}.$$

Следовательно,  $OH = \frac{28}{9}$ .

◁

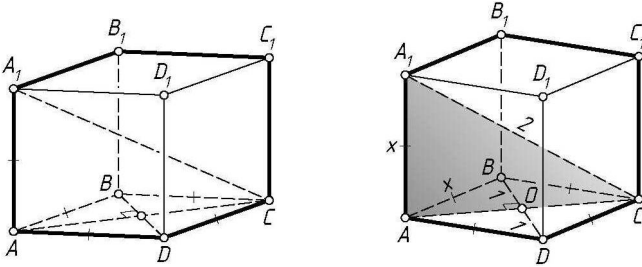
Ответ:  $\frac{28}{9}$ .

**8.** Основанием прямой четырёхугольной призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  является ромб  $ABCD$ ,  $AB = AA_1$ .

а) Докажите, что прямые  $A_1C$  и  $BD$  перпендикулярны.

б) Найдите объём призмы, если  $A_1C = BD = 2$ .

**Решение.** а) Диагонали ромба перпендикулярны, поэтому  $AC \perp BD$ . Данная призма прямая, поэтому  $AA_1$  — перпендикуляр к плоскости  $ABC$ . Значит, прямая  $AC$  — ортогональная проекция наклонной  $A_1C$  на эту плоскость. Следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах  $AC_1 \perp BD$ .



б) Обозначим  $AB = AA_1 = x$ . Пусть  $O$  — центр ромба  $ABCD$ . Из прямоугольного треугольника  $AOB$  находим, что

$$AO^2 = AB^2 - BO^2 = x^2 - 1,$$

Значит,  $AC = 2AO = 2\sqrt{x^2 - 1}$ .

Из прямоугольного треугольника  $CAA_1$  получаем, что

$$A_1C^2 = AA_1^2 + AC^2, \quad \text{или} \quad 4 = x^2 + 4(x^2 - 1),$$

откуда  $x = \sqrt{\frac{8}{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ . Следовательно,

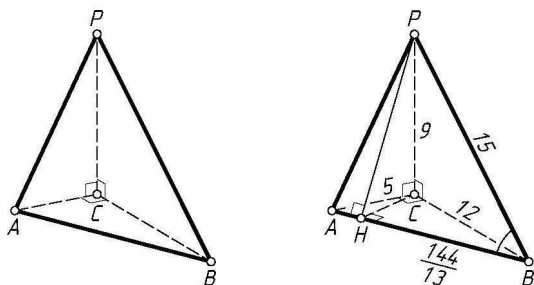
$$\begin{aligned} V_{AB_1CDA_1B_1C_1D_1} &= S_{ABCD} \cdot AA_1 = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot AA_1 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x^2 - 1} \cdot 2 \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{8}{5} - 1} \cdot 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{6}}{5}. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{4\sqrt{6}}{5}$ .

9. В треугольной пирамиде  $PABC$  с основанием  $ABC$  известно, что  $AB = 13$ ,  $PB = 15$ ,  $\cos \angle PBA = \frac{48}{65}$ . Основанием высоты этой пирамиды является точка  $C$ . Прямые  $PA$  и  $BC$  перпендикулярны.

- Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.
- Найдите объём пирамиды  $PABC$ .

Решение. а) Поскольку  $PC$  — перпендикуляр к плоскости  $ABC$ , сторона  $AC$  основания пирамиды — ортогональная проекция наклонной  $PA$  на эту плоскость, а так как  $PA \perp BC$ , то по теореме о трёх перпендикулярах  $AC \perp BC$ . Следовательно, треугольник  $ABC$  прямоугольный с прямым углом при вершине  $C$ .



б) Пусть  $PH$  — высота треугольника  $APB$ . Из прямоугольного треугольника  $PHB$  находим, что

$$BH = PB \cos \angle PBA = 15 \cdot \frac{48}{65} = \frac{144}{13}.$$

По теореме о трёх перпендикулярах  $CH$  — высота прямоугольного треугольника  $ABC$ , проведённая из вершины прямого угла. Значит,

$$BC = \sqrt{BH \cdot AB} = \sqrt{\frac{144}{13} \cdot 13} = 12.$$

По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника  $ABC$  находим, что  $AC = 5$ . Тогда

$$PC = \sqrt{PB^2 - BC^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9.$$

Следовательно,

$$V_{PABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot PC = \frac{1}{6} AC \cdot BC \cdot PC = \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot 12 \cdot 9 = 90. \quad \triangleleft$$

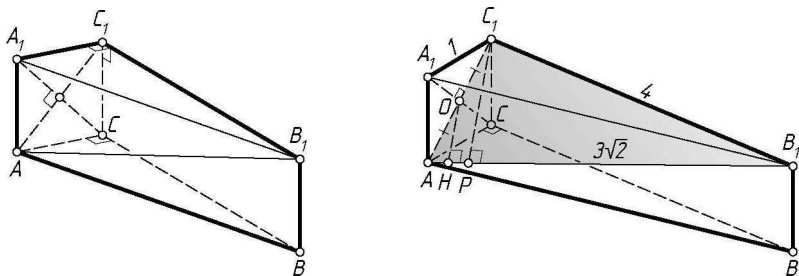
Ответ: 90.

**10.** Основанием прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  является прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ , а боковая грань  $ACC_1A_1$  является квадратом.

а) Докажите, что прямые  $CA_1$  и  $AB_1$  перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми  $CA_1$  и  $AB_1$ , если  $AC = 1$  и  $BC = 4$ .

**Решение.** а) Прямая  $B_1C_1$  перпендикулярна плоскости  $ACA_1$ , так как  $B_1C_1 \perp A_1C_1$  и  $B_1C_1 \perp CC_1$ . Значит,  $AC_1$  — ортогональная проекция наклонной  $AB_1$  на эту плоскость. Диагонали квадрата перпендикулярны, поэтому  $AC_1 \perp CA_1$ . Следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах  $CA_1 \perp AB_1$ .



б) Пусть  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из центра  $O$  квадрата  $AA_1C_1C$  на прямую  $AB_1$ . Прямая  $CA_1$  перпендикулярна плоскости  $AC_1B_1$ , так как  $CA_1 \perp AC_1$  и  $CA_1 \perp B_1C_1$ . Значит,  $OH \perp CA_1$ , и  $OH$  — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых  $CA_1$  и  $AB_1$ . Тогда расстояние между этими прямыми равно длине отрезка  $OH$ , т. е. половине высоты  $C_1P$  прямоугольного треугольника  $AC_1B_1$ , опущенной из вершины прямого угла. Из прямоугольных треугольников  $ACC_1$  и  $AC_1B_1$  находим, что

$$AC_1 = \sqrt{2}, \quad AB_1 = \sqrt{AC_1^2 + B_1C_1^2} = \sqrt{2 + 16} = 3\sqrt{2},$$

поэтому

$$C_1P = \frac{AC_1 \cdot B_1C_1}{AB_1} = \frac{\sqrt{2} \cdot 4}{3\sqrt{2}} = \frac{4}{3}.$$

Следовательно,  $OH = \frac{2}{3}$ . ◁

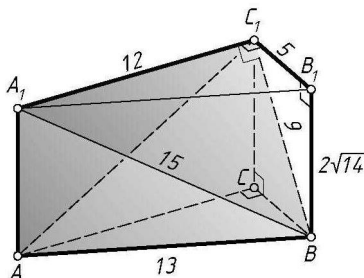
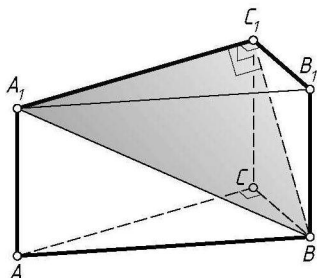
Ответ:  $\frac{2}{3}$ .

**11.** Основанием прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  является прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ . Диагонали боковых граней  $AA_1B_1B$  и  $BB_1C_1C$  равны 15 и 9 соответственно,  $AB = 13$ .

а) Докажите, что треугольник  $BA_1C_1$  прямоугольный.

б) Найдите объём пирамиды  $AA_1C_1B$ .

**Решение.** а) Прямая  $A_1C_1$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $B_1C_1$  (треугольник  $A_1B_1C_1$  прямоугольный с прямым углом  $C_1$ ) и  $CC_1$  (так как призма прямая). Значит,  $A_1C_1$  — перпендикуляр к этой плоскости. Следовательно,  $A_1C_1 \perp BC_1$ , т. е. треугольник  $BA_1C_1$  прямоугольный с прямым углом  $C_1$ .



б) Из прямоугольных треугольников  $A_1BC_1$ ,  $A_1B_1C_1$  и  $BB_1C_1$  находим, что

$$A_1C_1 = \sqrt{A_1B^2 - BC_1^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12,$$

$$B_1C_1 = \sqrt{A_1B_1^2 - A_1C_1^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5,$$

$$BB_1 = \sqrt{BC_1^2 - B_1C_1^2} = \sqrt{9^2 - 5^2} = 2\sqrt{14}.$$

Прямая  $BC$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $AC$  и  $CC_1$  плоскости  $AA_1C_1$ , поэтому  $BC$  — высота пирамиды  $AA_1C_1B$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} V_{AA_1C_1B} &= \frac{1}{3} S_{\Delta AA_1C_1} \cdot BC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot AA_1 \cdot BC = \\ &= \frac{1}{6} A_1C_1 \cdot BB_1 \cdot BC = \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{14} \cdot 5 = 20\sqrt{14}. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Ответ:  $20\sqrt{14}$ .

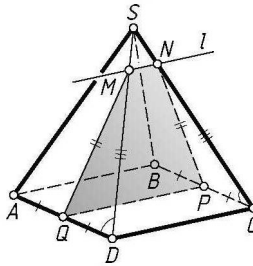
12. На ребре  $SD$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  отмечена точка  $M$ , причём  $SM : MD = 1 : 4$ . Точки  $P$  и  $Q$  — середины рёбер  $BC$  и  $AD$  соответственно.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью  $MPQ$  является равнобедренной трапецией.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость  $MPQ$  разбивает пирамиду.

Решение. а) Прямая  $PQ$  параллельна плоскости  $CSD$ , так как эта прямая параллельна прямой  $CD$ , лежащей в плоскости  $CSD$ . Плоскость  $PQM$  проходит через прямую  $PQ$ , параллельную плоскости  $CSD$ , и пересекает эту плоскость по прямой  $l$ , проходящей через точку  $M$ , значит, прямая  $l$  параллельна прямой  $PQ$ . Пусть прямая  $l$  пересекает ребро  $SC$  в точке  $N$ . Тогда  $PQMN$  — трапеция, так как

$PQ \parallel MN$  и  $MN \neq PQ$ . Из равенства треугольников  $PCN$  и  $QDM$  следует, что  $PN = QM$ , поэтому эта трапеция равнобедренная.



б) *Первый способ.* Пусть объём данной пирамиды равен  $V$ . Тогда объём четырёхугольной пирамиды  $SCPQD$ , основание которой — прямоугольник  $CDQP$ , равен  $\frac{1}{2}V$ . Плоскость  $PDS$  разбивает её на две треугольные пирамиды, объём каждой из которых равен  $\frac{1}{4}V$ .

Плоскость  $PMN$  отсекает от треугольной пирамиды  $SCDP$  треугольную пирамиду  $SPMN$ , объём которой равен

$$\frac{SM}{SD} \cdot \frac{SN}{SC} \cdot \frac{SP}{SP} \cdot \frac{1}{4}V = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}V = \frac{1}{100}V.$$

Эта же плоскость отсекает от треугольной пирамиды  $SPDQ$  треугольную пирамиду  $SPMQ$ , объём которой равен

$$\frac{SM}{SD} \cdot \frac{SQ}{SQ} \cdot \frac{SP}{SP} \cdot \frac{1}{4}V = \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}V = \frac{1}{20}V.$$

Значит, плоскость  $PMN$  отсекает от четырёхугольной пирамиды  $SCPQD$  четырёхугольную пирамиду  $SMNPQ$ , объём которой равен

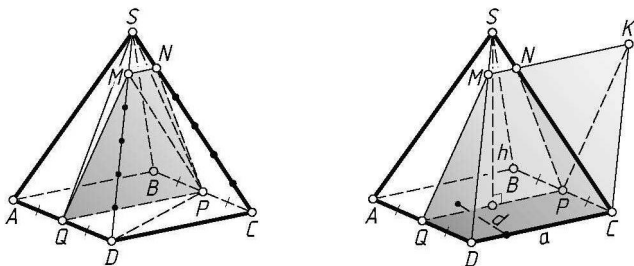
$$\frac{1}{100}V + \frac{1}{20}V = \frac{3}{50}V.$$

Тогда объём оставшейся части четырёхугольной пирамиды  $SCPQD$  равен

$$\frac{1}{2}V - \frac{3}{50}V = \frac{11}{25}V.$$

Таким образом, плоскость  $PMN$  разбивает данную пирамиду  $SABCD$  на два многогранника с объёмами  $\frac{11}{25}V$  и  $V - \frac{11}{25}V = \frac{14}{25}V$ . Следовательно, отношение объёмов этих многогранников равно  $\frac{11}{14}$ .

*Второй способ.* Достроим трапецию  $PQMN$  до параллелограмма  $PQMK$ . Тогда  $DMQCKP$  — треугольная призма с основаниями  $MDQ$  и  $CKP$ .



Пусть сторона основания данной пирамиды равна  $a$ , высота равна  $h$ , а расстояние от прямой  $CD$  до секущей плоскости равно  $d$ . Тогда расстояние от бокового ребра  $MK$  призмы  $DMQCKP$  до её грани  $CDQP$  равно  $\frac{4}{5}h$ , а площадь этой грани равна  $\frac{a^2}{2}$ . Тогда объём призмы равен

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{4}{5}h = \frac{a^2h}{5} = \frac{1}{3}a^2h \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}V,$$

где  $V$  — объём данной пирамиды  $SABCD$ .

Пусть  $S$  — площадь грани  $PKMQ$  призмы  $DMQCKP$ . Тогда площадь грани  $PKN$  треугольной пирамиды  $KPCN$  равна  $\frac{2}{5}S$ , а объём этой пирамиды равен

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}S \cdot d = \frac{2}{15}Sd = \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{2}Sd = \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{5}V = \frac{4}{25}V.$$

Объём части пирамиды  $SABCD$ , содержащей точку  $C$ , равен разности объёмов призмы  $DMQCKP$  и пирамиды  $KPCN$ , т. е.

$$\frac{3}{5}V - \frac{4}{25}V = \frac{11}{25}V,$$

а объём остальной части равен  $V - \frac{11}{25}V = \frac{14}{25}V$ . Следовательно, искомое отношение объёмов равно  $\frac{11}{14}$ .  $\triangleleft$

*Ответ:* 11 : 14.

**13.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  все рёбра равны 2. Точка  $M$  — середина ребра  $AA_1$ .

- а) Докажите, что прямые  $MB$  и  $B_1C$  перпендикулярны.
- б) Найдите расстояние между прямыми  $MB$  и  $B_1C$ .

**Решение.** а) *Первый способ.* Пусть  $K$  и  $L$  — середины рёбер  $BB_1$  и  $BC$  соответственно. Тогда  $A_1MBK$  — параллелограмм, поэтому  $A_1K \parallel MB$ . Отрезок  $KL$  — средняя линия треугольника  $BB_1C$ , поэтому



$KL \parallel B_1C$ . Значит, угол между скрещивающимися прямыми  $MB$  и  $B_1C$  равен углу между пересекающимися прямыми  $A_1K$  и  $KL$ .

Отрезок  $AL$  — высота равностороннего треугольника со стороной 2, поэтому  $AL = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ . Из прямоугольных треугольников  $AMB$ ,  $BB_1C$  и  $AA_1L$  находим, что

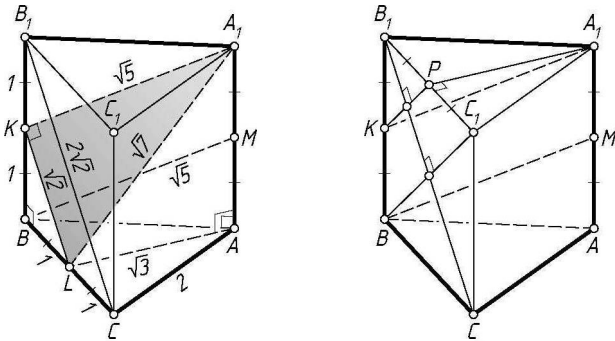
$$BM = \sqrt{AM^2 + AB^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}, \quad B_1C = BC\sqrt{2} = 2\sqrt{2},$$

$$A_1L = \sqrt{AA_1^2 + AL^2} = \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7}.$$

Значит, в треугольнике  $A_1KL$  известны стороны

$$A_1K = BM = \sqrt{5}, \quad KL = \frac{1}{2}B_1C = \sqrt{2}, \quad A_1L = \sqrt{7},$$

а так как  $A_1K^2 + KL^2 = 5 + 2 = 7 = A_1L^2$ , то  $\angle A_1KL = 90^\circ$ , т. е. прямые  $A_1K$  и  $KL$  перпендикулярны. Следовательно, параллельные им прямые  $MB$  и  $B_1C$  также перпендикулярны.



*Второй способ.* Пусть  $K$  и  $P$  — середины рёбер  $BB_1$  и  $B_1C_1$  соответственно. Тогда  $A_1P$  — перпендикуляр к плоскости  $BCB_1$ , а  $PK$  — ортогональная проекция наклонной  $A_1K$  на эту плоскость. Прямая  $B_1C$ , лежащая в этой плоскости, перпендикулярна  $KP$ , так как она перпендикулярна прямой  $BC_1$ , параллельной  $KP$ , значит, по теореме о трёх перпендикулярах прямая  $A_1K$  перпендикулярна  $B_1C$ . Следовательно, параллельная ей прямая  $MB$  также перпендикулярна  $B_1C$ .

б) *Первый способ.* Пусть  $N$  — середина ребра  $AB$ ,  $Q$  — точка пересечения отрезков  $B_1N$  и  $BM$ . Обозначим  $\angle BB_1N = \angle ABM = \alpha$ . Тогда  $\angle BNB_1 = 90^\circ - \alpha$ , значит,

$$\angle BQN = 180^\circ - \angle ABM - \angle BNB_1 = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ,$$

т. е.  $BM \perp B_1N$ .

Прямая  $BM$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $B_1N$  и  $B_1C$  плоскости  $B_1CN$ , поэтому прямая  $BM$  перпендикулярна плоскости  $B_1CN$ , а значит, и любой прямой лежащей в этой плоскости, в частности, прямой  $QF$ , где  $F$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $Q$  на прямую  $B_1C$ . Следовательно,  $QF$  — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых  $BM$  и  $B_1C$ .

Поскольку  $CN$  — перпендикуляр к плоскости  $ABB_1$ , треугольник  $CNB_1$  прямоугольный. Пусть  $NH$  — его высота. Тогда

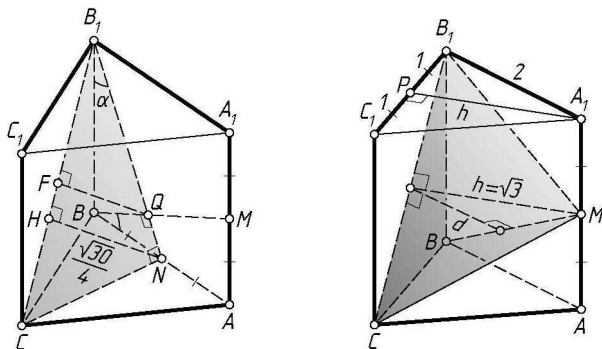
$$NH = \frac{CN \cdot B_1N}{B_1C} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{30}}{4}.$$

Отрезок  $BQ$  — высота прямоугольного треугольника  $NBB_1$ , проведенная из вершины прямого угла, поэтому

$$\frac{B_1Q}{QN} = \frac{\frac{BB_1^2}{B_1N}}{\frac{BN^2}{B_1N}} = \frac{BB_1^2}{BN^2} = \frac{4}{1} = 4.$$

Треугольник  $QFB_1$  подобен треугольнику  $NHB_1$  с коэффициентом  $\frac{B_1Q}{B_1N} = \frac{4}{5}$ . Следовательно,

$$QF = \frac{4}{5}NH = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{30}}{4} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$



*Второй способ.* Пусть высота тетраэдра  $MBCB_1$ , опущенная из его вершины  $M$  на плоскость основания  $BB_1C$ , равна  $h$ . Точка  $M$  лежит на прямой  $AA_1$ , параллельной этой плоскости, поэтому расстояние от точки  $A_1$  до плоскости  $BB_1C$  также равно  $h$ . С другой стороны, это расстояние равно высоте  $A_1P$  равностороннего треугольника  $A_1B_1C_1$ , т. е.  $h = \sqrt{3}$ .

Пусть  $d$  — искомое расстояние между скрещивающимися прямыми  $MB$  и  $B_1C$ , а  $V$  — объём тетраэдра  $MBCB_1$ . Тогда

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta BCB_1} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AA_1 \cdot AB \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

С другой стороны,

$$V = \frac{1}{6} MB \cdot B_1C \cdot d \sin 90^\circ = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{2} \cdot d = \frac{d\sqrt{10}}{3}.$$

Из равенства

$$\frac{d\sqrt{10}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

находим, что  $d = \frac{\sqrt{30}}{5}$ .

◁

Ответ:  $\frac{\sqrt{30}}{5}$ .

**14.** В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  на ребре  $AA_1$  отмечена точка  $K$ , причём  $AK : KA_1 = 1 : 3$ . Через точки  $K$  и  $B$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $AC$  и пересекающая ребро  $DD_1$  в точке  $M$ .

а) Докажите, что точка  $M$  — середина ребра  $DD_1$ .

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $\alpha$ , если  $AB = 5$ ,  $AA_1 = 4$ .

**Решение.** а) Плоскость  $AA_1 C_1 C$  проходит через прямую  $AC$ , параллельную плоскости  $\alpha$ , и имеет с плоскостью  $\alpha$  общую точку  $K$ , значит, эти плоскости пересекаются по прямой  $l$ , проходящей через точку  $K$  параллельно  $AC$ . Пусть прямая  $l$  пересекает ребро  $CC_1$  в точке  $L$ . Тогда плоскости  $\alpha$  и  $BB_1 C_1 C$  пересекаются по прямой  $BL$ , причём  $CL : LC_1 = AK : KA_1 = 1 : 3$ .

Плоскость  $\alpha$  пересекает параллельные плоскости  $AA_1 D_1 D$  и  $BB_1 C_1 C$  по параллельным прямым  $BL$  и  $KM$ . Пусть прямая, проходящая через точку  $K$  параллельно  $AD$ , пересекает ребро  $DD_1$  в точке  $N$ . Тогда

$$DN = AK = \frac{1}{4} AA_1 = \frac{1}{4} DD_1.$$

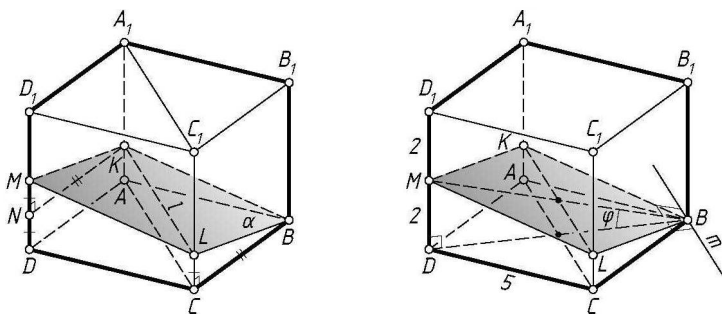
Из равенства треугольников  $KNM$  и  $BCL$  следует, что

$$MN = LC = \frac{1}{4} CC_1 = \frac{1}{4} DD_1.$$

Значит,

$$DM = DN + MN = \frac{1}{4} DD_1 + \frac{1}{4} DD_1 = \frac{1}{2} DD_1.$$

Следовательно, точка  $M$  — середина ребра  $DD_1$ .



б) Плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $KL$ , параллельную плоскости  $ABCD$ , и пересекает эту плоскость по прямой  $m$ , проходящей через точку  $B$  параллельно  $KL$ , а значит, и  $AC$ . По теореме о трёх перпендикулярах  $m \perp MB$ , поэтому  $DBM$  — линейный угол двугранного угла  $\varphi$ , образованного плоскостями  $\alpha$  и  $ABCD$ . Из прямоугольного треугольника  $VDM$  находим, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{DM}{BD} = \frac{2}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

Тогда

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{25}}} = \frac{5}{\sqrt{27}} = \frac{5}{3\sqrt{3}}.$$

Ортогональная проекция сечения  $BLMK$  на плоскость  $ABCD$  — квадрат  $ABCD$ , площадь которого равна 25. Следовательно, площадь сечения равна

$$\frac{25}{\cos \varphi} = \frac{25}{\frac{5}{3\sqrt{3}}} = 15\sqrt{3}. \quad \triangleleft$$

Ответ:  $15\sqrt{3}$ .

15. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а на окружности другого основания — точка  $C_1$ , причём  $CC_1$  — образующая цилиндра, а отрезок  $AC$  — диаметр основания. Известно, что  $AB = \sqrt{6}$ ,  $CC_1 = 2\sqrt{3}$ ,  $\angle ACB = 30^\circ$ .

а) Докажите, что угол между прямыми  $AC_1$  и  $BC$  равен  $45^\circ$ .

б) Найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $AC_1$ .

Решение. а) Точка  $B$  лежит на окружности с диаметром  $AC$ , поэтому  $\angle ABC = 90^\circ$ . Из прямоугольного треугольника  $ABC$  находим,

что

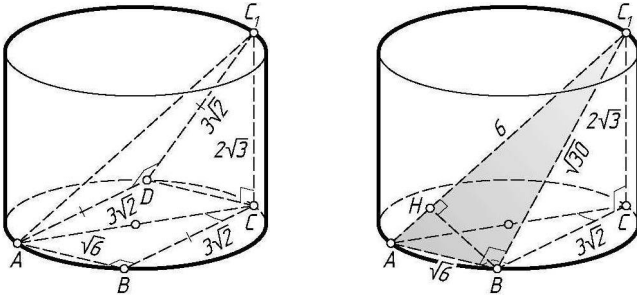
$$BC = AB \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{2}.$$

Через точку  $A$  проведём прямую, параллельную  $BC$ . Пусть она пересекает окружность основания в точке  $D$ . Значит, угол между скрещивающимися прямыми  $AC_1$  и  $BC$  равен углу между пересекающимися прямыми  $AC_1$  и  $AD$ . Четырёхугольник  $ABCD$  — прямоугольник, поэтому  $AD = BC = 3\sqrt{2}$ .

Из прямоугольного треугольника  $DCC_1$  находим, что

$$C_1D = \sqrt{CD^2 + CC_1^2} = \sqrt{6 + 12} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = AD.$$

Отрезок  $CD$  — ортогональная проекция наклонной  $C_1D$  на плоскость основания цилиндра, причём  $CD \perp AD$ . Значит, по теореме о трёх перпендикулярах  $C_1D \perp AD$ , а равнобедренный треугольник  $ADC_1$  — прямоугольный. Следовательно, угол между прямыми  $AC_1$  и  $BC$  равен углу  $DAC_1$ , равному  $45^\circ$ .



б) Отрезок  $BC$  — ортогональная проекция наклонной  $C_1B$  на плоскость  $ABC$ . При этом  $BC \perp AB$ . Значит, по теореме о трёх перпендикулярах  $C_1B \perp AB$ , т. е. треугольник  $ABC_1$  прямоугольный. Расстояние от точки  $B$  до прямой  $AC_1$  равно высоте  $BH$  этого треугольника, проведённой из вершины прямого угла. По теореме Пифагора

$$BC_1 = \sqrt{CC_1^2 + BC^2} = \sqrt{12 + 18} = \sqrt{30},$$

а так как

$$AC_1 = AD\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6,$$

то

$$BH = \frac{AB \cdot BC_1}{AC_1} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{30}}{6} = \sqrt{5}.$$

◁

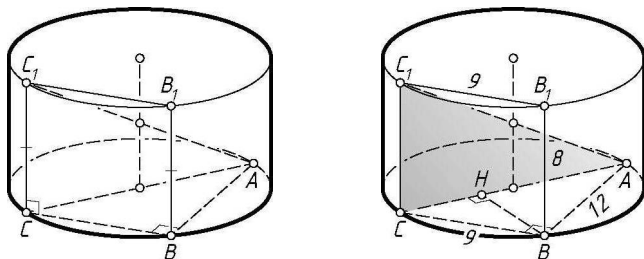
Ответ:  $\sqrt{5}$ .

16. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$  и  $B$ , а на окружности другого основания — точки  $B_1$  и  $C_1$ , причём  $BB_1$  — образующая цилиндра, а отрезок  $AC_1$  пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что прямые  $AB$  и  $B_1C_1$  перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми  $AC_1$  и  $BB_1$ , если  $AB = 12$ ,  $B_1C_1 = 9$ ,  $BB_1 = 8$ .

**Решение.** а) Пусть  $C$  — точка на окружности того основания цилиндра, которое содержит  $A$  и  $B$ , а  $CC_1$  — образующая цилиндра. Поскольку прямая  $AC_1$  пересекает ось цилиндра, отрезок  $AC$  — диаметр этого основания. Кроме того,  $BCC_1B_1$  — прямоугольник, поэтому  $B_1C_1 \parallel BC$ . Точка  $B$  лежит на окружности с диаметром  $AC$ , значит,  $AB \perp BC$ . Следовательно,  $AB \perp B_1C_1$ .



б) Пусть  $VH$  — высота прямоугольного треугольника  $ABC$ . Тогда  $VH \perp AC$  и  $VH \perp CC_1$ , значит,  $VH$  — перпендикуляр к плоскости  $ACC_1$ , параллельной прямой  $BB_1$  и содержащей прямую  $AC_1$ . Следовательно, расстояние между скрещивающимися прямыми  $AC_1$  и  $BB_1$  равно длине отрезка  $VH$ .

Из прямоугольного треугольника  $ABC$  находим, что

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{AB^2 + B_1C_1^2} = \sqrt{144 + 81} = 15.$$

Следовательно,

$$VH = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{12 \cdot 9}{15} = \frac{36}{5} = 7,2. \quad \triangleleft$$

*Ответ:* 7,2.

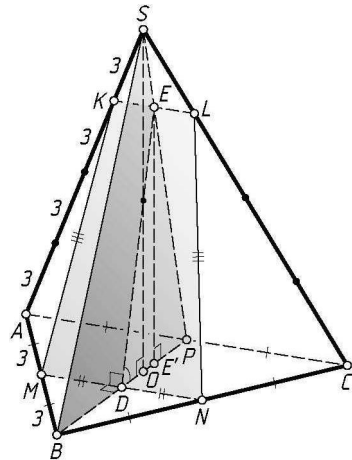
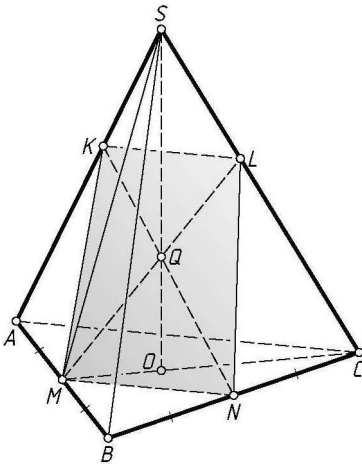
17. В правильной пирамиде  $SABC$  точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AB$  и  $BC$  соответственно. На боковом ребре  $SA$  отмечена точка  $K$ . Сечение пирамиды плоскостью  $MNK$  является четырёхугольником, диагонали которого пересекаются в точке  $Q$ .

а) Докажите, что точка  $Q$  лежит на высоте пирамиды.

б) Найдите угол между плоскостями  $MNK$  и  $ABC$ , если  $AB = 6$ ,  $SA = 12$  и  $SK = 3$ .

Решение. а) Пусть  $O$  — центр основания пирамиды,  $L$  — точка пересечения плоскости  $MNK$  с прямой  $SC$ .

Прямые  $SO$  и  $ML$  лежат в плоскости  $CSM$  и не параллельны, значит, они пересекаются. Аналогично, прямые  $SO$  и  $KN$  также пересекаются. Кроме того, прямые  $ML$  и  $KN$  пересекаются в точке  $Q$ . Итак, три прямые  $SO$ ,  $ML$  и  $KN$  попарно пересекаются и не лежат в одной плоскости. Значит, они проходят через одну точку — точку  $Q$  пересечения диагоналей четырёхугольника  $MKLN$  (прямая  $KN$  пересекает прямые  $ML$  и  $SO$ , поэтому она проходит через их точку пересечения). Следовательно, точка  $Q$  лежит на высоте  $SO$  пирамиды.



б) Прямая  $AC$  параллельна плоскости  $MNK$ , так как она параллельна прямой  $MN$ , лежащей в этой плоскости ( $MN$  — средняя линия треугольника  $ABC$ ). Значит, плоскости  $ASC$  и  $MNK$  пересекаются по прямой  $KL$ , параллельной  $MN$ . Тогда четырёхугольник  $MKLN$  — равнобокая трапеция с основаниями  $MN$  и  $KL$ .

Пусть  $P$  — середина ребра  $AC$ ,  $D$  — точка пересечения  $MN$  и  $BP$ ,  $E$  — точка пересечения  $KL$  и  $SP$ . Тогда  $D$  — середина  $BP$ , а  $SE : SP = SK : SA = 1 : 4$ . Плоскость  $BSP$  перпендикулярна прямой  $MN$  пересечения плоскостей  $MNK$  и  $ABC$ , поэтому искомый угол — это угол  $PDE$ .

Далее находим:

$$BP = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}, \quad BO = \frac{2}{3}BP = 2\sqrt{3}, \quad OP = \frac{1}{3}BP = \sqrt{3},$$

$$SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{12^2 - 12} = 2\sqrt{33}.$$

Из параллельности прямых  $KL$  и  $AC$  получаем, что  $SL = SK = 3$ . Пусть  $E'$  — ортогональная проекция точки  $E$  на плоскость основания пирамиды. Тогда точка  $E'$  лежит на отрезке  $OP$ , причём

$$PE' : OP = PE : PS = EE' : SO = 3 : 4.$$

Значит,

$$PE' = \frac{3}{4}OP = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad EE' = \frac{3}{4}SO = \frac{3\sqrt{33}}{2},$$

$$DE' = DP - PE' = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \angle PDE = \frac{EE'}{DE'} = \frac{\frac{3\sqrt{33}}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}} = 2\sqrt{11}. \quad \triangleleft$$

Ответ:  $\arctg 2\sqrt{11}$ .

**18.** В правильной пирамиде  $SABC$  точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AB$  и  $BC$  соответственно. На боковом ребре  $SA$  отмечена точка  $K$ . Сечение пирамиды плоскостью  $MNK$  является четырёхугольником, диагонали которого пересекаются в точке  $Q$ .

а) Докажите, что точка  $Q$  лежит на высоте пирамиды.

б) Найдите  $QP$ , где  $P$  — точка пересечения плоскости  $MNK$  и ребра  $SC$ , если  $AB = SK = 6$  и  $SA = 8$ .

Ответ:  $\frac{3\sqrt{22}}{5}$ .

**19.** В кубе  $ABCD_1B_1C_1D_1$  все рёбра равны 6.

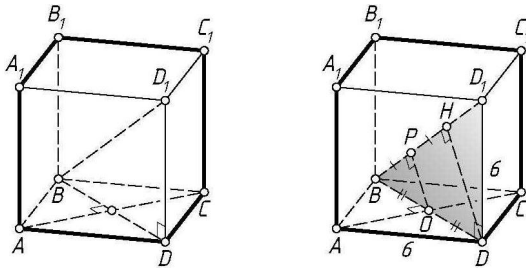
а) Докажите, что угол между прямыми  $AC$  и  $BD_1$  равен  $90^\circ$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $AC$  и  $BD_1$ .

**Решение.** а) Диагональ  $BD$  квадрата  $ABCD$  — ортогональная проекция наклонной  $D_1B$  на плоскость  $ABCD$ . Поскольку прямая  $AC$ , лежащая в этой плоскости, перпендикулярна  $BD$  (диагонали квадрата перпендикулярны), по теореме о трёх перпендикулярах наклонная  $D_1B$  также перпендикулярна  $AC$ .

б) Опустим перпендикуляр  $OP$  из центра  $O$  квадрата  $ABCD$  на диагональ  $BD_1$  куба. Прямая  $OP$  лежит в плоскости  $BDD_1$ , перпендикулярной прямой  $AC$ , значит,  $OP \perp AC$ . Следовательно,  $OP$  — общий





перпендикуляр скрещивающихся прямых  $AC$  и  $BD_1$ . Его длина равна расстоянию между этими прямыми.

Пусть  $DH$  — высота прямоугольного треугольника  $BDD_1$ . Тогда

$$DH = \frac{DD_1 \cdot BD}{BD_1} = \frac{6 \cdot 6\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{6},$$

а так как  $OP$  — средняя линия треугольника  $BDD_1$ , то

$$OP = \frac{1}{2}DH = \sqrt{6}. \quad \triangleleft$$

Ответ:  $\sqrt{6}$ .

**20.** На ребре  $AB$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  отмечена точка  $Q$ , причём  $AQ : BQ = 1 : 2$ . Точка  $P$  — середина ребра  $AS$ .

а) Докажите, что плоскость  $DPQ$  перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

б) Найдите площадь сечения  $DPQ$ , если площадь сечения  $DSB$  равна 6.

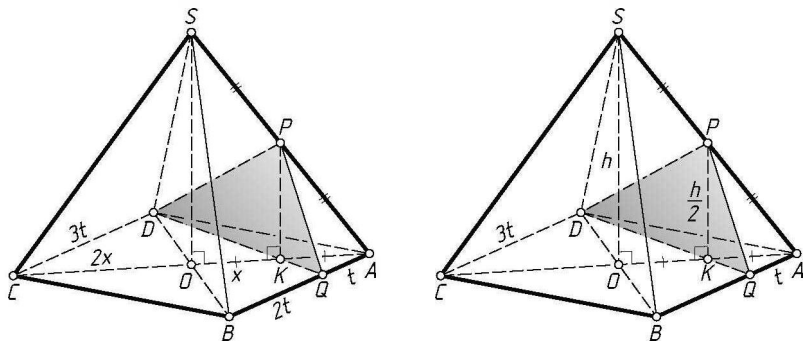
**Решение.** а) Пусть  $O$  — центр квадрата  $ABCD$ ,  $K$  — точка пересечения  $AC$  и  $DQ$ . Положим  $AQ = t$ ,  $BQ = 2t$ ,  $AC = 4x$ . Тогда  $CD = AB = 3t$  и  $AO = 2x$ .

Треугольники  $AKQ$  и  $CKD$  подобны с коэффициентом  $\frac{AQ}{CD} = \frac{t}{3t} = \frac{1}{3}$ , поэтому

$$AK = \frac{1}{3}CK = \frac{1}{3} \cdot 3x = x = \frac{1}{2}AO.$$

Тогда  $PK$  — средняя линия треугольника  $ASO$ , значит,  $PK \parallel SO$ , а так как пирамида правильная, то  $SO$  — её высота. Следовательно, прямая  $PK$ , параллельная  $SO$ , также перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

Плоскость  $DPQ$  проходит через прямую  $PK$ , перпендикулярную плоскости основания пирамиды, значит, по признаку перпендикулярности плоскостей эти плоскости перпендикулярны.



б) Пусть  $SO = h$ . Тогда

$$6 = S_{\Delta DSB} = \frac{1}{2}BD \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot 3t\sqrt{2} \cdot h = \frac{3th\sqrt{2}}{2},$$

откуда находим, что  $th = 2\sqrt{2}$ . Следовательно,

$$S_{\Delta DPQ} = \frac{1}{2}DQ \cdot PK = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{t^2 + 9t^2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{th\sqrt{10}}{4} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}}{4} = \sqrt{5}. \quad \triangleleft$$

Ответ:  $\sqrt{5}$ .

## Диагностическая работа 1

1. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер соответственно  $AB$  и  $CD$  треугольной пирамиды  $ABCD$ ,  $O$  — точка пересечения медиан грани  $ABC$ .

- а) Докажите, что прямая  $DO$  проходит через середину отрезка  $MN$ .
- б) Найдите угол между прямыми  $MN$  и  $BC$ , если  $ABCD$  — правильный тетраэдр.

2. Основание пирамиды  $SABCD$  — четырёхугольник  $ABCD$ . Точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  — середины рёбер  $SC$ ,  $AB$  и  $BC$  соответственно.

- а) Постройте сечение пирамиды плоскостью  $MNK$ .
- б) Найдите угол между плоскостями  $MNK$  и  $ABCD$ , если пирамида правильная, а её высота вдвое больше диагонали основания.

3. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона  $AB$  основания  $ABC$  равна 12, а боковое ребро  $SA$  равно 8. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $SA$  и  $SB$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $MN$  и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит медиану  $CE$  основания в отношении 5 : 1, считая от точки  $C$ .
- б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка  $C$ , а основанием — сечение пирамиды  $SABC$  плоскостью  $\alpha$ .

4. Цилиндр вписан в прямую четырёхугольную призму (окружности оснований цилиндра вписаны в основания призмы).

- а) Докажите, что суммы площадей противоположных боковых граней призмы равны.
- б) Найдите отношение площадей боковых поверхностей цилиндра и призмы, если основание призмы — ромб с углом  $30^\circ$ .

5. Основание  $ABCDEF$  пирамиды  $SABCDEF$  — правильный шестиугольник, точка  $M$  — середина ребра  $SF$ .

- а) Постройте точку пересечения плоскости  $BMD$  с ребром  $SA$ .
- б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $BMD$ , если пирамида правильная,  $AB = 1$ ,  $SA = 2$ .

6. Основания шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  — правильные шестиугольники. Точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  — середины рёбер  $EF$ ,  $CD$  и  $BB_1$  соответственно.

- а) Докажите, что плоскость  $KLM$  делит ребро  $FF_1$  в отношении 1 : 5, считая от точки  $F$ .
- б) Найдите расстояние от центра основания  $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  до плоскости  $KLM$ , если призма правильная,  $AB = 1$  и  $AA_1 = 2\sqrt{3}$ .

## Диагностическая работа 2

1. Основание шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$  — правильный шестиугольник  $ABCDEF$ .

а) Постройте прямую пересечения плоскостей  $ASB$  и  $ESF$ .

б) Найдите расстояние от центра основания пирамиды до этой прямой, если пирамида правильная, сторона её основания равна  $\sqrt{6}$ , а высота пирамиды равна  $3\sqrt{2}$ .

2. Высота конуса вдвое меньше образующей.

а) Докажите, что угол при вершине осевого сечения равен  $120^\circ$ .

б) Плоскость, проходящая через вершину конуса и хорду основания, образует угол  $45^\circ$  с плоскостью основания конуса. Найдите углы треугольника сечения.

3. Точки  $K$  и  $M$  — середины рёбер соответственно  $AB$  и  $B_1C_1$  треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ , точка  $L$  лежит на ребре  $CC_1$ , причём  $CL : LC_1 = 2 : 1$ .

а) Пусть  $N$  — точка пересечения плоскости  $KLM$  с ребром  $AC$ . Докажите, что  $AN : NC = 2 : 1$ .

б) Найдите угол между прямой  $MN$  и плоскостью  $BB_1C_1$ , если призма правильная и  $AA_1 : AB = \sqrt{5} : 6$ .

4. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$  сторона  $AB$  основания  $ABCDEF$  равна  $\frac{8}{\sqrt{3}}$ , а боковая грань образует с плоскостью основания угол  $60^\circ$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $CF$  и перпендикулярна плоскости боковой грани  $DSE$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит боковое ребро  $SD$  в отношении  $3 : 1$ , считая от точки  $S$ .

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка  $S$ , а основанием — сечение пирамиды  $SABCDEF$  плоскостью  $\alpha$ .

5. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер соответственно  $CD$  и  $CC_1$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

а) Докажите, что плоскость  $AMN$  проходит через вершину  $B_1$ .

б) Найдите угол между плоскостями  $AMN$  и  $A_1 B_1 C_1$ , если параллелепипед прямоугольный, а его диагональ  $BD_1$  перпендикулярна плоскости  $AMN$ .

6. Основание пирамиды  $SABCD$  — равнобедренная трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD = 2BC$ ,  $M$  — середина бокового ребра  $SA$ , а высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью  $BMC$  — прямоугольник.

б) Найдите расстояние между прямыми  $AD$  и  $CM$ , если  $BC = 6$ , высота пирамиды равна 16, а диагонали трапеции  $ABCD$  перпендикулярны.

### Диагностическая работа 3

1. Точка  $O$  — центр грани  $ABCD$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

а) Докажите, что отрезок  $D_1 O$  делится пополам плоскостью  $A_1 D C_1$ .

б) Найдите угол между прямой  $D_1 O$  и плоскостью  $A_1 D C_1$ , если параллелепипед прямоугольный,  $ABCD$  — квадрат, а  $AA_1 : AB = \sqrt{3} : \sqrt{2}$ .

2. Сфера вписана в правильную шестиугольную призму. Другая сфера описана около призмы.

а) Докажите, что центры сфер совпадают.

б) Найдите отношение площадей поверхностей этих сфер.

3. Основание пирамиды  $SABCD$  — параллелограмм  $ABCD$ , точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AB$  и  $SC$  соответственно.

а) Докажите, что плоскость  $DSM$  проходит через середину отрезка  $AN$ .

б) Найдите угол между прямыми  $SM$  и  $BN$ , если пирамида правильная и все её рёбра равны.

4. Точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  лежат на рёбрах соответственно  $AD$ ,  $CD$  и  $BB_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , причём  $DK : KA = DL : LC = B_1 M : MB = 1 : 2$ .

а) Докажите, что плоскость  $KLM$  делит ребро  $AA_1$  куба в отношении 4 : 11, считая от точки  $A$ .

б) Найдите объём большей из частей куба, на которые он разбивается плоскостью  $KLM$ , если ребро куба равно 3.

5. Точка  $M$  — середина бокового ребра  $SD$  шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$ . Основание пирамиды — правильный шестиугольник  $ABCDEF$ .

а) Постройте точку пересечения прямой  $AM$  с плоскостью  $ESF$ .

б) Найдите угол между прямой  $AM$  и плоскостью  $ESF$ , если пирамида правильная и её боковое ребро вдвое больше стороны основания.

6. Основания шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  — правильные шестиугольники. Точка  $M$  — середина ребра  $BB_1$ .

а) Докажите, что прямые  $F_1 M$  и  $CD$  пересекаются в точке, лежащей на прямой  $BF$ .

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $DMF_1$ , если призма правильная, сторона её основания равна 1, а высота равна 3.

## Диагностическая работа 4

1. Основание треугольной пирамиды  $ABCD$  — равносторонний треугольник  $ABC$ . Боковое ребро  $DA$  перпендикулярно плоскости основания,  $M$  — середина ребра  $BC$ .

а) Докажите, что высота  $AH$  треугольника  $ADM$  перпендикулярна плоскости  $BDC$ .

б) Найдите угол между прямой  $DM$  и плоскостью  $ADB$ , если  $AB : AD = 4 : \sqrt{3}$ .

2. Точка  $M$  — середина ребра  $BB_1$  треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ .

а) Постройте прямую пересечения плоскостей  $A_1MC_1$  и  $ABC$ .

б) В каком отношении плоскость  $A_1MC_1$  делит отрезок, соединяющий точку  $B_1$  с серединой ребра  $AC$ ?

3. Основание пирамиды  $SABCDEF$  — правильный шестиугольник  $ABCDEF$ . Высота пирамиды проходит через точку пересечения прямых  $BC$  и  $DE$ .

а) Докажите, что  $SC \perp BF$ .

б) Найдите угол между прямыми  $AF$  и  $SB$ , если наибольшее боковое ребро пирамиды втрое больше стороны основания.

4. Точка  $P$  лежит на ребре  $AD$  правильного тетраэдра  $ABCD$ , причём  $AP : PD = 1 : 2$ . Плоскость, проходящая через точку  $P$  перпендикулярно ребру  $CD$ , пересекает это ребро в точке  $M$ , а ребро  $BD$  — в точке  $Q$ .

а) Докажите, что плоскость  $PMQ$  делит высоту пирамиды пополам.

б) Найдите объём треугольной пирамиды  $QABC$ , если объём пирамиды  $DPMQ$  равен  $V$ .

5. Шар вписан в прямую четырёхугольную призму.

а) Докажите, что суммы площадей противоположных боковых граней призмы равны.

б) Найдите отношение объёмов шара и призмы, если периметр основания призмы в четыре раза больше диаметра шара.

6. Основания шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  — правильные шестиугольники. Точка  $K$  — середина ребра  $CC_1$ .

а) Докажите, что плоскость  $ED_1K$  делит ребро  $BC$  в отношении  $2 : 1$ , считая от точки  $B$ .

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $ED_1K$ , если призма правильная, сторона её основания равна  $2\sqrt{21}$ , а высота равна  $6$ .

## Диагностическая работа 5

1. Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  с основаниями  $ABCDEF$  и  $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ ,  $P$  — точка пересечения прямой  $CB_1$  с плоскостью  $AA_1 F_1$ .

а) Докажите, что  $B_1$  — середина отрезка  $CP$ .

б) Найдите угол между прямыми  $BA_1$  и  $CB_1$ , если боковое ребро призмы вдвое больше стороны основания.

2. Основание пирамиды  $SABCD$  — трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ .

а) Постройте прямую пересечения плоскостей  $ASB$  и  $CSD$ .

б) Найдите угол между плоскостями  $ASD$  и  $BSC$ , если высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания,  $AD = 3BC$ , а двугранный угол при ребре  $AD$  пирамиды равен  $30^\circ$ .

3. Точки  $M$  и  $N$  лежат на рёбрах соответственно  $AB$  и  $A_1 B_1$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , причём  $AM : MB = B_1 N : NA_1 = 2 : 1$ ; точка  $K$  — середина ребра  $CC_1$ .

а) Постройте точку пересечения плоскости  $KMN$  с прямой  $B_1 C_1$ .

б) Найдите угол между прямой  $BB_1$  и плоскостью  $KMN$ , если параллелепипед прямоугольный,  $AB = 3$ ,  $BC = 2$ ,  $AA_1 = 4$ .

4. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AD$  и  $CD$  треугольной пирамиды  $DABC$ .

а) Постройте прямую пересечения плоскостей  $MBN$  и  $ABC$ .

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $MBN$ , если  $ABC$  — равносторонний треугольник со стороной  $4\sqrt{2}$ , а высота  $DH$  пирамиды равна  $3\sqrt{2}$  и проходит через середину ребра  $BC$ .

5. Дана треугольная призма  $ABCA_1 B_1 C_1$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через вершины  $A_1$  и  $C$  параллельно прямой  $BC_1$ .

а) Постройте точку пересечения плоскости  $\alpha$  с прямой  $B_1 C_1$ .

б) В каком отношении плоскость  $\alpha$  делит ребро  $AB$ ?

6. Точка  $P$  лежит на диаметре  $AB$  сферы. При этом  $AP : PB = 3 : 1$ . Через прямую  $AB$  проведена плоскость  $\alpha$ , а через точку  $P$  — плоскость  $\beta$ , перпендикулярная  $AB$  и пересекающая сферу по окружности  $S$ . Отрезок  $CD$  — общая хорда окружностей сечений сферы этими плоскостями,  $M$  — точка на окружности  $S$ .

а) Докажите, что  $AM = CD$ .

б) Найдите объём пирамиды с вершиной  $M$  и основанием  $ACBD$ , если диаметр сферы равен 12, а  $M$  — наиболее удалённая от плоскости  $\alpha$  точка окружности  $S$ .



## Диагностическая работа 6

1. Высота конуса равна радиусу его основания.

а) Докажите, что угол при вершине осевого сечения равен  $90^\circ$ .

б) Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, — равносторонний треугольник. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения, если радиус основания равен  $\sqrt{3}$ .

2. Основания шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  — правильные шестиугольники.

а) Докажите, что диагонали  $AD_1$ ,  $BE_1$  и  $CF_1$  призмы пересекаются в одной точке.

б) Найдите угол между прямыми  $DA_1$  и  $BC_1$ , если призма правильная и  $AA_1 = AB\sqrt{2}$ .

3. Точка  $M$  — середина ребра  $BC$  треугольной пирамиды  $ABCD$ , точка  $K$  лежит на прямой  $BD$ , причём  $B$  — середина отрезка  $DK$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $KM$  параллельно ребру  $AB$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит ребро  $CD$  в отношении  $1 : 2$ , считая от точки  $C$ .

б) Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $ABC$ , если  $DABC$  — правильная пирамида с вершиной  $D$ , а её высота относится к стороне основания как  $1 : \sqrt{3}$ .

4. Основание  $ABC$  треугольной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  — равносторонний треугольник  $ABC$ . Ортогональная проекция вершины  $C_1$  на плоскость  $ABC$  совпадает с центром треугольника  $ABC$ .

а) Докажите, что грань  $AA_1 B_1 B$  — прямоугольник.

б) Найдите расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $BC$ , если все рёбра призмы равны 3.

5. Основание  $ABCD$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — квадрат, боковые грани — ромбы, а ортогональная проекция вершины  $C_1$  на плоскость основания совпадает с точкой пересечения диагоналей основания  $ABCD$ .

а) Докажите, что  $AA_1 \perp AC_1$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $BC$ , если  $AB = \sqrt{6}$ .

6. Через сторону  $AB$  основания  $ABC$  правильной треугольной пирамиды  $ABCD$  проведена плоскость перпендикулярно ребру  $DC$ . Известно, что эта плоскость разбивает пирамиду на две треугольные пирамиды, объёмы которых относятся как  $3 : 5$ , причём точка  $D$  содержится в большей из этих частей.

- 
- а) Докажите, что эта плоскость делит высоту  $DH$  пирамиды в отношении  $5 : 1$ , считая от вершины  $D$ .
- б) Найдите угол между секущей плоскостью и плоскостью  $ABC$ .

## ОТВЕТЫ

### §1. Построения на проекционном чертеже (параллельная проекция)

1.1. 1:2, считая от точки  $D$ . 1.2. 1:2, считая от точки  $B$ . 1.3. 1:2, считая от точки  $A$ . 1.4. 1:2. 1.5. 1:1. 1.6. 1:3, считая от точки  $S$ . 1.7. 1:2, считая от точки  $C$ . 1.8. 1:2, считая от точки  $B$ . 1.9. 1:3, считая от точки  $B$ . 1.10. 1:1. 1.11. 1:2, считая от точки  $C$ . 1.12. 1:2, считая от точки  $S$ . 1.13. 1:5, считая от точки  $A$ . 1.14. 3:4, считая от точки  $B$ . 1.15. 1:2, считая от точки  $M$ . 1.16. 1:1. 1.17. 3:1, считая от точки  $D$ . 1.18. 2:1, считая от точки  $S$ . 1.19. 2:1, считая от точки  $B_1$ . 1.20. 2:1, считая от точки  $A$ . 1.21. 1:2, считая от точки  $F$ . 1.22. 1:1. 1.23. 1:2, считая от точки  $S$ . 1.24. 6:5, считая от точки  $A$ .

### §2. Угол между прямыми

#### Подготовительные задачи

1. а)  $90^\circ$ ; б)  $90^\circ$ ; в)  $\arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; г)  $60^\circ$ ; д)  $90^\circ$ . 2. а)  $90^\circ$ ; б)  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$ ; в)  $\arccos \frac{1}{6}$ ; г)  $\arccos \frac{2}{3}$ . 3. а)  $90^\circ$ ; б)  $60^\circ$ ; в)  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$ ; г)  $\arctg \sqrt{2}$ . 4. а)  $60^\circ$ ; б)  $45^\circ$ ; в)  $90^\circ$ ; г)  $\arccos \frac{1}{4}$ . 5. а)  $90^\circ$ ; б)  $\arctg \frac{1}{2}$ ; в)  $\arccos \frac{3}{4}$ ; г)  $90^\circ$ . 6. а)  $60^\circ$ ; б)  $90^\circ$ ; в)  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$ ; г)  $\arccos \frac{1}{4}$ .

#### Задачи на доказательство и вычисление

2.1.  $90^\circ$ . 2.2.  $90^\circ$ . 2.3.  $90^\circ$ . 2.4.  $60^\circ$ . 2.5.  $\arccos \frac{11}{14} = 2 \arctg \frac{\sqrt{5}}{5}$ .  
2.6.  $\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$ . 2.7.  $\arccos \frac{11}{4\sqrt{10}}$ . 2.8.  $90^\circ$ . 2.9. а) Не может;  $\arccos \frac{5}{6}$ .  
2.10.  $\arccos \frac{1}{6}$ . 2.11. 3. 2.12.  $\arccos \frac{16}{25}$ . 2.13.  $60^\circ$ . 2.14.  $30^\circ$ . 2.15.  $45^\circ$ .  
2.16.  $\arccos \frac{9}{11}$ . 2.17.  $\arccos \frac{\sqrt{6}}{4}$ . 2.18.  $\arccos \frac{3\sqrt{2}}{10}$ . 2.19.  $\frac{3}{4}$ . 2.20.  $\frac{3}{4}$ .  
2.21.  $\arccos \frac{11}{4\sqrt{13}}$ . 2.22.  $\arccos \frac{\sqrt{35}}{14}$ . 2.23.  $\arccos \frac{2}{3}$ . 2.24.  $\arccos \frac{2}{3}$ .

### §3. Угол между плоскостями

#### Подготовительные задачи

1. а)  $90^\circ$ ; б)  $\arctg \sqrt{2}$ ; в)  $\arccos \frac{1}{3}$ ; г)  $60^\circ$ . 2. а)  $90^\circ$ ; б)  $\arctg \sqrt{2}$ ; в)  $\arctg \frac{2\sqrt{2}}{5}$ .  
3. а)  $\arccos \frac{1}{3}$ ; б)  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$ ; в)  $45^\circ$ ; г)  $\arccos \frac{1}{3}$ ; д)  $\arctg \frac{\sqrt{2}}{3}$ .  
4. а)  $90^\circ$ ; б)  $\arctg \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ; в)  $\arccos \frac{1}{7}$ ; г)  $\arctg \frac{4\sqrt{3}}{3}$ . 5. а)  $\arctg \frac{2}{3}$ ; б)  $60^\circ$ ; в)  $60^\circ$ ; г)  $30^\circ$ . 6. а)  $\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$ ; б)  $\arctg 2\sqrt{3}$ ; в)  $\arccos \frac{3}{5}$ ; г)  $\arccos \frac{1}{5}$ .

ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И ВЫЧИСЛЕНИЕ

- 3.1.  $\arccos \frac{1}{5}$ . 3.2.  $2 \arctg \frac{2}{3} = \arccos \frac{5}{13}$ . 3.3.  $\arccos \left(-\frac{1}{7}\right)$ . 3.4.  $\arccos \left(-\frac{3}{5}\right)$ .  
 3.5.  $\arctg \frac{\sqrt{5}}{2}$ . 3.6.  $\arctg \frac{\sqrt{10}}{3}$ . 3.7.  $90^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ . 3.8.  $90^\circ, 45^\circ$ . 3.9.  $\arctg \frac{1}{8}$ .  
 3.10.  $\arctg \frac{2}{5}$ . 3.11.  $90^\circ$ . 3.12.  $\arctg \frac{2}{3}$ . 3.13.  $\arctg \sqrt{2}$ . 3.14.  $\arctg \frac{\sqrt{41}}{5} =$   
 $= \arccos \frac{5}{\sqrt{66}}$ . 3.15.  $\arctg \frac{3\sqrt{34}}{10}$ . 3.16.  $45^\circ$ . 3.17.  $\arctg \frac{\sqrt{23}}{5} = \arccos \frac{5\sqrt{3}}{12}$ .  
 3.18.  $\arctg \frac{\sqrt{7}}{10} = \arccos \frac{10}{\sqrt{107}}$ . 3.19.  $\arctg \frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$ . 3.20.  $\arctg \frac{5}{3}$ .

§ 4. Расстояние от точки до прямой. Расстояние от точки до плоскости

Подготовительные задачи

1. а)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ; б) 1; в) 1; г)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ; д)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ; е)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ; ж)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .  
 2. а)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; б)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ; в)  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ; г)  $\frac{\sqrt{6}}{9}$ .  
 3. а) 1; б)  $\frac{\sqrt{11}}{4}$ ; в)  $\frac{1}{2}$ ; г)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; д)  $\frac{1}{2}$ .  
 4. а)  $\frac{\sqrt{14}}{4}$ ; б)  $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ; в)  $\frac{\sqrt{19}}{4}$ ; г)  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ ; д)  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ .  
 5. а)  $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ; б)  $\sqrt{3}$ ; в)  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ; г)  $\sqrt{2}$ ; д)  $\frac{\sqrt{30}}{5}$ ; е)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; ж)  $\frac{2\sqrt{21}}{7}$ ; з)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ; и)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ; к)  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ .  
 6. а)  $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ; б)  $\frac{\sqrt{15}}{4}$ ; в)  $\frac{\sqrt{42}}{4}$ ; г)  $\sqrt{3}$ ; д)  $\frac{\sqrt{39}}{4}$ ; е)  $\frac{2\sqrt{15}}{5}$ ; ж)  $\frac{\sqrt{39}}{13}$ ; з)  $\frac{3\sqrt{39}}{13}$ .

ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И ВЫЧИСЛЕНИЕ

- 4.1.  $\sqrt{5}$ . 4.2.  $\frac{60}{17}$ . 4.3. 14. 4.4. 3. 4.5.  $2\sqrt{3}$ . 4.6. 2. 4.7. 4. 4.8. 4. 4.9. 3.  
 4.10. 3. 4.11.  $\frac{12}{5}$ . 4.12.  $\frac{3}{\sqrt{5}}$ . 4.13.  $\sqrt{3}$ . 4.14.  $\frac{8}{5}$ . 4.15. 1,4. 4.16. 15. 4.17. 2.  
 4.18. 1. 4.19. 2. 4.20. 1. 4.21.  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ . 4.22.  $\frac{\sqrt{6}}{9}$ . 4.23.  $5\sqrt{3}$ . 4.24.  $\frac{12\sqrt{5}}{5}$ .

§ 5. Угол между прямой и плоскостью

Подготовительные задачи

1. а)  $\arctg \sqrt{2}$ ; б)  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$ ; в)  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$ ; г)  $30^\circ$ .  
 2. а)  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$ ; б)  $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$ ; в)  $\arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; г)  $45^\circ$ .  
 3. а)  $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{6}$ ; б)  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$ ; в)  $\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$ ; г)  $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$ .  
 4. а)  $\arctg \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ; б)  $\arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; в)  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$ ; г)  $\arctg \frac{\sqrt{3}}{4}$ .  
 5. а)  $60^\circ$ ; б)  $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$ ; в)  $60^\circ$ ; г)  $\arcsin \frac{\sqrt{15}}{5}$ .  
 6. а)  $\arcsin \frac{\sqrt{15}}{5}$ ; б)  $\arcsin \frac{\sqrt{15}}{5}$ ; в)  $\arcsin \frac{\sqrt{15}}{10}$ ; г)  $\arcsin \frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

## ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И ВЫЧИСЛЕНИЕ

- 5.1.  $\arctg \frac{4}{5}$ ,  $\arctg \frac{3}{5}$ . 5.2.  $\arctg \frac{7}{30}$ ,  $\arctg \frac{7}{40}$ . 5.3.  $\arctg \frac{2}{3}$ . 5.4.  $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$ .  
 5.5.  $60^\circ$ . 5.6.  $45^\circ$ . 5.7.  $45^\circ$ . 5.8.  $\arctg \sqrt{\frac{2}{3}}$ . 5.9.  $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$ . 5.10.  $\arcsin \sqrt{\frac{3}{7}}$ .  
 5.11.  $30^\circ$ . 5.12.  $\arctg 3$ . 5.13.  $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$ . 5.14.  $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$ . 5.15.  $45^\circ$ . 5.16.  $30^\circ$ .  
 5.17.  $45^\circ$ . 5.18.  $\arctg 2$ . 5.19.  $\arcsin \frac{3\sqrt{7}}{14}$ . 5.20.  $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

## § 6. Расстояние между скрещивающимися прямыми

## Подготовительные задачи

1. а) 1; б)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; в)  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ; г)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . 2. а)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; б)  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ; в)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ; г)  $\sqrt{\frac{2}{11}}$ ; д)  $\sqrt{\frac{2}{35}}$ ; е)  $\frac{1}{\sqrt{10}}$ .  
 3. а)  $\frac{1}{2}$ ; б)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ; в)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ; г)  $\frac{1}{2}$ . 4. а)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; б)  $\sqrt{\frac{3}{7}}$ ; в)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ; г)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ . 5. а) 1; б)  $\sqrt{3}$ ;  
 в)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; г)  $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ; д)  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ . 6. а)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; б)  $2\sqrt{\frac{3}{13}}$ ; в)  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ; г)  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ .

## ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И ВЫЧИСЛЕНИЕ

- 6.1. 7,2. 6.2. 24. 6.3.  $\sqrt{3}$ . 6.4. 1. 6.5. 1. 6.6. 6. 6.7. 1. 6.8.  $\sqrt{2}$ . 6.9. 3.  
 6.10. 7. 6.11. 1. 6.12. 6. 6.13. 2. 6.14. 4. 6.15. 6. 6.16. 3. 6.17.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ . 6.18.  $\frac{6}{5}$ .  
 6.19. 3. 6.20. 2. 6.21.  $\sqrt{3}$ . 6.22. 4,8. 6.23.  $a\sqrt{\frac{2}{15}}$ . 6.24.  $\frac{a}{\sqrt{6}}$ .

## § 7. Площадь сечения

## Подготовительные задачи

1. а)  $a^2\sqrt{2}$ ; б)  $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ ; в)  $\frac{9a^2}{8}$ ; г)  $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$ ; д)  $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ .  
 2. а)  $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$ ; б)  $\frac{a^2\sqrt{11}}{16}$ ; в)  $\frac{a^2}{4}$ ; г)  $\frac{a^2\sqrt{6}}{9}$ ; д)  $\frac{a^2\sqrt{3}}{9}$ .  
 3. а)  $\frac{a^2}{4}$ ; б)  $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$ ; в)  $\frac{3a^2\sqrt{11}}{16}$ ; г)  $\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$ ; д)  $\frac{a^2\sqrt{10}}{6}$ .  
 4. а)  $\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$ ; б)  $\frac{5a^2\sqrt{39}}{36}$ ; в)  $\frac{a^2\sqrt{39}}{12}$ ; г)  $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$ ; д)  $\frac{3a^2\sqrt{7}}{16}$ .  
 5. а)  $\frac{3a^2\sqrt{7}}{4}$ ; б)  $a^2\sqrt{6}$ ; в)  $3a^2$ ; г)  $\frac{3a^2}{2}$ ; д)  $\frac{a^2\sqrt{39}}{4}$ .  
 6. а)  $\frac{a^2\sqrt{39}}{4}$ ; б)  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ ; в)  $\frac{3a^2\sqrt{19}}{16}$ ; г)  $\frac{5a^2\sqrt{15}}{16}$ ; д)  $\frac{13a^2\sqrt{39}}{48}$ .

## ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И ВЫЧИСЛЕНИЕ

- 7.1.  $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$ . 7.2.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ . 7.3.  $\frac{3\sqrt{30}}{4}$ . 7.4.  $\frac{3a^2\sqrt{19}}{16}$ . 7.5.  $\frac{a^2\sqrt{29}}{8}$ . 7.6. 12.  
 7.7.  $\frac{3a^2\sqrt{33}}{8}$ . 7.8. 1,5. 7.9. 276. 7.10. 44. 7.11. 90. 7.12. 97,5. 7.13.  $8\sqrt{10}$ .  
 7.14.  $\frac{39\sqrt{39}}{4}$ . 7.15.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ . 7.16.  $\frac{140}{3}$ . 7.17.  $3\sqrt{195}$ . 7.18. 12. 7.19.  $\frac{80}{3}$ .  
 7.20.  $7\sqrt{6}$ . 7.21. 52. 7.22. 3. 7.23. 55. 7.24. 15.

**§ 8. Объём многогранника**

ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. а)  $\frac{1}{6}$ ; б)  $\frac{1}{12}$ ; в)  $\frac{1}{3}$ ; г)  $\frac{7}{24}$  и  $\frac{17}{24}$ ; д)  $\frac{1}{6}$ .  
 2. а)  $\frac{1}{2}$ ; б)  $\frac{1}{4}$ ; в)  $\frac{1}{8}$  и  $\frac{7}{8}$ ; г)  $\frac{1}{4}$ ; д)  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{2}$ .  
 3. а)  $\frac{1}{8}$  и  $\frac{7}{8}$ ; б)  $\frac{1}{8}$  и  $\frac{7}{8}$ ; в)  $\frac{1}{4}$  и  $\frac{3}{4}$ ; г)  $\frac{1}{3}$  и  $\frac{2}{3}$ ; д)  $\frac{3}{8}$  и  $\frac{5}{8}$ .  
 4. а)  $\frac{1}{3}$  и  $\frac{2}{3}$ ; б)  $\frac{1}{12}$  и  $\frac{11}{12}$ ; в)  $\frac{7}{12}$  и  $\frac{5}{12}$ ; г)  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{2}$ ; д)  $\frac{1}{12}$ .  
 5. а)  $\frac{5}{6}$ ; б)  $\frac{1}{9}$ ; в)  $\frac{1}{6}$ ; г)  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{2}$ ; д)  $\frac{2}{9}$  и  $\frac{7}{9}$ .  
 6. а)  $\frac{1}{3}$ ; б)  $\frac{1}{8}$ ; в)  $\frac{1}{12}$ ; г)  $\frac{1}{12}$ ; д)  $\frac{13}{36}$  и  $\frac{23}{36}$ .

ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И ВЫЧИСЛЕНИЕ

- 8.1. 144. 8.2. 32. 8.3. 36. 8.4.  $48\sqrt{3}$ . 8.5. 1:1. 8.6. 19:35. 8.7. 4.  
 8.8. 3. 8.9.  $16V$ . 8.10.  $\frac{9}{4}V$ . 8.11.  $\frac{25}{144}V$ . 8.12.  $\frac{1}{3}V, \frac{2}{3}V$ . 8.13. 1:1. 8.14.  $\frac{2}{3}V$ .  
 8.15.  $\frac{30}{7}$ . 8.16.  $\frac{125}{6}$ . 8.17. 1:47. 8.18. 9:119. 8.19. 36. 8.20.  $\frac{8}{9}$ . 8.21.  $\frac{1}{2}abc$ .  
 8.22.  $\frac{4}{9}abc$ .

**§ 9. Фигуры вращения**

ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. а)  $200\pi$ ; б)  $80\pi$ ; в) 48; г) 4; д)  $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$ . 2. а)  $24\pi$ ; б)  $36\pi$ ; в)  $3\sqrt{15}$ ; г)  $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ;  
 д)  $60^\circ$ ; е)  $\arccos \frac{1}{4}$ . 3. а)  $4500\pi$ ; б)  $900\pi$ ; в)  $\frac{\pi}{2}$ ; г)  $81\pi$  или  $729\pi$ ; д)  $432\pi$ .

ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И ВЫЧИСЛЕНИЕ

- 9.1. 1:2. 9.2. 1:4. 9.3.  $\frac{6\sqrt{7}}{5}$ . 9.4.  $\frac{12}{5}$ . 9.5.  $4500\pi$ . 9.6.  $100\pi$ . 9.7.  $144\pi$ .  
 9.8.  $\frac{32\pi}{3}$ . 9.9.  $\pi\sqrt{3}:24$ . 9.10.  $\pi:18$ . 9.11.  $3\sqrt{66}$ . 9.12.  $18\sqrt{2}$ . 9.13. 2 или 14.  
 9.14.  $\frac{21}{17}$  или 3. 9.15.  $\frac{4}{3}R$ . 9.16.  $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ . 9.17.  $90^\circ$ . 9.18.  $120^\circ$ . 9.19.  $\pi\sqrt{10}$ .  
 9.20.  $\frac{\pi\sqrt{10}}{2}$ .

**§ 10. Элементы правильных пирамид**

1. а)  $\frac{a^3}{12}$ ; б)  $\operatorname{arctg} 2$ ; в)  $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ ; г)  $2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{6}}{3} = \arccos \frac{1}{5}$ ; д)  $a\sqrt{\frac{3}{5}}$ ; е)  $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ;  
 ж)  $r = \frac{a(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{12}$ ; з)  $\arcsin \frac{3}{5}$ .  
 2. а)  $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ ; б)  $\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}} = \arccos \sqrt{\frac{2}{5}} = \arcsin \sqrt{\frac{3}{5}}$ ; в)  $\frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}$ ; г)  $60^\circ$ ; д)  $2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{5}{3}} =$   
 $= \arccos \left(-\frac{1}{4}\right)$ ; е)  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ; ж)  $R = \frac{5a}{4\sqrt{3}}$ ; з)  $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ ; и)  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

3. а)  $45^\circ$ ; б)  $\operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} = \arccos \sqrt{\frac{3}{7}} = \arcsin \frac{2}{\sqrt{7}}$ ; в)  $2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}$ ; г)  $2 \operatorname{arctg} \sqrt{6} = \arccos \left(-\frac{5}{7}\right)$ ; д)  $2a\sqrt{\frac{3}{7}}$ ; е)  $R = a$ ; ж)  $r = \frac{a(\sqrt{21}-3)}{4}$ ; з)  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{7}$ .

4. а)  $R = \frac{5a\sqrt{3}}{4\sqrt{11}}$ ; б)  $r = \frac{a\sqrt{11}}{2(\sqrt{3}+6)} = \frac{a\sqrt{11}(6-\sqrt{3})}{66}$ ; в)  $\arccos \frac{3}{8}$ ; г)  $\arcsin \frac{\sqrt{11}}{8}$ .

5. а)  $R = \frac{5a}{4\sqrt{3}}$ ; б)  $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ ; в)  $2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{5}{3}} = \arccos \left(-\frac{1}{4}\right)$ ; г)  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

6. а)  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$ ; б)  $\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{13}}$ ; в)  $\arccos \left(-\frac{7}{25}\right)$ ; г)  $R = \frac{8a}{3\sqrt{13}}$ ; д)  $r = \frac{a(5-\sqrt{13})}{12} = \frac{a}{5+\sqrt{13}}$ ; е)  $\arcsin \frac{3\sqrt{39}}{25}$ .

7. а)  $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}$ ; б)  $\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{7}}$ ; в)  $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2} = \arccos \left(-\frac{7}{9}\right)$ ; г)  $R = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ ; д)  $r = \frac{a(3\sqrt{2}-\sqrt{14})}{4}$ ; е)  $\arcsin \frac{\sqrt{14}}{9}$ .

8. а)  $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$  или  $\arcsin \frac{1}{3}$ ; б)  $\operatorname{arctg} 2$  или  $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; в)  $90^\circ$  или  $120^\circ$ ; г)  $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$  или  $R = \frac{3a\sqrt{6}}{8}$ ; д)  $r = \frac{a(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{12}$  или  $r = \frac{a(3-\sqrt{6})}{6}$ .

#### Диагностическая работа 1

1.  $45^\circ$ . 2.  $\operatorname{arctg} 4$ . 3.  $\frac{80\sqrt{3}}{3}$ . 4.  $\frac{\pi}{8}$ . 5.  $\frac{7\sqrt{21}}{20}$ . 6.  $\sqrt{3}$ .

#### Диагностическая работа 2

1. 3. 2.  $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$ . 3.  $30^\circ$ . 4. 44. 5.  $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{6}}{2}$ . 6. 7,2.

#### Диагностическая работа 3

1.  $60^\circ$ . 2. 3:7. 3.  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$ . 4.  $\frac{296}{15}$ . 5.  $\arcsin \frac{\sqrt{5}}{10}$ . 6.  $3\sqrt{3}$ .

#### Диагностическая работа 4

1.  $\operatorname{arctg} 2$ . 2. 1:2, считая от точки  $B_1$ . 3.  $\arccos \frac{1}{\sqrt{6}} = \operatorname{arctg} 5$ . 4.  $\frac{9}{4}V$ . 5.  $\frac{\pi}{6}$ . 6.  $35\sqrt{6}$ .

#### Диагностическая работа 5

1.  $\arccos 0,9$ . 2.  $90^\circ$ . 3.  $\operatorname{arctg} 5$ . 4. 6. 5. 1:1. 6. 108.

#### Диагностическая работа 6

1. 1. 2.  $90^\circ$ . 3.  $\operatorname{arctg} \frac{4}{5}$ . 4.  $\sqrt{6}$ . 5. 2. 6.  $30^\circ$ .

## Содержание

Предисловие . . . . .	3
Краткий список основных сведений о многогранниках . . . . .	4
§ 1. Построения на проекционном чертеже (параллельная проекция) . . . . .	5
§ 2. Угол между прямыми . . . . .	14
§ 3. Угол между плоскостями . . . . .	22
§ 4. Расстояние от точки до прямой. Расстояние от точки до плоскости . . . . .	30
§ 5. Угол между прямой и плоскостью . . . . .	40
§ 6. Расстояние между скрещивающимися прямыми . . . . .	49
§ 7. Площадь сечения . . . . .	60
§ 8. Объём многогранника . . . . .	67
§ 9. Фигуры вращения . . . . .	76
§ 10. Элементы правильных пирамид . . . . .	84
Приложение 1. Метод координат . . . . .	98
Приложение 2. Задачи ЕГЭ 2017 и 2018 г. . . . .	106
Диагностические работы	
Диагностическая работа 1 . . . . .	130
Диагностическая работа 2 . . . . .	131
Диагностическая работа 3 . . . . .	133
Диагностическая работа 4 . . . . .	134
Диагностическая работа 5 . . . . .	135
Диагностическая работа 6 . . . . .	136
Ответы . . . . .	138



Учебно-методическое пособие

*Рафаил Калманович Гордин*

ЕГЭ 2020. Математика. Геометрия. СТЕРЕОМЕТРИЯ.  
Задача 14 (профильный уровень)

Под редакцией И. В. Яценко

Подписано в печать 15.07.2019 г. Формат 60 × 90  $\frac{1}{16}$ . Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Печ. л. 9. Тираж 4000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования.  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».  
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.  
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89. E-mail: mittelpress@mail.ru

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине  
«Математическая книга», Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.  
Тел. (495) 745-80-31. E-mail: biblio@mcsme.ru

---