ЕГЭ 2020

Под редакцией
И. В. Ященко

17
Профильный

С. А. Шестаков

Задачи с экономическим содержанием

ФГОС

МАТЕМАТИКА

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

С. А. Шестаков

ЕГЭ 2020. Математика

Задачи с экономическим содержанием

Задача 17 (профильный уровень)

Под редакцией И. В. Ященко

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС)

Москва
Издательство МЦНМО
2020

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Ш51

Шестаков С. А.

Ш51 ЕГЭ 2020. Математика. Задачи с экономическим содержанием. Задача 17 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2020. — 208 с.

ISBN 978-5-4439-1417-6

Настоящее учебное пособие предназначено для подготовки к ЕГЭ по математике (профильный уровень) и посвящено задачам с экономическим содержанием. Пособие состоит из пяти параграфов, в каждом из которых приводятся необходимые методические рекомендации, примеры решения задач, упражнения и диагностическая работа.

Пособие предназначено для учащихся старшей школы, выпускников, учителей математики и может быть использовано в урочной деятельности, при проведении факультативных занятий и элективных курсов, а также для самостоятельного освоения методов решения задач с экономическим содержанием.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

12+

Учебно-методическое пособие

Сергей Алексеевич Шестаков

ЕГЭ 2020. Математика. Задачи с экономическим содержанием.
Задача 17 (профильный уровень)

Под редакцией И. В. Ященко

Подписано в печать 15.07.2019 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 13. Тираж 4000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6. Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru

ISBN 978-5-4439-1417-6

Предисловие

Это пособие предназначено для подготовки к Единому государственному экзамену по математике (профильный уровень) и посвящено задачам с экономическим содержанием, которые можно встретить в вариантах экзаменационных и диагностических работ.

Отметим, что речь идёт именно о задачах по математике, а не по экономике. Вообще говоря, любую задачу, условие которой связано с товарно-денежными отношениями, производством товаров и услуг, минимизацией расходов или максимизацией прибыли и т. п., можно отнести к задачам с экономическим содержанием. Подобные задачи встречаются на самых разных позициях в вариантах ЕГЭ по математике — от первых до последних. Поэтому в пособии будут рассмотрены все типы таких задач, начиная с простейших:

- задачи на чтение и анализ данных, представленных в виде графиков, диаграмм и таблиц,
- простейшие текстовые арифметические задачи на товарно-денежные отношения (в основном на оплату товаров и услуг),
- арифметические текстовые задачи на проценты,
- задачи о кредитовании и банковских процентах,
- задачи оптимизации производства товаров или услуг (минимизации расходов или максимизации прибыли).

Таким образом, пособие состоит из пяти параграфов, в каждом из которых приводятся необходимые методические рекомендации и примеры решения задач одного из перечисленных типов. Завершают параграф упражнения (в двух вариантах каждое) и диагностическая работа (в двух вариантах) по теме параграфа. Число задач в диагностических работах дано с избытком. При самостоятельной работе с пособием в домашних условиях нужно постараться решить диагностические работы полностью. При использовании пособия учителем на уроках или факультативных занятиях можно отобрать задачи диагностических работ в соответствии с уровнем класса и поставленными методическими целями.

Пособие может быть использовано в урочной деятельности, при проведении факультативных занятий и элективных курсов, а также для самостоятельного освоения учащимися методов решения задач с экономическим содержанием.

Автор признателен и благодарен О. А. Васильевой за тщательное и внимательное редактирование рукописи, замечания и предложения, существенно способствовавшие улучшению книги.

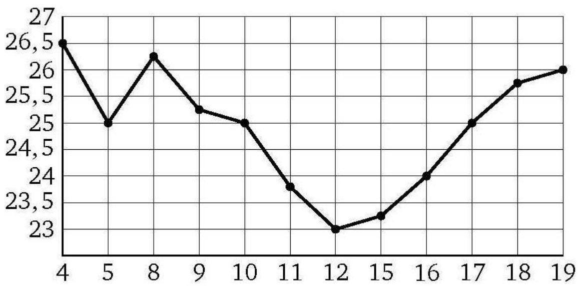
§ 1. Чтение и анализ данных, представленных в виде графиков, диаграмм и таблиц

Ведущим каналом восприятия у большинства людей является визуальный. Отчасти именно этим объясняется стремление к наглядности при подаче той или иной информации в различных источниках — от учебных пособий до газет, журналов и интернет-контента. Кроме того, представление информации (особенно статистической) в виде диаграмм, графиков, таблиц позволяет удобно и быстро считывать эту информацию с целью её анализа или прогноза на будущее. Поэтому умение «читать» (кавычки в дальнейшем будем опускать) графики, таблицы и диаграммы и анализировать представленные на них данные является одним из базовых для адаптации человека в социуме. Несмотря на это, соответствующее задание ЕГЭ по математике вызывает затруднения примерно у каждого двадцатого школьника. Эти задачи в части чтения графиков делятся на две чётко разграниченные группы: в первой требуется найти точку оси абсцисс, ответив на вопрос типа «какого числа значение величины было равно данному?», во второй — найти наибольшее или наименьшее значение некоторой величины, т. е. точку оси ординат. Для задач первой группы процент верных ответов в среднем на 5 % ниже, чем для задач второй группы. Часть ошибочных ответов обусловлена невнимательностью: перепутаны наибольшее и наименьшее значения, вместо цены в ответе указывают дату.

Отметим, что для полноты картины в этот параграф помимо задач на товарно-денежные отношения включены задачи на чтение и анализ данных, лишь опосредованно связанных с теми или иными экономическими и макроэкономическими характеристиками (возрастной состав населения той или иной страны, характеристика земельных и других ресурсов и т. п.).

Пример 1. На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 4 по 19 апреля 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены ломаной линией. Определите по рисунку наибольшую цену нефти на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за баррель).

Решение. Для ответа на вопрос задачи достаточно найти самую «высокую» точку графика. Очевидно, эта точка соответствует закры-



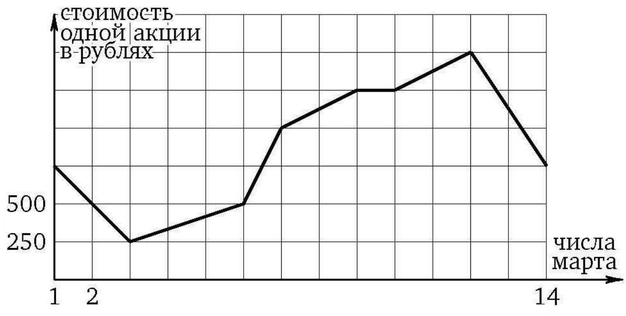
тию торгов 4 апреля. Искомая цена в этот момент составляла 26,5 доллара за баррель.

Ответ. 26,5.

Типичной ошибкой при решении подобных задач является запись в ответе даты вместо стоимости.

В более сложных случаях ответ на вопрос задания требует минимальных вычислений: нахождения разности наибольшего и наименьшего значений некоторой величины, расчёта стоимости или числа акций, подсчёта среднего арифметического и т. п.

Пример 2. На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций золотодобывающей компании в первые две недели марта. В первую неделю марта бизнесмен купил 100 акций, а потом продал их на второй неделе. Какую наибольшую прибыль (в рублях) он мог получить? Название денежной единицы в ответе не указывайте.



Решение. Наибольшую возможную прибыль в условиях задачи можно получить, купив акции по минимально возможной цене в первую неделю марта (т. е. 3 марта по цене 250 рублей за акцию) и продав их по максимально возможной цене во вторую неделю марта (т. е. 12 марта по цене 1500 рублей за акцию). В этом случае прибыль, полученная от покупки и продажи одной акции, составит $1500 - 250 = 1250$ рублей. Прибыль от покупки и продажи 100 акций будет равна $1250 \cdot 100 = 125\,000$ рублей.

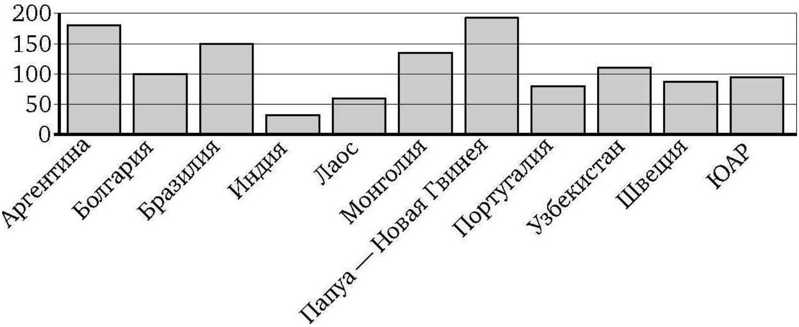
Ответ. 125 000.

Для представления, сопоставления, интерпретации, прогнозирования и анализа информации наряду с графиками часто используют диаграммы — круговые и столбчатые. Такие диаграммы позволяют наглядно представить различие в росте тех или иных показателей и параметров, доли тех или иных величин в общей совокупности некоторых характеристик и т. п.

Задачи на чтение диаграмм не сложнее задач на чтение графиков. В простейших случаях надо определить, оценить или соотнести с условием долю, которую занимает в общей площади круговой диаграммы сектор, соответствующий одной из характеристик, подсчитать число столбиков, удовлетворяющих тому или иному требованию, либо сравнить некоторые из них по высоте. Немного сложнее задачи, требующие определённого расчёта или сопоставления данных.

Заметим, что диаграммы применяются для наглядного, качественного сравнения тех или иных показателей или характеристик. Решение подобных задач не предполагает использования транспортира (для круговых диаграмм) или линейки (для столбчатых диаграмм).

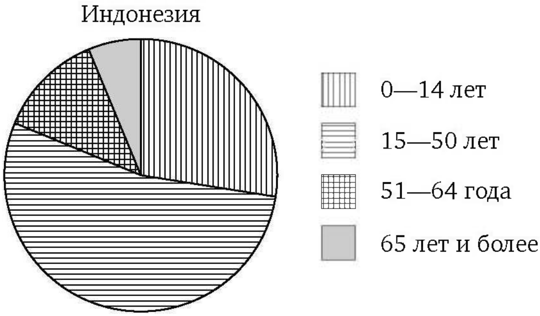
Пример 3. На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа—Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимал Лаос?



Решение. Для ответа на вопрос задачи можно «посчитать столбики», которые выше столбика, соответствующего показателю Лаоса. Но проще посчитать столбики, которые ниже: такой столбик всего один (Индия). Следовательно, Лаос занимал 10-е место.

Ответ. 10.

Пример 4. На диаграмме показан возрастной состав населения Индонезии. Определите по диаграмме, доли населения каких возрастов составляют менее 25 % от всего населения.



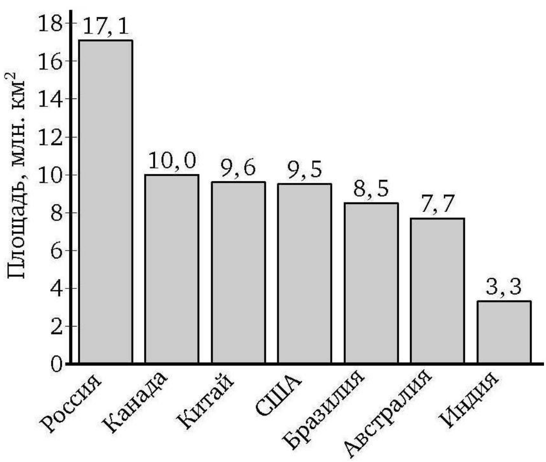
1) 0—14 лет; 2) 15—50 лет; 3) 51—64 года; 4) 65 лет и более.

Запишите номера выбранных ответов в порядке возрастания без пробелов, запятых и любых других символов.

Решение. Двадцати пяти процентам населения соответствует площадь четверти круга, занятого диаграммой. Ясно, что площадь каждого из секторов, отвечающих возрастам 3 и 4, меньше четверти площади круга, а площадь каждого из двух других секторов больше площади четверти круга.

Ответ. 34.

Пример 5. На диаграмме представлены семь крупнейших по площади территории (в млн км^2) стран мира.



Какие из следующих утверждений верны?

1) Судан входит в семёрку крупнейших по площади территории стран мира.

2) Площадь территории США составляет 9,5 млн км^2.

3) Площадь территории Австралии меньше площади территории Канады.

4) Площадь территории России больше площади территории Бразилии примерно вдвое.

Запишите номера выбранных ответов в порядке возрастания без пробелов, запятых и любых других символов.

Решение. Поскольку Судан не входит в семёрку представленных стран, утверждение 1 ложно. Утверждения 2, 3, 4 являются истинными, что следует из данных диаграммы.

Ответ. 234.

Рассмотрим несколько задач, связанных с табличным заданием данных.

Пример 6. В таблице приведена информация о крупнейших городах России (по данным на 2014 год). Какой из этих городов занимает восьмое место по площади? В ответе укажите *численность населения* этого города (в тыс. человек).

Город	Население (в тыс. чел.)	Площадь (в кв. км)	Плотность (в чел./кв. км)
Екатеринбург	1412	491	2866
Казань	1191	425	1560
Москва	12 108	2511	4823
Нижний Новгород	1273	410	3100
Новосибирск	1548	506	3961
Омск	1166	573	1968
Ростов-на-Дону	1110	349	3167
Самара	1172	541	2164
Санкт-Петербург	5132	1439	3566
Челябинск	1169	500	2254

Решение. Всего в таблице представлены данные по 10 городам. Расположим числа из третьего столбика в порядке возрастания, ограничившись первыми тремя (восьмое место в порядке убывания будет соответствовать третьему месту в порядке возрастания): 349; 410; 425. Значит, искомым городом является Казань, а искомая численность равна 1191 тыс. чел.

Ответ. 1191.

В некоторых случаях для того, чтобы решить задачу, достаточно подсчитать стоимости товаров или услуг исходя из данных задачи и в ответе указать наименьшую или наибольшую из них либо сделать выборку товаров или услуг, суммарная стоимость которых не превосходит определённого значения. В последнем случае задача может иметь несколько решений и в ответе достаточно указать любое из них.

Пример 7. Для обслуживания международного семинара необходимо собрать группу переводчиков. Сведения о кандидатах представлены в таблице.

Переводчики	Языки	Стоимость услуг (рублей в день)
1	немецкий, испанский	14 000
2	английский, немецкий	12 000
3	английский	4000
4	английский, французский	12 000
5	французский	6000
6	испанский	8000

Пользуясь таблицей, соберите хотя бы одну группу, в которой переводчики вместе владеют четырьмя иностранными языками: английским, немецким, французским и испанским, — а суммарная стоимость их услуг не превышает 24 000 рублей в день. В ответе для собранной группы укажите в порядке возрастания номера переводчиков без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Решение. Для решения задачи достаточно выполнить несложный перебор. Требованию задачи удовлетворяют, например, переводчики 1, 3, 5.

Ответ. 135.

Разумеется, для ответа на вопрос последней задачи не нужно искать все возможные решения (а их в подобных задачах обычно несколько) и уж тем более оптимальное по стоимости. Однако в банке ЕГЭ есть и задания, в которых необходимо найти именно оптимальный — по стоимости либо другой характеристике — вариант. В таких случаях ответ на вопрос задания требует некоторых вычислений, а иногда сравнения и сопоставления данных.

Пример 8. Для группы иностранных гостей требуется купить 10 путеводителей. Нужные путеводители нашлись в трёх интернет-магазинах. Цены путеводителей и условия доставки всей покупки приведены в таблице.

Интернет-магазин	Цена путеводителя (руб. за шт.)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	256	250	Нет
Б	260	200	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 3000 руб.
В	275	300	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 2500 руб.

Во сколько рублей обойдётся наиболее дешёвый вариант покупки с доставкой?

Решение. Стоимость покупки в первом магазине равна $2560 + 250 = 2810$ рублей, во втором магазине — $2600 + 200 = 2800$ рублей, а в третьем — 2750 рублей.

Ответ. 2750.

Пример 9. Для ремонта квартиры нужно приобрести 73 квадратных метра паркетной доски. В таблице указаны цены за квадратный метр, условия доставки и специальные предложения (при наличии) каждой из трёх фирм, работающих в городе. У какой из них покупка с доставкой окажется наиболее выгодной? В ответе укажите, сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой.

Поставщик	Стоимость паркетной доски (руб. за м^2)	Стоимость доставки (руб.)	Специальные предложения
А	2850	4600	—
Б	3000	4400	При заказе на сумму более 200 000 руб. доставка бесплатно
В	2900	4500	При заказе на сумму более 210 000 руб. доставка бесплатно

Решение. Стоимость покупки у фирмы А складывается из стоимости самой паркетной доски, равной $2850 \cdot 73 = 208\,050$ рублям, и стоимости доставки, равной 4600 рублей, т. е. составляет 212 650 рублей. Стоимость покупки у фирмы Б совпадает со стоимостью самой паркетной доски, равной $3000 \cdot 73 = 219\,000$ рублей (доставка в этом случае бесплатна). Стоимость покупки у фирмы В также совпадает со стоимостью самой паркетной доски, равной $2900 \cdot 73 = 211\,700$ рублям. Таким образом, наиболее выгодна для покупателя покупка у фирмы В.

Ответ. 211 700.

При чтении графиков, таблиц, диаграмм важно уметь не только извлекать содержащуюся в них информацию, но и анализировать её, сопоставлять данные и делать выводы.

Пример 10. Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P, и показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей вафельниц. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей вафельниц.

Модель вафельницы	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4100	3	2	4
Б	4700	0	2	2
В	5500	3	1	1
Г	5400	0	2	0

Решение. Задачу можно решить двумя способами, первый из которых состоит в прямом подсчёте рейтингов:

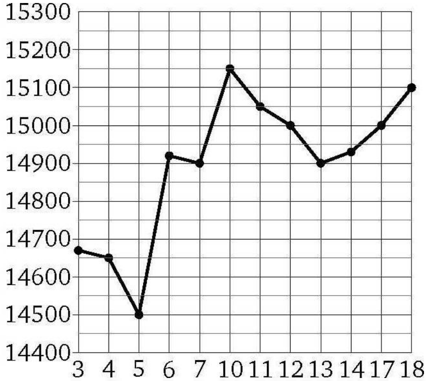
рейтинг модели А равен $R_{\text{А}} = 4(2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 4) - 0{,}01 \cdot 4100 = 15$;
рейтинг модели Б равен $R_{\text{Б}} = 4(2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 2) - 0{,}01 \cdot 4700 = -23$;
рейтинг модели В равен $R_{\text{В}} = 4(2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1) - 0{,}01 \cdot 5500 = -19$;
рейтинг модели Г равен $R_{\text{Г}} = 4(2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0) - 0{,}01 \cdot 5400 = -38$.

Второй способ основан на анализе условия, оценке и прикидке: очевидно, что при данных в таблице значениях в выражении для R уменьшаемое $4(2F + 2Q + D)$ максимально, а вычитаемое $0{,}01P$ минимально именно для модели А. При таком решении считать придётся только один — наилучший — рейтинг, т. е. рейтинг модели А.

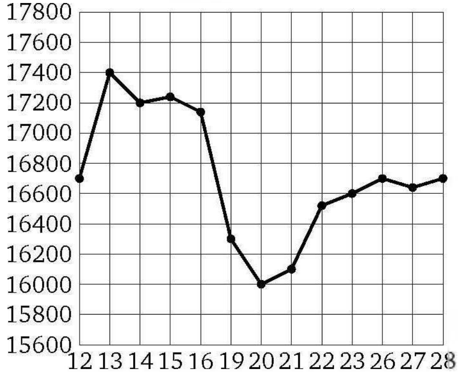
Ответ. 15.

Упражнения к §1

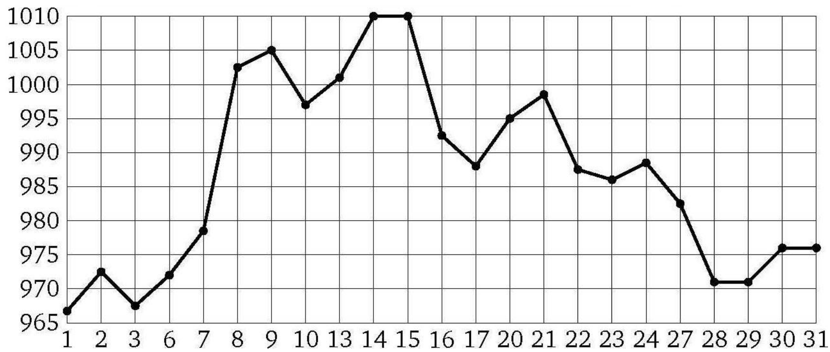
1. а) На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 18 сентября 2007 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены ломаной линией. Определите по рисунку наибольшую цену олова на момент закрытия торгов за данный период (в долларах США за тонну).



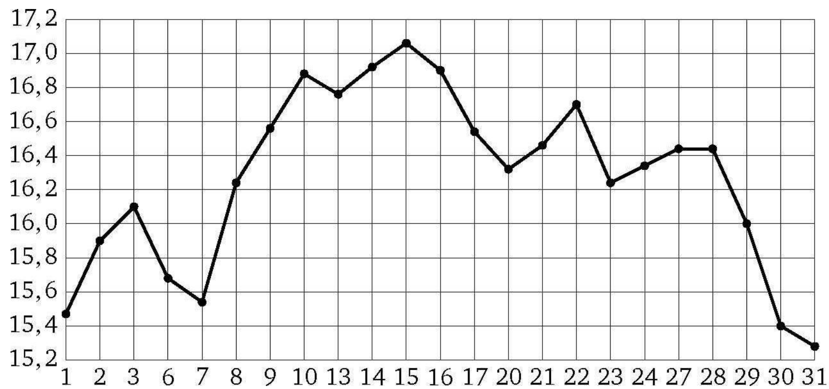
б) На рисунке жирными точками показана цена тонны олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 12 по 28 ноября 2007 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены ломаной линией. Определите по рисунку наибольшую цену олова на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



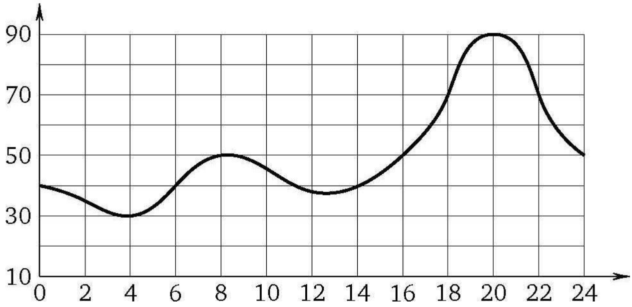
2. а) На рисунке жирными точками показана цена золота, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2009 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — цена золота в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены ломаной линией. Определите по рисунку, какого числа цена золота впервые поднялась выше 1000 рублей за грамм.



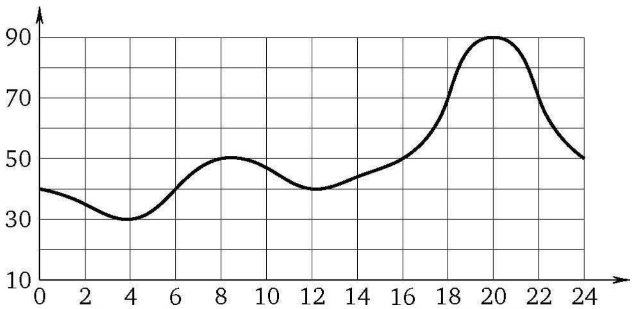
б) На рисунке жирными точками показана цена серебра, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2009 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — цена серебра в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены ломаной линией. Определите по рисунку, какого числа цена серебра впервые поднялась выше 16,4 рубля за грамм.



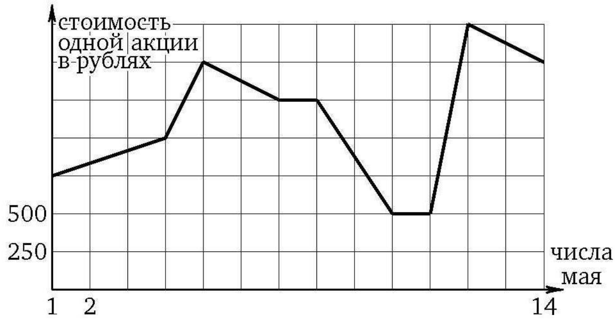
3. а) На рисунке изображена потребляемая мощность электроэнергии в городе N в течение суток. По горизонтали указываются часы суток, по вертикали — мощность в мегаваттах. Какова разница между наибольшим и наименьшим значениями потребляемой мощности в период с 2 до 14 часов? Ответ дайте в мегаваттах.



б) На рисунке изображена потребляемая мощность электроэнергии в городе N в течение суток. По горизонтали указываются часы суток, по вертикали — мощность в мегаваттах. Какова разница между наибольшим и наименьшим значениями потребляемой мощности в период с 10 до 22 часов? Ответ дайте в мегаваттах.



4. а) На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций нефтедобывающей компании в первые две недели мая. По вертикальной оси откладывается стоимость одной акции в рублях, по горизонтальной оси — числа мая. В первую неделю мая бизнесмен купил 20 акций, а потом продал их на второй неделе. Какую наибольшую прибыль он мог получить? Ответ дайте в рублях.



б) На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций некоторой компании в один из дней с 9 часов (начало торгов) до 15 часов (окончание торгов). По вертикальной оси откладывается стоимость одной акции в рублях, по горизонтальной оси — время суток. Бизнесмен купил 3000 акций до полудня, а потом продал их до закрытия торгов в тот же день. Какую наибольшую прибыль он мог получить? Ответ дайте в рублях.

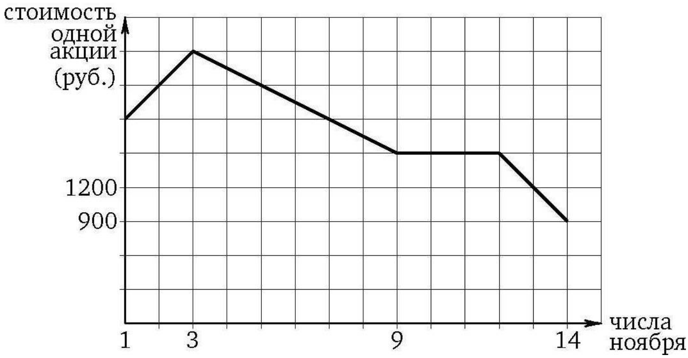
5. а) На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций горнодобывающей компании в первой половине сентября. По вертикальной оси откладывается стоимость одной акции в рублях, по горизонтальной — числа сентября. 7 сентября бизнесмен купил пакет акций, а 13 сентября продал его. В результате этих операций прибыль бизнесмена составила 3600 рублей. Сколько акций было в пакете?

б) На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций горнодобывающей компании в первой половине сентября. По вертикальной оси откладывается стоимость одной акции в рублях, по горизонтальной — числа сентября. 3 сентября бизнесмен купил пакет акций, а 10 сентября продал его. В результате этих операций убыток бизнесмена составил 15 000 рублей. Сколько акций было в пакете?

6. а) На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций нефтедобывающей компании в первые две недели сентября. 3 сентября бизнесмен приобрёл 10 акций этой компании. 6 из них он продал 10 сентября, а 12 сентября продал остальные 4. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?

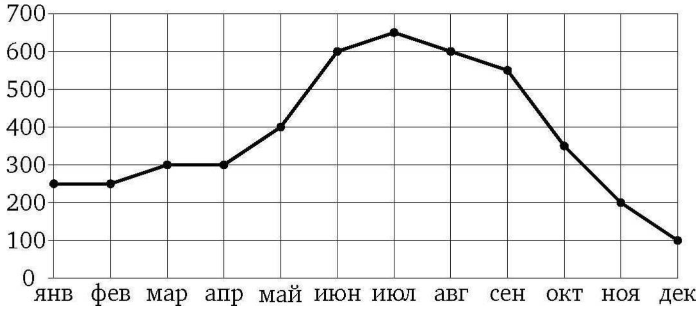
б) На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций нефтеперерабатывающей компании в первые две недели октября. 1 октября бизнесмен приобрёл 10 акций этой компании. 3 из них он продал 12 октября, а 14 октября продал остальные 7. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?

7. а) На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газоперерабатывающей компании в первые две недели ноября. Два друга — Павел и Михаил — приобрели по 15 акций компании каждый: Павел — 1 ноября, а Михаил — 5 ноября. Павел продал свои акции 13 ноября, а Михаил продал свои 14 ноября. На сколько рублей убыток одного из друзей больше, чем убыток другого?



б) На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций нефтедобывающей компании в первой половине сентября. Два друга — Иван и Андрей — приобрели 4 сентября по 20 акций компании каждый. Иван продал свои акции 10 сентября, а Андрей продал свои 14 сентября. На сколько рублей убыток одного из друзей больше, чем убыток другого?

8. а) На рисунке точками показаны объёмы месячных продаж холодильников в магазине бытовой техники. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество проданных холодильников. Для наглядности точки соединены ломаной линией.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику продаж холодильников.

Периоды времени

А) январь—март
Б) апрель—июнь
В) июль—сентябрь
Г) октябрь—декабрь

Характеристики

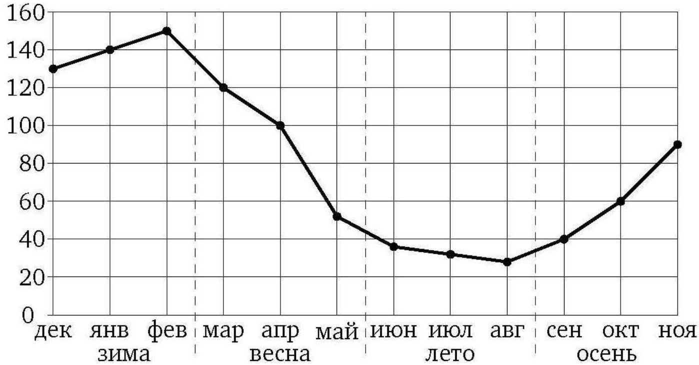
1) Ежемесячный объём продаж уменьшился более чем на 200 холодильников за весь период.
2) В первый и второй месяцы периода было продано одинаковое количество холодильников.
3) Самое медленное уменьшение ежемесячного объёма продаж.
4) Ежемесячный объём продаж вырос на 200 холодильников за один месяц.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

б) На рисунке точками показаны объёмы месячных продаж обогревателей в магазине бытовой техники. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество проданных обогревателей. Для наглядности точки соединены ломаной линией.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику продаж обогревателей.

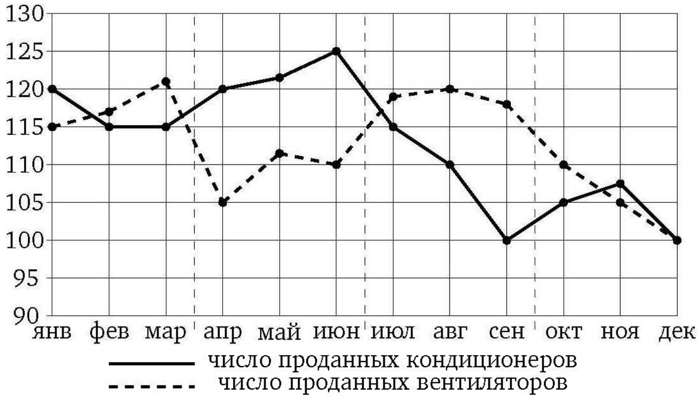
Периоды времени	Характеристики
А) зима	1) Ежемесячный объём продаж был меньше 40 штук в течение всего периода.
Б) весна	2) Ежемесячный объём продаж достиг максимума.
В) лето	3) Падение объёма продаж более чем на 60 штук за период.
Г) осень	4) Ежемесячный объём продаж рос, но был меньше 120 штук.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

9. а) На рисунке точками изображено число проданных кондиционеров и вентиляторов за каждый календарный месяц 2013 года в одной из сетей по продаже бытовой техники. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество проданных кондиционеров и вентиляторов (по отдельности). Для наглядности точки соединены ломаными линиями.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику продаж в этот период.

Периоды времени

А) январь—март
Б) апрель—июнь
В) июль—сентябрь
Г) октябрь—декабрь

Характеристики

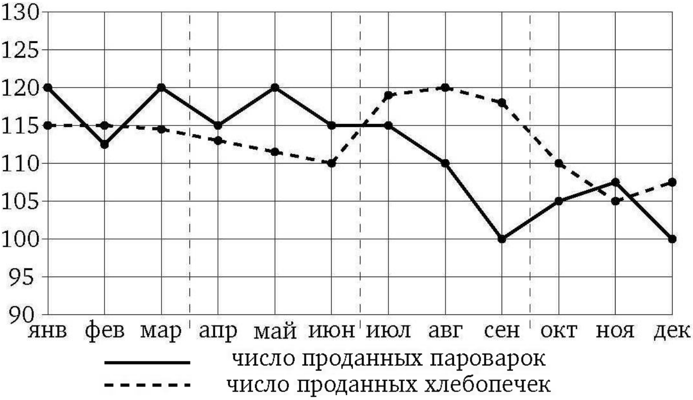
1) Разность между числом проданных вентиляторов и числом проданных кондиционеров в один из месяцев этого периода достигала наибольшего значения за год.
2) Продажи вентиляторов росли.
3) Продажи вентиляторов снижались.
4) Продажи кондиционеров превышали продажи вентиляторов.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

б) На рисунке точками изображено число проданных пароварок и хлебопечек за каждый календарный месяц 2013 года в одной из сетей по продаже бытовой техники. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество проданных пароварок и хлебопечек (по отдельности). Для наглядности точки соединены ломаными линиями.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику продаж в этот период.

Периоды времени	**Характеристики**
А) январь—март	1) Продажи пароварок падали быстрее всего.
Б) апрель—июнь	2) В каждый месяц периода число проданных хлебопечек и пароварок различалось не более чем на 5.
В) июль—сентябрь	3) В каждый месяц периода продажи пароварок превышали продажи хлебопечек.
Г) октябрь—декабрь	4) Продажи хлебопечек были минимальными.

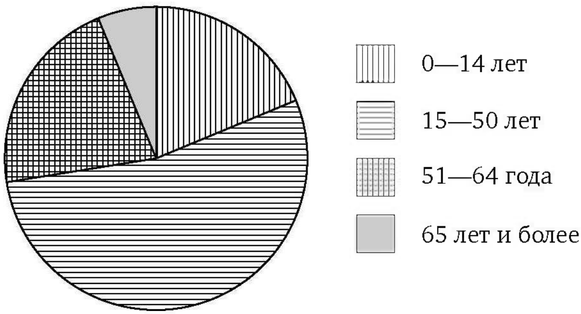
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

10. а) На диаграмме показан возрастной состав населения Китая. Определите по диаграмме, какая из возрастных категорий самая малочисленная.

Китай

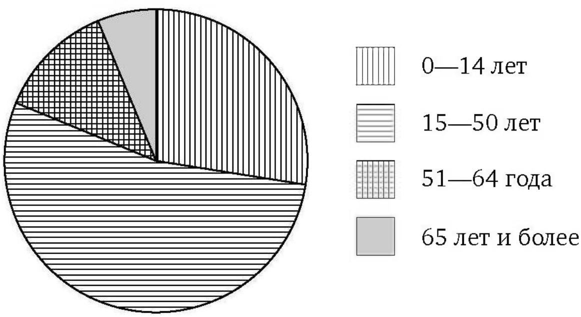


1) 0—14 лет
2) 15—50 лет
3) 51—64 года
4) 65 лет и более

Запишите номер выбранного варианта ответа.

б) На диаграмме показан возрастной состав населения Индонезии. Определите по диаграмме, население какого возраста преобладает.

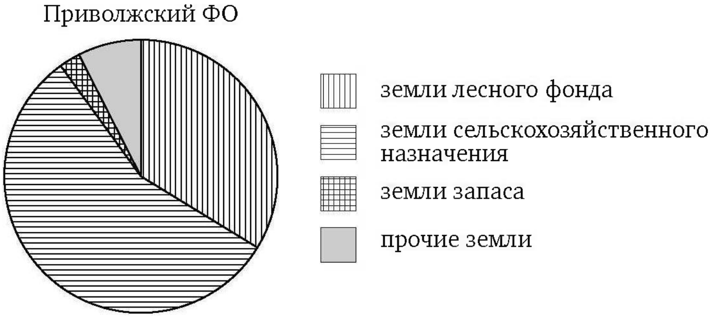
Индонезия



1) 0—14 лет
2) 15—50 лет
3) 51—64 года
4) 65 лет и более

Запишите номер выбранного варианта ответа.

11. а) На диаграмме показано распределение земель Приволжского федерального округа по категориям. Определите по диаграмме, земли каких категорий занимают более 25 % площади округа.

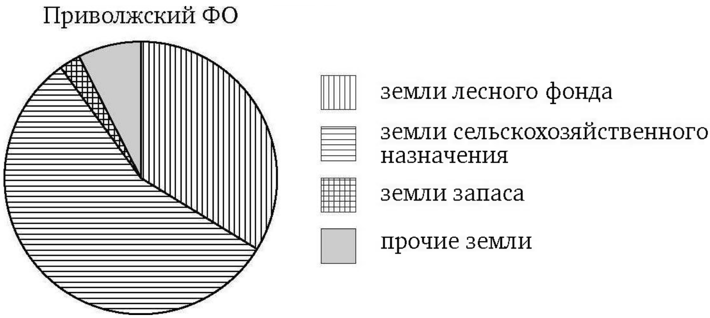


*Прочие земли — это земли поселений; земли промышленности и иного специального назначения; земли особо охраняемых территорий и объектов.

1) земли лесного фонда
2) земли сельскохозяйственного назначения
3) земли запаса
4) прочие земли

Запишите в порядке возрастания номера выбранных вариантов ответов без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

б) На диаграмме показано распределение земель Приволжского федерального округа по категориям. Определите по диаграмме, земли каких категорий занимают менее 50 % площади округа.

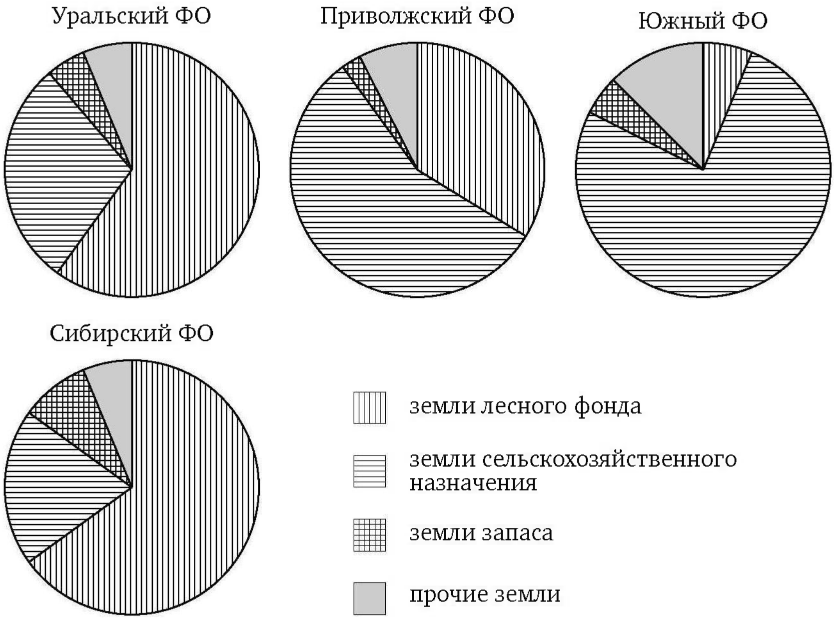


*Прочие земли — это земли поселений; земли промышленности и иного специального назначения; земли особо охраняемых территорий и объектов.

1) земли лесного фонда
2) земли сельскохозяйственного назначения
3) земли запаса
4) прочие земли

Запишите в порядке возрастания номера выбранных вариантов ответов без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

12. а) На диаграммах показано распределение земель по категориям Уральского, Приволжского, Южного и Сибирского федеральных округов. Определите по диаграммам, в каких округах доля земель лесного фонда превышает 50%.

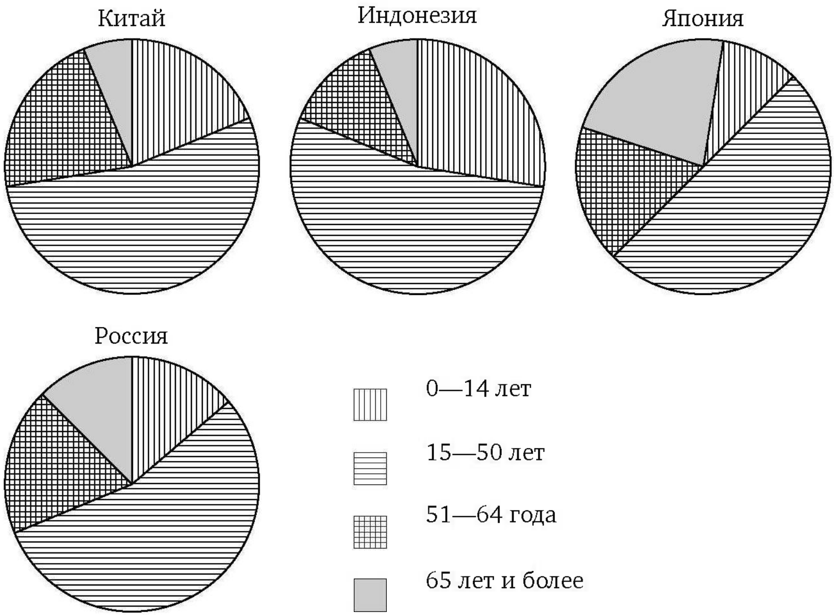


*Прочие земли — это земли поселений; земли промышленности и иного специального назначения; земли особо охраняемых территорий и объектов.

1) Уральский ФО
2) Приволжский ФО
3) Южный ФО
4) Сибирский ФО

Запишите в порядке возрастания номера выбранных вариантов ответов без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

б) На диаграммах показаны возрастные составы населения Китая, Индонезии, Японии и России. Определите по диаграммам, в какой из стран доля населения 0—14 лет наибольшая.



1) Китай

2) Индонезия

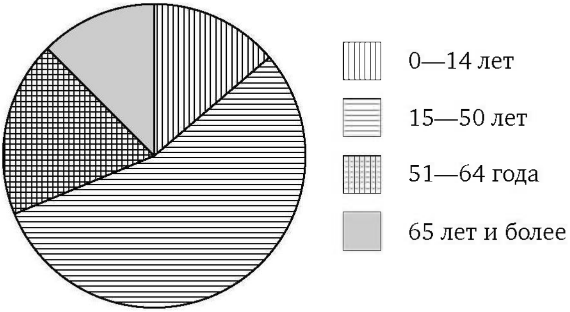
3) Япония

4) Россия

Запишите номер выбранного варианта ответа.

13. а) На диаграмме показан возрастной состав населения России.

Россия



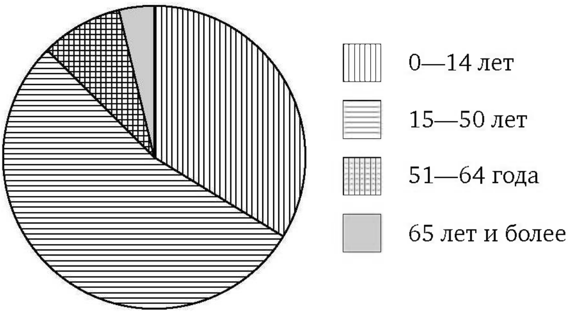
Сколько примерно человек старше 65 лет проживает в России, если население России составляет 143 млн человек?

1) около 18 млн
2) около 25 млн
3) около 9 млн
4) около 30 млн

Запишите номер выбранного ответа.

б) На диаграмме показан возрастной состав населения Бангладеш.

Бангладеш

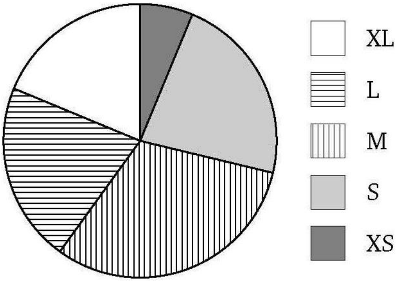


Сколько примерно человек младше 15 лет проживает в Бангладеш, если население Бангладеш составляет 156 млн человек?

1) около 65 млн
2) около 42 млн
3) около 50 млн
4) около 58 млн

Запишите номер выбранного ответа.

14. а) В магазине продаются футболки пяти размеров: XS, S, M, L и XL. Данные по продажам в мае представлены на круговой диаграмме.

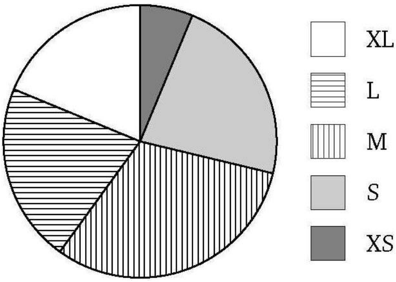


Какие из утверждений относительно проданных в мае футболок верны, если всего в мае было продано 120 футболок?

1) Больше всего было продано футболок размера S.
2) Меньше 30 % проданных футболок — футболки размеров L и M.
3) Футболок размеров XS и S вместе продано больше 30 штук.
4) Футболок размера XL было продано меньше 30 штук.

Запишите в порядке возрастания номера выбранных утверждений.

б) В магазине продаются футболки пяти размеров: XS, S, M, L и XL. Данные по продажам в мае представлены на круговой диаграмме.

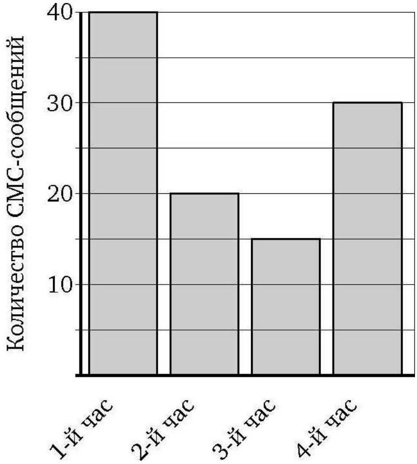


Какие из утверждений относительно проданных в мае футболок верны, если всего в мае было продано 160 футболок?

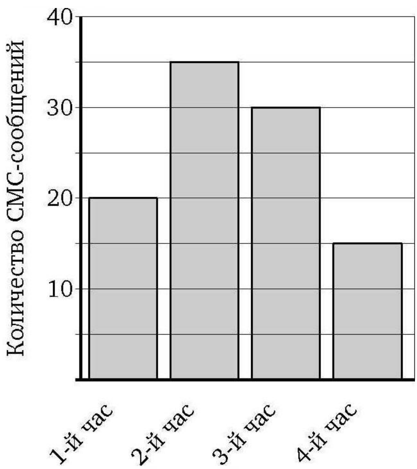
1) Больше всего было продано футболок размера M.
2) Больше 50 % проданных футболок — футболки размеров S и M.
3) Футболок размеров XS и L вместе продано меньше 40 штук.
4) Футболок размера XL было продано больше 40 штук.

Запишите в порядке возрастания номера выбранных утверждений.

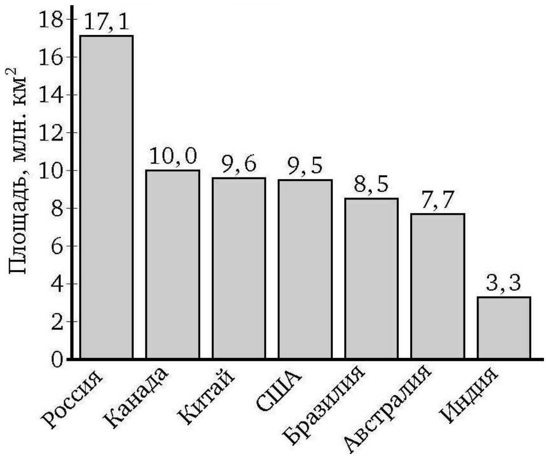
15. а) На диаграмме показано количество СМС-сообщений, присланных слушателями за каждый час четырёхчасового эфира программы по заявкам на радио. Определите, на сколько больше сообщений было прислано за первые два часа программы по сравнению с последними двумя часами этой программы.



б) На диаграмме показано количество СМС-сообщений, присланных слушателями за каждый час четырёхчасового эфира программы по заявкам на радио. Определите, на сколько больше сообщений было прислано за первые два часа программы по сравнению с последними двумя часами этой программы.



16. а) На диаграмме представлены семь крупнейших по площади территории (в млн км^2) стран мира.

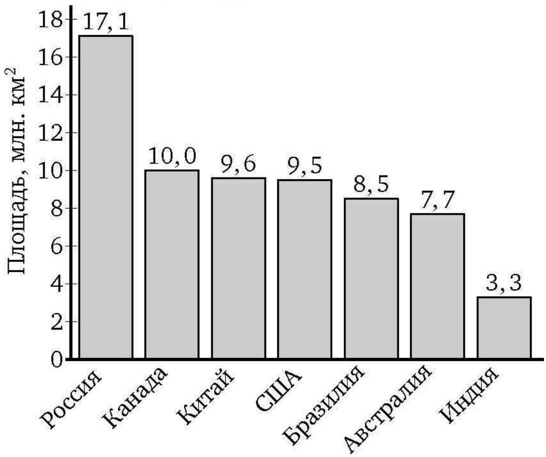


Какие из следующих утверждений верны?

1) США входят в семёрку крупнейших по площади территории стран мира.
2) Площадь территории Индии составляет 4 млн км^2.
3) Площадь территории Австралии больше площади территории Китая.
4) Площадь территории России больше площади территории Бразилии более чем вдвое.

В ответе запишите в порядке возрастания номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

б) На диаграмме представлены семь крупнейших по площади территории (в млн км^2) стран мира.

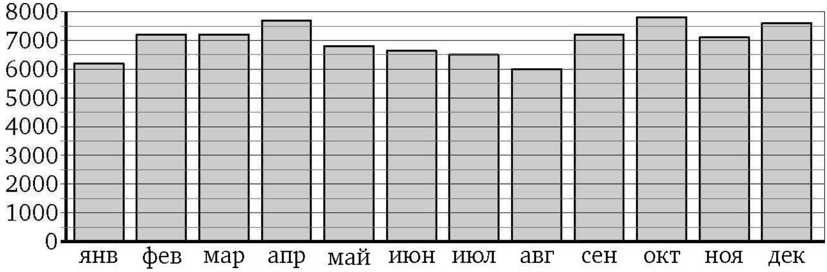


Какие из следующих утверждений *неверны*?

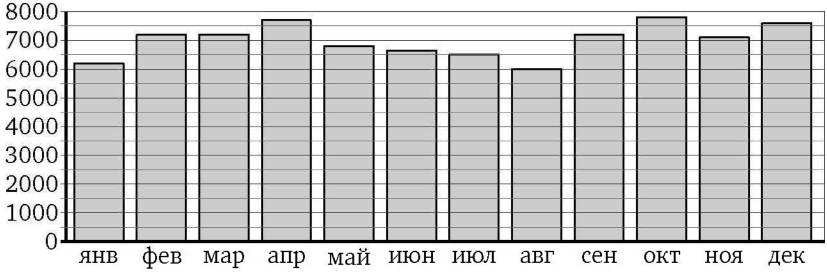
1) По площади территории второе место в мире занимает Китай.
2) Площадь территории Австралии составляет 7,7 млн км^2.
3) Площадь территории Китая больше площади территории Канады.
4) Площадь территории США больше площади территории Бразилии на 1 млн км^2.

В ответе запишите в порядке возрастания номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

17. а) На диаграмме показано среднесуточное количество перевезённых пассажиров в Московском метрополитене за каждый месяц 2008 года (в тыс. человек). Сколько было месяцев, в каждый из которых среднесуточное число перевезённых пассажиров составило не менее 6500 тыс. человек?



б) На диаграмме показано среднесуточное количество перевезённых пассажиров в Московском метрополитене за каждый месяц 2008 года (в тыс. человек). Сколько было месяцев, в каждый из которых среднесуточное число перевезённых пассажиров составило не менее 7500 тыс. человек?



18. а) Веня решил посетить парк аттракционов. Сведения о билетах на аттракционы представлены в таблице. Некоторые билеты позволяют посетить сразу два аттракциона.

Номер билета	Аттракционы	Стоимость (руб.)
1	колесо обозрения, автодром	400
2	комната страха, комната смеха	500
3	комната смеха	300
4	автодром, комната смеха	400
5	колесо обозрения	300
6	автодром	150

Пользуясь таблицей, подберите билеты так, чтобы Веня посетил все четыре аттракциона: колесо обозрения, комнату страха, комнату смеха, автодром, а суммарная стоимость билетов не превышала 1000 рублей. В ответе укажите в порядке возрастания какой-нибудь один набор номеров билетов без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

б) Вася решил посетить парк аттракционов. Сведения о билетах на аттракционы представлены в таблице. Некоторые билеты позволяют посетить сразу два аттракциона.

Номер билета	Аттракционы	Стоимость (руб.)
1	комната смеха	300
2	комната страха, комната смеха	500
3	автодром, комната смеха	350
4	колесо обозрения	250
5	колесо обозрения, автодром	300
6	автодром	100

Пользуясь таблицей, подберите билеты так, чтобы Вася посетил все четыре аттракциона: колесо обозрения, комнату страха, комнату смеха, автодром, а суммарная стоимость билетов не превышала 850 рублей. В ответе укажите в порядке возрастания какой-нибудь один набор номеров билетов без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

19. а) Для обработки дачного участка дачнику необходимо приобрести лопату, тяпку, вилы и грабли. В магазине продаются наборы инструментов, некоторые наборы состоят только из одного инструмента. Цены приведены в таблице.

№ набора	Инструменты	Стоимость (руб. за штуку)
1	вилы	220
2	тяпка, вилы	410
3	тяпка	190
4	грабли, лопата	430
5	лопата	170
6	грабли, вилы	440

Пользуясь таблицей, соберите полный комплект необходимых инструментов так, чтобы суммарная стоимость была наименьшей. В ответе для собранного комплекта укажите в порядке возрастания номера наборов без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

б) Для обработки дачного участка дачнику необходимо приобрести лопату, тяпку, вилы и грабли. В магазине продаются наборы инструментов, некоторые наборы состоят только из одного инструмента. Цены приведены в таблице.

№ набора	Инструменты	Стоимость (руб. за штуку)
1	грабли	230
2	вилы, грабли	440
3	лопата	110
4	тяпка, грабли	370
5	вилы, лопата	370
6	тяпка	200

Пользуясь таблицей, соберите полный комплект необходимых инструментов так, чтобы суммарная стоимость была наименьшей. В ответе для собранного комплекта укажите в порядке возрастания номера наборов без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

20. а) Для обслуживания международного семинара необходимо собрать группу переводчиков. Сведения о кандидатах представлены в таблице.

Переводчики	Языки	Стоимость услуг (руб. в день)
1	французский, английский	5800
2	немецкий	4050
3	английский, немецкий	6850
4	французский	2900
5	французский, испанский	7000
6	испанский	3050

Пользуясь таблицей, соберите хотя бы одну группу, в которой переводчики вместе владеют всеми четырьмя языками: английским, немецким, испанским и французским, а суммарная стоимость их услуг не превышает 13 000 рублей в день. В ответе укажите в порядке возрастания какой-нибудь один набор номеров переводчиков без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

б) Для обслуживания международного семинара необходимо собрать группу переводчиков. Сведения о кандидатах представлены в таблице.

Переводчики	Языки	Стоимость услуг (руб. в день)
1	английский	3900
2	испанский, английский	8050
3	немецкий	2850
4	немецкий, испанский	7150
5	немецкий, французский	5800
6	французский	1900

Пользуясь таблицей, соберите хотя бы одну группу, в которой переводчики вместе владеют всеми четырьмя языками: английским, немецким, испанским и французским, а суммарная стоимость их услуг не превышает 13 000 рублей в день. В ответе укажите в порядке возрастания какой-нибудь один набор номеров переводчиков без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

21. а) В таблице представлены сведения о пиццах в интернет-магазине.

Номер пиццы	Состав/название	Тип	Стоимость (руб.)
1	ветчина, сыр	мясная	320
2	сыр, помидоры	вегетарианская	300
3	сыр	вегетарианская	260
4	курица, грибы, помидоры	мясная	450
5	говядина, салями, грибы	мясная	480
6	шпинат, грибы, сыр, оливки	вегетарианская	410

Артёму нужно купить три разные пиццы так, чтобы среди них была хотя бы одна с грибами, хотя бы одна вегетарианская и хотя бы одна мясная. Какие пиццы должен выбрать Артём, если он рассчитывает потратить на всё не более 1000 рублей? В ответе укажите в порядке возрастания какой-нибудь один набор номеров пицц без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

б) В таблице представлены сведения о пиццах в интернет-магазине.

Номер пиццы	Состав/название	Тип	Стоимость (руб.)
1	«4 сыра»	вегетарианская	380
2	помидоры, сладкий перец	вегетарианская	350
3	«Болоньезе»	мясная	550
4	куриное филе, ананас, сыр	мясная	500
5	оливки, грибы, помидоры	вегетарианская	400
6	куриное филе, грибы, помидоры	мясная	580

Виталию нужно купить три разные пиццы так, чтобы среди них была хотя бы одна с грибами, хотя бы одна вегетарианская и хотя бы одна мясная. Какие пиццы должен выбрать Виталий, если он рассчитывает потратить на всё не более 1250 рублей? В ответе укажите в порядке возрастания какой-нибудь один набор номеров пицц без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

22. а) Для группы иностранных гостей требуется купить 13 путеводителей. Нужные путеводители нашлись в трёх интернет-магазинах. Цены путеводителей и условия доставки всей покупки приведены в таблице.

Интернет-магазин	Цена путеводителя (руб. за шт.)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	290	200	Нет
Б	260	400	Доставка бесплатная, если сумма заказа превышает 4000 руб.
В	300	200	Доставка бесплатная, если сумма заказа превышает 3000 руб.

Во сколько рублей обойдётся наиболее дешёвый вариант покупки с доставкой?

б) Для группы иностранных гостей требуется купить 12 путеводителей. Нужные путеводители нашлись в трёх интернет-магазинах. Цены путеводителей и условия доставки всей покупки приведены в таблице.

Интернет-магазин	Цена путеводителя (руб. за шт.)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	280	300	Нет
Б	270	350	Доставка бесплатная, если сумма заказа превышает 3700 руб.
В	300	250	Доставка бесплатная, если сумма заказа превышает 3500 руб.

Во сколько рублей обойдётся наиболее дешёвый вариант покупки с доставкой?

23. а) Интернет-провайдер предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
План «0»	Нет	0,9 руб. за 1 Мб
План «200»	208 руб. за 200 Мб трафика в месяц	0,6 руб. за 1 Мб сверх 200 Мб
План «900»	736 руб. за 900 Мб трафика в месяц	0,5 руб. за 1 Мб сверх 900 Мб

Пользователь предполагает, что его трафик составит 550 Мб в месяц, и исходя из этого выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей должен будет заплатить пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 550 Мб?

б) Интернет-провайдер предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
План «0»	Нет	1,5 руб. за 1 Мб
План «200»	204 руб. за 200 Мб трафика в месяц	1,2 руб. за 1 Мб сверх 200 Мб
План «700»	672 руб. за 700 Мб трафика в месяц	0,5 руб. за 1 Мб сверх 700 Мб

Пользователь предполагает, что его трафик составит 700 Мб в месяц, и исходя из этого выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей должен будет заплатить пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 700 Мб?

24. а) Для транспортировки 42 тонн груза на 120 км можно воспользоваться услугами одной из трёх фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъёмность автомобилей каждого перевозчика указаны в таблице.

Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 10 км)	Грузоподъёмность одного автомобиля (тонны)
А	310	4
Б	400	5,5
В	760	10

Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую перевозку?

б) Для транспортировки 45 тонн груза на 130 км можно воспользоваться услугами одной из трёх фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъёмность автомобилей каждого перевозчика указаны в таблице.

Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 10 км)	Грузоподъёмность одного автомобиля (тонны)
А	320	3,5
Б	410	5
В	950	12

Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую перевозку?

25. а) Строительный подрядчик планирует купить 20 тонн облицовочного кирпича у одного из трёх поставщиков. Один кирпич весит 5 кг. Цена кирпича и условия доставки всей покупки приведены в таблице.

Поставщик	Цена кирпича (руб. за шт.)	Стоимость доставки (руб.)	Специальные условия
А	52	9000	Нет
Б	55	8000	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 150 000 руб.
В	64	6500	Доставка со скидкой 50 %, если сумма заказа превышает 220 000 руб.

Во сколько рублей обойдётся наиболее дешёвый вариант покупки с доставкой?

б) Строительный подрядчик планирует купить 10 тонн облицовочного кирпича у одного из трёх поставщиков. Один кирпич весит 5 кг. Цена кирпича и условия доставки всей покупки приведены в таблице.

Поставщик	Цена кирпича (руб. за шт.)	Стоимость доставки (руб.)	Специальные условия
А	48	9000	Нет
Б	56	6000	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 80 000 руб.
В	62	5500	Доставка со скидкой 50 %, если сумма заказа превышает 110 000 руб.

Во сколько рублей обойдётся наиболее дешёвый вариант покупки с доставкой?

26. а) Автомобильный журнал определяет рейтинг автомобилей на основе показателей безопасности S, комфорта C, функциональности F, качества Q и дизайна D. Рейтинг R вычисляется по формуле $R = \dfrac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}$. В таблице даны показатели трёх моделей автомобилей.

Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	1	2	2	3	2
Б	1	3	1	4	1
В	3	1	2	4	1

Найдите наивысший рейтинг автомобиля из представленных в таблице моделей.

б) Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг мясорубок на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P (в рублях), и показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Рейтинг R вычисляется по формуле $R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01P$. В таблице даны цены и показатели четырёх моделей мясорубок.

Модель мясорубки	Цена мясорубки (руб. за шт.)	Функциональность	Качество	Дизайн
А	2500	1	1	3
Б	3400	1	2	3
В	4200	1	5	4
Г	3300	1	2	4

Найдите наивысший рейтинг мясорубки из представленных в таблице моделей.

27. а) Строительной фирме нужно приобрести 75 кубометров пеноблоков. У неё есть 3 поставщика. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Стоимость пеноблоков (руб. за м^3)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	2650 руб.	5000 руб.	Нет
Б	2900 руб.	4700 руб.	При заказе на сумму больше 150 000 руб. доставка бесплатно
В	2700 руб.	4900 руб.	При заказе на сумму больше 200 000 руб. доставка бесплатно

б) Строительной фирме нужно приобрести 73 кубометра пеноблоков. У неё есть 3 поставщика. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Стоимость пеноблоков (руб. за м^3)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	2850	4600	Нет
Б	3200	4300	При заказе на сумму больше 150 000 руб. доставка бесплатно
В	2900	4500	При заказе на сумму больше 200 000 руб. доставка бесплатно

28. а) От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. В таблице показано время, которое приходится затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в минутах.

	1	2	3
1. Автобус	От дома до автобусной станции — 15 мин.	Автобус в пути 1 ч 55 мин.	От остановки автобуса до дачи пешком 10 мин.
2. Электричка	От дома до станции железной дороги — 20 мин.	Электричка в пути 1 ч 15 мин.	От станции до дачи пешком 40 мин.
3. Маршрутное такси	От дома до остановки маршрутного такси — 20 мин.	Маршрутное такси в дороге 1 ч 30 мин.	От остановки маршрутного такси до дачи пешком 30 мин.

б) От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. В таблице показано время, которое приходится затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в минутах.

	1	2	3
1. Автобус	От дома до автобусной станции — 5 мин.	Автобус в пути 2 ч 0 мин.	От остановки автобуса до дачи пешком 10 мин.
2. Электричка	От дома до станции железной дороги — 10 мин.	Электричка в пути 1 ч 20 мин.	От станции до дачи пешком 40 мин.
3. Маршрутное такси	От дома до остановки маршрутного такси — 15 мин.	Маршрутное такси в дороге 1 ч 25 мин.	От остановки маршрутного такси до дачи пешком 35 мин.

29. а) Для изготовления книжных полок требуется заказать 20 одинаковых стеклянных дверец в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла 0,15 м^2. В таблице даны цены на стекло и на резку стёкол. Во сколько рублей обойдётся самый дешёвый заказ?

Фирма	Стоимость стекла (руб. за 1 м^2)	Резка стекла (руб. за одну деталь)
А	80	10
Б	70	15
В	130	бесплатно

б) Для изготовления книжных полок требуется заказать 40 одинаковых стеклянных дверец в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла 0,15 м^2. В таблице даны цены на стекло и на резку стёкол. Во сколько рублей обойдётся самый дешёвый заказ?

Фирма	Стоимость стекла (руб. за 1 м^2)	Резка стекла (руб. за одну деталь)
А	100	20
Б	90	25
В	170	бесплатно

30. а) В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трёх городах России (по данным на начало 2010 года).

Наименование продукта	Петрозаводск	Белгород	Новосибирск
Пшеничный хлеб (батон)	13	11	15
Молоко (1 литр)	26	23	25
Картофель (1 кг)	14	10	17
Сыр (1 кг)	230	205	255
Мясо (говядина, 1 кг)	280	240	300
Подсолнечное масло (1 литр)	38	44	50

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 3 л молока, 1 кг сыра, 1 л подсолнечного масла. В ответе запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

б) В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трёх городах России (по данным на начало 2010 года).

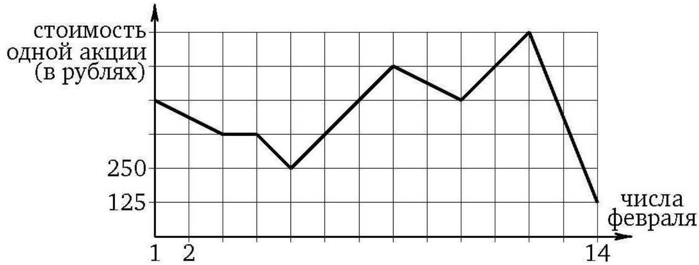
Наименование продукта	Кострома	Краснодар	Петрозаводск
Пшеничный хлеб (батон)	11	14	13
Молоко (1 литр)	26	23	26
Картофель (1 кг)	17	12	14
Сыр (1 кг)	240	265	230
Мясо (говядина, 1 кг)	285	280	280
Подсолнечное масло (1 литр)	52	44	38

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 3 л молока, 1 кг говядины, 1 л подсолнечного масла. В ответе запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

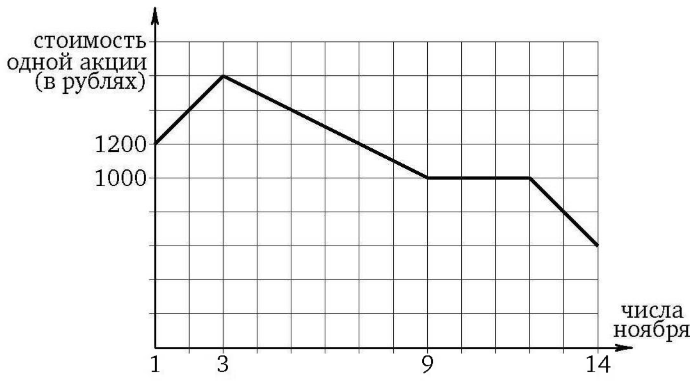
Диагностическая работа 1

Вариант 1

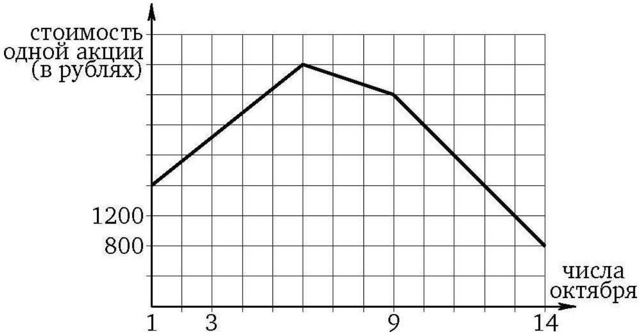
1. На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций горнодобывающей компании в первые две недели февраля. В первую неделю февраля бизнесмен купил 12 акций, а потом продал их на второй неделе. Какую наибольшую прибыль (в рублях) он мог получить?



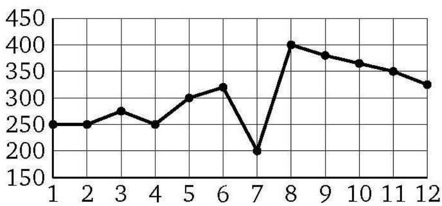
2. На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели ноября. 2 ноября бизнесмен приобрёл 10 акций этой компании. 6 из них он продал 5 ноября, а 13 ноября продал остальные 4. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?



3. На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели октября. Два друга — Виктор и Юрий — приобрели по 10 акций компании каждый: Виктор — 1 октября, а Юрий — 6 октября. Виктор продал свои акции 13 октября, а Юрий продал свои 12 октября. На сколько рублей убыток одного из друзей больше, чем убыток другого?



4. На рисунке показано изменение стоимости акций компании в период с 1 по 12 сентября 2012 г. По горизонтали указывается число месяца, по вертикали — стоимость акции в рублях. Для наглядности точки соединены ломаной линией.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных интервалов времени характеристику изменения стоимости акций.

Периоды	**Характристики**
А) 1—3.09.2012	1) Цена акции не опускалась ниже 300 рублей.
Б) 4—6.09.2012	2) Цена достигла двухнедельного максимума.
В) 7—9.09.2012	3) Цена акций ежедневно росла.
Г) 10—12.09.2012	4) Цена акции не превосходила 300 рублей.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

5. На диаграмме представлено распределение количества пользователей некоторой социальной сети по странам мира. Всего в этой социальной сети 12 миллионов пользователей.

Какие из следующих утверждений *неверны*?

1) Пользователей из Аргентины больше, чем пользователей из Польши.
2) Пользователей из Аргентины примерно втрое больше, чем пользователей из Парагвая.
3) Пользователей из Аргентины и Белоруссии вместе больше половины общего числа пользователей.
4) Пользователей из Бразилии меньше 9 миллионов человек.

В ответе запишите в порядке возрастания номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

6. В таблице указаны доходы и расходы фирмы за 5 месяцев.

Месяц	Доход, тыс. руб.	Расход, тыс. руб.
Март	135	115
Апрель	125	120
Май	105	115
Июнь	125	85
Июль	85	75

Пользуясь таблицей, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику доходов и расходов.

Периоды	**Характеристики**
А) апрель	1) Расход в этом месяце превысил доход.
Б) май	2) Наименьший расход в период с апреля по июль.
В) июнь	3) Доход в этом месяце больше, чем в предыдущем.
Г) июль	4) Расход в этом месяце больше, чем в предыдущем.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

7. Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки протяжённостью 500 км. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость их аренды.

Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
А	дизельное	7	4000
Б	бензин	10	3500
В	газ	14	3500

Помимо аренды, клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Цена дизельного топлива — 40 рублей за литр, бензина — 45 рублей за литр, газа — 38 рублей за литр. Сколько рублей заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант?

8. Мебельный салон заключает договоры с производителями мебели. В договорах указывается, какой процент от суммы, вырученной за продажу мебели, поступает в доход мебельного салона.

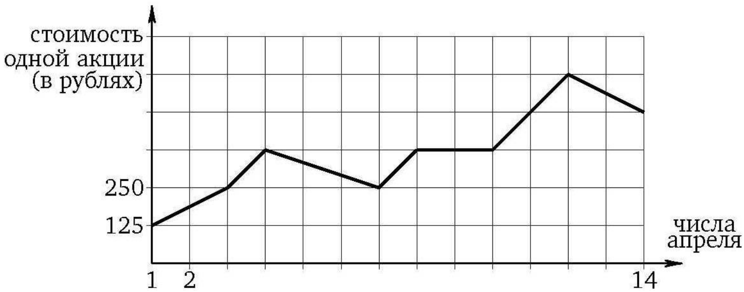
Фирма-производитель	Процент от выручки, поступающий в доход салона	Примечания
«Альфа»	6,5 %	изделия ценой до 15 000 руб.
«Альфа»	2,5 %	изделия ценой свыше 15 000 руб.
«Бета»	3,5 %	все изделия
«Омикрон»	5 %	все изделия

В прейскуранте приведены цены на четыре буфета. Определите, продажа какого буфета наиболее выгодна для салона. В ответе запишите, сколько рублей поступит в доход салона от продажи этого буфета.

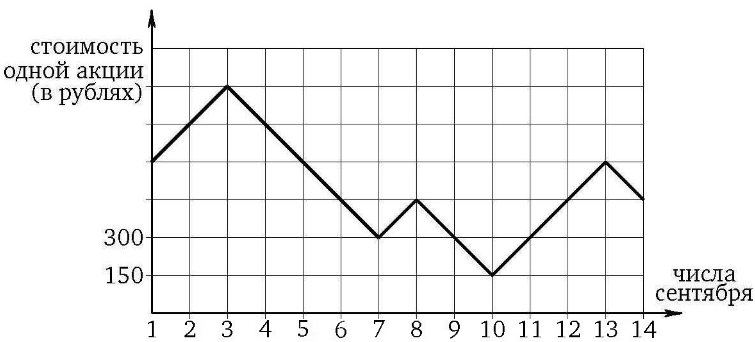
Фирма-производитель	Изделие	Цена
«Альфа»	буфет «Амвросий»	13 500 руб.
«Альфа»	буфет «Болеслав»	20 500 руб.
«Бета»	буфет «Вячеслав»	17 500 руб.
«Омикрон»	буфет «Мир»	15 000 руб.

Вариант 2

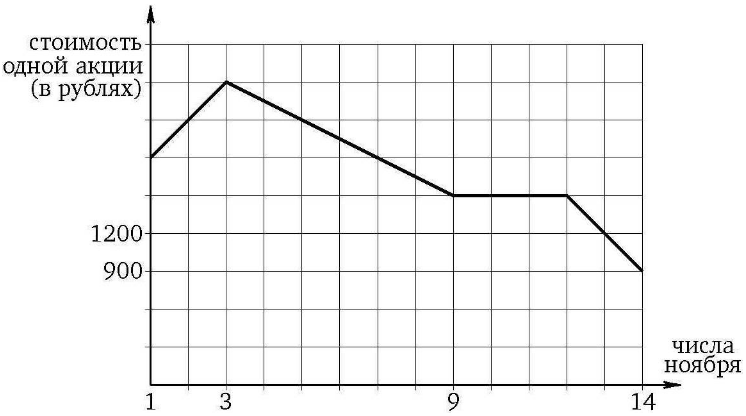
1. На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели апреля. В первую неделю апреля бизнесмен купил 14 акций, а потом продал их на второй неделе. Какую наибольшую прибыль (в рублях) он мог получить?



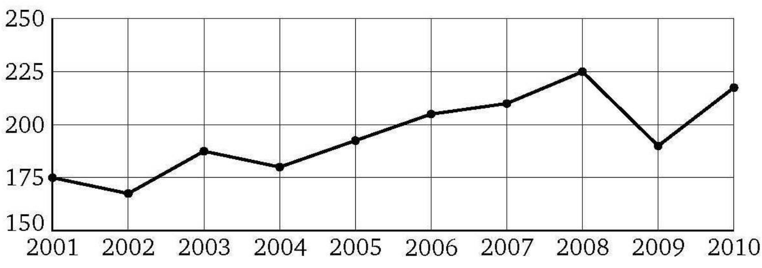
2. На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели сентября. 3 сентября бизнесмен приобрёл 10 акций этой компании. 4 из них он продал 5 сентября, а 11 сентября продал остальные 6. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?



3. На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций нефтеперерабатывающей компании в первые две недели ноября. Два друга — Сергей и Владимир — приобрели по 20 акций компании каждый: Сергей — 2 ноября, а Владимир — 3 ноября. Сергей продал свои акции 9 ноября, а Владимир продал свои 13 ноября. На сколько рублей убыток одного из друзей больше, чем убыток другого?



4. На рисунке изображён годовой объём добычи угля в России открытым способом в период с 2001 по 2010 годы. По горизонтали указывается год, по вертикали — объём добычи угля в миллионах тонн. Для наглядности точки соединены ломаной линией.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику добычи угля.

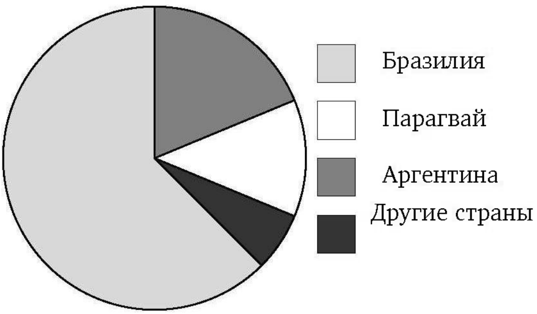
Периоды	**Характеристики**
А) 2001—2003 гг.	1) В течение периода объёмы добычи сначала росли, а затем стали падать.
Б) 2003—2005 гг.	2) Годовой объём добычи в каждый год составлял больше 175, но меньше 200 млн т.
В) 2005—2007 гг.	3) Период содержит год, в который объём добычи угля был минимальным.
Г) 2007—2009 гг.	4) Объём добычи в этот период рос с каждым годом.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

5. На диаграмме представлено распределение количества пользователей некоторой социальной сети по странам мира. Всего в этой социальной сети 12 миллионов пользователей.



Какие из следующих утверждений *неверны*?

1) Пользователей из Аргентины меньше, чем пользователей из Казахстана.
2) Пользователей из Бразилии примерно вдвое больше, чем пользователей из Аргентины.
3) Примерно треть пользователей — не из Бразилии.
4) Пользователей из Аргентины и Белоруссии более 2 млн человек.

В ответе запишите в порядке возрастания номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

6. В таблице указаны доходы и расходы фирмы за 5 месяцев.

Месяц	Доход, тыс. руб.	Расход, тыс. руб.
Июль	120	115
Август	130	135
Сентябрь	145	125
Октябрь	125	115
Ноябрь	135	95

Пользуясь таблицей, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику доходов и расходов.

Периоды

А) август
Б) сентябрь
В) октябрь
Г) ноябрь

Характеристики

1) Расход в этом месяце больше, чем расход в предыдущем.
2) Наибольшая разница между доходом и расходом.
3) Наибольший доход в период с августа по ноябрь.
4) Доход в этом месяце меньше, чем доход в предыдущем.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

7. Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки протяжённостью 600 км. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость их аренды.

Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
А	дизельное	8	5050
Б	бензин	9	3500
В	газ	15	3500

Помимо аренды, клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Цена дизельного топлива — 45 рублей за литр, бензина — 46 рублей за литр, газа — 40 рублей за литр. Сколько рублей заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант?

8. Мебельный салон заключает договоры с производителями мебели. В договорах указывается, какой процент от суммы, вырученной за продажу мебели, поступает в доход мебельного салона.

Фирма-производитель	Процент от выручки, поступающий в доход салона	Примечания
«Альфа»	7 %	изделия ценой до 15 000 руб.
«Альфа»	2 %	изделия ценой свыше 15 000 руб.
«Бета»	3,5 %	все изделия
«Омикрон»	6 %	все изделия

В прейскуранте приведены цены на четыре гардероба. Определите, продажа какого гардероба наиболее выгодна для салона. В ответе запишите, сколько рублей поступит в доход салона от продажи этого гардероба.

Фирма-производитель	Изделие	Цена
«Альфа»	гардероб «Анисья»	13 000 руб.
«Альфа»	гардероб «Властa»	22 200 руб.
«Бета»	гардероб «Инга»	17 000 руб.
«Омикрон»	гардероб «Леокадия»	14 500 руб.

§ 2. Текстовые арифметические задачи на товарно-денежные отношения

Второй параграф пособия посвящён знакомству с различными формулировками задач на товарно-денежные отношения. Эти практико-ориентированные задачи считаются одними из самых простых задач ЕГЭ по математике. Условия многих из таких задач можно в принципе оформлять в виде табличных данных, так что по сути эти задачи отличаются от части задач предыдущего параграфа только формой условия. Для их решения достаточно уметь выполнять арифметические действия с целыми числами и дробями (вычисления по действиям), деление с остатком и последующее округление с недостатком или избытком и т. п. В таких задачах желательно делать проверку, в том числе и на здравый смысл — с помощью прикидки и оценки. В некоторых случаях, когда речь идёт о небольших числах, ответ можно получить и с помощью обычного перебора.

Пример 1. Конфета стоит 8 рублей 85 копеек. Какое наибольшее число конфет можно купить на 100 рублей?

Решение. Решать задачу можно по-разному, например, поделив 100 на 8,85 с остатком и получив в качестве целой части 11. Можно сделать прикидку, сообразив, что 10 конфет стоят 88 рублей 50 копеек и, чтобы при покупке не выйти за пределы 100 рублей, добавить к этим 10 конфетам можно ещё только одну.

Ответ. 11.

Пример 2. Шоколадка стоит 71 рубль. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за три шоколадки, покупатель получает четыре (одну в подарок). Сколько шоколадок можно получить на 500 рублей в воскресенье?

Решение. Найдём вначале, сколько шоколадок можно купить на 500 рублей. Как и предыдущую, эту задачу можно решать по-разному, например, поделив 500 на 71 с остатком и получив в качестве целой части 7. Можно сделать прикидку, сообразив, что 8 шоколадок стоят 568 рублей и, чтобы при покупке не выйти за пределы 500 рублей, нужно купить 7 шоколадок. Поскольку по условию акции за каждые три купленные шоколадки покупатель получает ещё одну в придачу, за 7 купленных шоколадок покупатель получит ещё две по условиям специального предложения, т. е. всего можно будет получить 9 шоколадок.

Ответ. 9.

Пример 3. Больному прописан курс лекарства, которое нужно принимать по 0,4 г 4 раза в день в течение 14 дней. Упаковка содержит 15 таблеток по 0,4 г. Какое наименьшее количество упаковок требуется купить на весь курс лечения?

Решение. Больному нужно принимать по 0,4 г лекарства 4 раза в день, т. е. 1,6 г в сутки. Поэтому на весь курс ему потребуется $1{,}6 \cdot 14 = 22{,}4$ г лекарства. Одна упаковка содержит 15 таблеток по 0,4 г, т. е. 6 г. Ясно, что четырёх упаковок (суммарный вес лекарства в них составляет 24 г) хватит на весь курс, а трёх окажется недостаточно.

Ответ. 4.

Пример 4. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 3 рубля 70 копеек. Счётчик электроэнергии 1 июля показывал 21 433 киловатт-часа, а 1 августа — 21 615 киловатт-часов. Сколько рублей нужно заплатить за электроэнергию за июль?

Решение. Подобные задачи часто вызывают непреодолимые арифметические трудности из-за нерационального решения, когда учащийся находит стоимость электроэнергии (или воды, если речь идёт о расходе воды) за каждый месяц, получая огромные числа, а затем ищет их разность. Решение таких житейских задач предполагает, конечно же, вычисление разности показателей счётчика за два соседних месяца, а уже только после этого умножение найденного числа на стоимость единицы электроэнергии (или воды). В данном случае число киловатт-часов, которые необходимо оплатить, равно $21\,615 - 21\,433 = 182$. Значит, заплатить за израсходованную в июле электроэнергию придётся $182 \cdot 3{,}7 = 673{,}4$ рубля.

Ответ. 673,4.

Пример 5. Семья из трёх человек планирует поехать из Санкт-Петербурга в Вологду. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 870 рублей. Автомобиль расходует 8 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 километрам, а цена бензина равна 41,5 рубля за литр. Сколько рублей придётся заплатить за наиболее дешёвую поездку на троих?

Решение. Билеты на поезд для всей семьи будут стоить $870 \cdot 3 = 2610$ рублей. Бензина для поездки потребуется $\frac{700}{100} \cdot 8 = 56$ литров. На бензин придётся потратить $56 \cdot 41{,}5 = 2324$ рубля. Это и есть искомая плата.

Ответ. 2324.

Упражнения к § 2

1. а) Летом килограмм слив стоит 60 рублей. Мама купила 3 кг 200 г слив. Сколько рублей сдачи она должна получить с 1000 рублей?

б) Летом килограмм груш стоит 80 рублей. Мама купила 1 кг 800 г груш. Сколько рублей сдачи она должна получить с 500 рублей?

2. а) В летнем лагере на каждого ребёнка полагается 60 г сахара в день. В лагере находится 215 детей. Какое наименьшее количество килограммовых пачек сахара достаточно на неделю?

б) В летнем лагере на каждого ребёнка полагается 50 г сахара в день. В лагере находится 163 ребёнка. Сколько килограммовых пачек сахара достаточно на неделю?

3. а) Булочка стоит 14 рублей. Какое наибольшее количество булочек можно купить на 100 рублей?

б) Фломастер стоит 18 рублей. Какое наибольшее количество фломастеров можно купить на 200 рублей?

4. а) Пакетик сока стоит 14 рублей 50 копеек. Какое наибольшее количество пакетиков сока можно купить на 80 рублей?

б) Сырок стоит 6 рублей 70 копеек. Какое наибольшее число сырков можно купить на 50 рублей?

5. а) В магазине продаются трёхместные туристические палатки. Какое наименьшее число палаток нужно закупить для похода, в котором участвует 20 человек?

б) В магазине продаются четырёхместные туристические палатки. Какое наименьшее число палаток нужно закупить для похода, в котором участвует 23 человека?

6. а) В летнем лагере 236 детей и 28 воспитателей. В автобус помещается не более 46 пассажиров. Сколько автобусов потребуется арендовать, чтобы перевезти всех из лагеря в город?

б) В летнем лагере 146 детей и 22 воспитателя. В автобус помещается не более 44 пассажиров. Сколько автобусов потребуется арендовать, чтобы перевезти всех из лагеря в город?

7. а) Магазин открывается в 10 часов утра, а закрывается в 10 часов вечера. Обеденный перерыв длится с 15 до 16 часов. Сколько часов в день открыт магазин?

б) Магазин открывается в 10 часов утра, а закрывается в 9 часов вечера. Обеденный перерыв длится с 14 до 15 часов. Сколько часов в день открыт магазин?

8. а) Один киловатт-час электроэнергии стоит 3 рубля 60 копеек. Счётчик электроэнергии 1 ноября показывал 32 544 киловатт-часа, а 1 декабря — 32 726 киловатт-часов. Сколько рублей нужно заплатить за электроэнергию за ноябрь?

б) Один киловатт-час электроэнергии стоит 3 рубля 80 копеек. Счётчик электроэнергии 1 ноября показывал 12 625 киловатт-часов, а 1 декабря — 12 802 киловатт-часа. Сколько рублей нужно заплатить за электроэнергию за ноябрь?

9. а) В квартире, где проживает Алексей, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 сентября счётчик показывал расход 103 куб. м воды, а 1 октября — 114 куб. м. Какую сумму должен заплатить Алексей за холодную воду за сентябрь, если цена 1 куб. м холодной воды составляет 19 рублей 20 копеек? Ответ дайте в рублях.

б) В квартире, где проживает Валерий, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 марта счётчик показывал расход 182 куб. м воды, а 1 апреля — 192 куб. м. Какую сумму должен заплатить Валерий за холодную воду за март, если цена 1 куб. м холодной воды составляет 23 рубля 10 копеек? Ответ дайте в рублях.

10. а) В супермаркете проходит рекламная акция: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три шоколадки (одна шоколадка в подарок). Шоколадка стоит 35 рублей. Какое наибольшее число шоколадок можно получить на 200 рублей?

б) В супермаркете проходит рекламная акция: заплатив за три шоколадки, покупатель получает четыре шоколадки (одна шоколадка в подарок). Шоколадка стоит 45 рублей. Какое наибольшее число шоколадок можно получить на 300 рублей?

11. а) Серёжа хотел купить четыре одинаковые тетради, но ему не хватило 17 рублей. Тогда он купил три такие тетради, и у него осталось 17 рублей. Сколько рублей было у Серёжи?

б) Искра хотела купить пять одинаковых тетрадей, но ей не хватило 13 рублей. Тогда она купила четыре такие тетради, и у неё осталось 13 рублей. Сколько рублей было у Искры?

12. а) Несколько лет назад в обменном пункте 1 украинская гривна стоила 3 рубля 70 копеек. Отдыхающие в то время обменяли рубли на гривны и купили 3 кг помидоров по цене 4 гривны за 1 кг. Во сколько рублей обошлась им эта покупка? Ответ округлите до целого числа.

б) Несколько лет назад в обменном пункте 1 украинская гривна стоила 3 рубля 90 копеек. Отдыхающие в то время обменяли рубли на гривны и купили арбуз весом 6 кг по цене 2 гривны за 1 кг. Во сколько рублей обошлась им эта покупка? Ответ округлите до целого числа.

13. а) Для приготовления маринада для огурцов на 1 литр воды требуется 12 г лимонной кислоты. Лимонная кислота продаётся в пакетиках по 10 г. Какое наименьшее число пакетиков нужно купить хозяйке для приготовления 8 литров маринада?

б) Для приготовления маринованных огурцов на 1 л воды требуется 12 г лимонной кислоты. Хозяйка готовит две трёхлитровые банки маринада. В магазине продаются пачки лимонной кислоты по 10 г. Какое наименьшее число пачек достаточно купить хозяйке для приготовления маринада?

14. а) Для приготовления яблочного варенья на 1 кг яблок нужно 1,2 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить варенье из 8 кг яблок?

б) Для приготовления малинового варенья на 1 кг малины нужно 1,3 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить варенье из 6 кг малины?

15. а) В пачке бумаги 500 листов. За неделю в офисе расходуется 1200 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 8 недель?

б) В пачке бумаги 500 листов. За неделю в офисе расходуется 1800 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 4 недели?

16. а) Каждый день во время конференции расходуется 70 пакетиков чая. Конференция длится 6 дней. Чай продаётся в пачках по 50 пакетиков. Сколько пачек нужно купить на все дни конференции?

б) Каждый день во время конференции расходуется 120 пакетиков чая. Конференция длится 4 дня. Чай продаётся в пачках по 100 пакетиков. Сколько пачек нужно купить на все дни конференции?

17. а) Больному прописан курс лекарства, которое нужно принимать по 0,5 г 3 раза в день в течение 14 дней. Упаковка содержит 8 таблеток по 0,5 г. Какое наименьшее количество упаковок требуется на весь курс лечения?

б) Больному прописан курс лекарства, которое нужно принимать по 0,5 г 2 раза в день в течение 21 дня. Упаковка содержит 10 таблеток по 0,5 г. Какое наименьшее количество упаковок требуется на весь курс лечения?

18. а) Для покраски потолка требуется 200 г краски на 1 м^2. Краска продаётся в банках по 2 кг. Сколько банок краски нужно купить для покраски потолка площадью 64 м^2?

б) Для покраски потолка требуется 150 г краски на 1 м^2. Краска продаётся в банках по 3 кг. Сколько банок краски нужно купить для покраски потолка площадью 78 м^2?

19. а) Для ремонта квартиры купили 42 рулона обоев. Сколько пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 8 рулонов?

б) Для ремонта квартиры купили 38 рулонов обоев. Сколько пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 5 рулонов?

20. а) Для лакировки пола в рекреации размером 10 метров на 10 метров понадобилось ровно 2 банки лака. Какое наименьшее число банок лака нужно купить для лакировки пола в зале размером 15 метров на 30 метров?

б) Для лакировки пола в рекреации размером 12 метров на 10 метров понадобилось ровно 3 банки лака. Какое наименьшее число банок лака нужно купить для лакировки пола в зале размером 14 метров на 20 метров?

21. а) Подготовка брошюры к печати стоит 45 тыс. рублей. Печать одного экземпляра стоит 40 рублей. Транспортные расходы составляют 15 тыс. рублей. Сеть книжных магазинов покупает эту брошюру у издательства по 70 рублей за экземпляр. При каком наименьшем тираже брошюры издательство окажется не в убытке?

б) Подготовка книги к печати стоит 65 тыс. рублей. Печать одного экземпляра стоит 60 рублей. Транспортные расходы составляют 25 тыс. рублей. Сеть книжных магазинов покупает эту брошюру у издательства по 90 рублей за экземпляр. При каком наименьшем тираже брошюры издательство окажется не в убытке?

22. а) Бассейн имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Его длина, ширина и глубина равны соответственно 22 м, 8 м и 1,5 м. Для облицовки дна и стен бассейна решено приобрести плитку по цене 500 рублей за кв. м. Сколько будет стоить покупка, если по периметру бассейна дополнительно планируется выложить прямоугольную дорожку шириной 1 м из той же плитки?

б) Бассейн имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Его длина, ширина и глубина равны соответственно 21 м, 9 м и 1,1 м. Для облицовки дна и стен бассейна решено приобрести плитку по цене

600 рублей за кв. м. Сколько будет стоить покупка, если по периметру бассейна дополнительно планируется выложить прямоугольную дорожку шириной 1 м из той же плитки?

23. а) Валя купила месячный проездной билет на автобус. За месяц она сделала 44 поездки. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет стоит 760 рублей, а разовая поездка — 22 рубля?

б) Искра купила месячный проездной билет на автобус. За месяц она сделала 41 поездку. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет стоит 850 рублей, а разовая поездка — 24 рубля?

24. а) В киоске «Союзпечать» один номер еженедельного журнала «Репортаж» стоит 27 рублей, а полугодовая подписка на этот журнал стоит 550 рублей. За полгода выходит в свет 25 журналов. Сколько рублей сэкономит г-н Иванов за полгода, если вместо покупки журнала в киоске оформит на него подписку?

б) В киоске «Союзпечать» один номер еженедельного журнала «Дайджест» стоит 37 рублей, а полугодовая подписка на этот журнал стоит 650 рублей. За полгода выходит в свет 24 журнала. Сколько рублей сэкономит г-н Иванов за полгода, если вместо покупки журнала в киоске оформит на него подписку?

25. а) Таксист за месяц проехал 6000 км. Стоимость 1 л бензина — 45 рублей. Средний расход бензина на 100 км составляет 9 л. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

б) Таксист за месяц проехал 5500 км. Стоимость 1 л бензина — 44 рубля. Средний расход бензина на 100 км составляет 9 л. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

26. а) На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и попросил залить бензин до полного бака. Цена бензина — 42 рубля 10 копеек. Сдачи клиент получил 31 рубль 70 копеек. Сколько литров бензина было залито в бак?

б) На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и попросил залить бензин до полного бака. Цена бензина 41 рубль 20 копеек. Сдачи клиент получил 11 рублей 20 копеек. Сколько литров бензина было залито в бак?

27. а) На счёте Сашиного мобильного телефона было 130 рублей, а после разговора с Верой осталось 94 рубля. Сколько минут длился разговор с Верой, если 1 минута разговора стоит 1 рубль 20 копеек?

б) На счёте Машиного мобильного телефона было 66 рублей, а после разговора с Леной осталось 39 рублей. Сколько минут длился разговор с Леной, если 1 минута разговора стоит 2 рубля 25 копеек?

28. а) Маша отправила СМС-сообщения с новогодними поздравлениями своим 16 друзьям. Стоимость одного СМС-сообщения 1 рубль 30 копеек. Перед отправкой сообщений на счёте у Маши было 30 рублей. Сколько рублей останется у Маши на счёте после отправки всех сообщений?

б) Даша отправила СМС-сообщения с новогодними поздравлениями своим 18 друзьям. Стоимость одного СМС-сообщения 1 рубль 20 копеек. Перед отправкой сообщений на счёте у Маши было 40 рублей. Сколько рублей останется у Маши на счёте после отправки всех сообщений?

29. а) Выпускники 11«А» класса покупают букеты цветов для последнего звонка: из 3 роз каждому учителю и из 7 роз классному руководителю и директору. Они собираются подарить цветы 15 учителям (включая директора и классного руководителя), розы покупаются по оптовой цене 35 рублей за штуку. Сколько рублей стоят все розы?

б) Выпускники 11«Б» класса покупают букеты цветов для последнего звонка: из 5 роз каждому учителю и из 7 роз классному руководителю и директору. Они собираются подарить цветы 18 учителям (включая директора и классного руководителя), розы покупаются по оптовой цене 25 рублей за штуку. Сколько рублей стоят все розы?

30. а) На день рождения принято дарить букет из нечётного числа цветов. Тюльпаны стоят 35 рублей за штуку. У Вани есть 450 рублей. Из какого наибольшего числа тюльпанов он сможет купить букет Тане на день рождения?

б) На день рождения принято дарить букет из нечётного числа цветов. Розы стоят 40 рублей за штуку. У Серёжи есть 900 рублей. Букет из какого наибольшего числа роз он может купить Искре на день рождения?

31. а) Есть 730 теннисных мячей. Какое наименьшее число мячей нужно докупить, чтобы мячи можно было распределить поровну между 48 теннисистами?

б) Есть 640 теннисных мячей. Какое наименьшее число мячей нужно докупить, чтобы мячи можно было распределить поровну между 59 теннисистами?

32. а) В спортивном лагере по настольному теннису каждый день ломается или теряется 8 теннисных шариков. Лагерная смена длится 18 дней. Шарики продают упаковками по 10 штук. Какое наименьшее количество упаковок шариков нужно купить на одну лагерную смену, чтобы в конце смены остался хотя бы один шарик?

б) В спортивном лагере по настольному теннису каждый день ломается или теряется 6 теннисных шариков. Лагерная смена длится 14 дней. Шарики продают упаковками по 8 штук. Какое наименьшее количество упаковок шариков нужно купить на одну лагерную смену, чтобы в конце смены остался хотя бы один шарик?

33. а) 143 кг крупы требуется пересыпать в коробки вместимостью 3 кг, 5 кг и 9 кг так, чтобы в коробках не оставалось пустого места. Какое наименьшее число коробок потребуется купить для этого?

б) 134 кг крупы требуется пересыпать в коробки вместимостью 2 кг, 5 кг и 9 кг так, чтобы в коробках не оставалось пустого места. Какое наименьшее число коробок потребуется купить для этого?

34. а) На свой день рождения Маша купила 35 конфет и 49 шоколадных медалей. Какое наибольшее количество гостей Маша может пригласить к себе, чтобы и конфеты, и медали можно было разделить поровну между всеми, включая её саму?

б) На свой день рождения Даша купила 60 конфет и 48 шоколадных медалей. Какое наибольшее количество гостей Даша может пригласить к себе, чтобы и конфеты, и медали можно было разделить поровну между всеми, включая её саму?

35. а) В шоколадном наборе конфеты с начинкой «пралине» должны составлять от одной четверти до одной трети общего числа конфет. Сколько конфет с начинкой «пралине» должно быть в наборе, который состоит из 14 конфет?

б) В шоколадном наборе конфеты с начинкой «марципан» должны составлять от одной пятой до одной четверти общего числа конфет. Сколько конфет с начинкой «марципан» должно быть в наборе, который состоит из 18 конфет?

36. а) Витя и Катя приобрели инвестиционный портфель, вложив деньги в отношении $3:8$ соответственно и договорившись поделить прибыль пропорционально вложенным деньгам. Прибыль составила 352 000 рублей. Сколько рублей причитается Вите?

б) Ваня и Таня приобрели инвестиционный портфель, вложив деньги в отношении $4:7$ соответственно и договорившись поделить прибыль пропорционально вложенным деньгам. Прибыль составила 374 000 рублей. Сколько рублей причитается Тане?

37. а) Игорь, Володя, Серёжа и Паша купили лотерейный билет за 10 рублей. Игорь заплатил 2 рубля 90 копеек, Володя — 3 рубля 70 копеек, Серёжа — 1 рубль 20 копеек, а оставшуюся сумму внёс Паша.

Мальчики договорились, что выигрыш делят между собой пропорционально внесённому вкладу. На билет выпал выигрыш 2000 рублей. Какая сумма из выигрыша причитается Паше? Ответ дайте в рублях.

б) Ваня, Вася, Саша и Петя купили лотерейный билет за 20 рублей. Ваня заплатил 4 рубля 80 копеек, Вася — 7 рублей 40 копеек, Саша — 2 рубля 30 копеек, а оставшуюся сумму внёс Петя. Мальчики договорились, что выигрыш делят между собой пропорционально внесённому вкладу. На билет выпал выигрыш 3000 рублей. Какая сумма из выигрыша причитается Пете? Ответ дайте в рублях.

38. а) Бассейн имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Его длина, ширина и глубина равны соответственно 18 м, 12 м и 1,4 м. Для облицовки дна и стен бассейна решено приобрести плитку по цене 300 рублей за кв. м. Сколько рублей будет стоить покупка, если по периметру бассейна дополнительно планируется выложить прямоугольную дорожку шириной 1 м из той же плитки?

б) Бассейн имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Его длина, ширина и глубина равны соответственно 23 м, 10 м и 1,3 м. Для облицовки дна и стен бассейна решено приобрести плитку по цене 700 рублей за кв. м. Сколько рублей будет стоить покупка, если по периметру бассейна дополнительно планируется выложить прямоугольную дорожку шириной 1 м из той же плитки?

39. а) Двое решают, как им обойдётся дешевле доехать из одного города в другой — на поезде или в автомобиле. Билет на поезд стоит 1240 рублей на одного человека. Автомобиль расходует 9 литров бензина на 100 км пути, расстояние по шоссе равно 900 км, а цена бензина — 31 рубль за литр. Во сколько рублей обойдётся наиболее дешёвая поездка на двоих?

б) Трое решают, как им обойдётся дешевле доехать из одного города в другой — на поезде или в автомобиле. Билет на поезд стоит 705 рублей на одного человека. Автомобиль расходует 8 литров бензина на 100 км пути, расстояние по шоссе равно 800 км, а цена бензина — 42 рубля за литр. Во сколько рублей обойдётся наиболее дешёвая поездка на троих?

40. а) Трое решают, как им обойдётся дешевле доехать из одного города в другой — на поезде или в автомобиле, и планируют разделить расходы на поездку поровну. Билет на поезд стоит 760 рублей на одного человека. Автомобиль расходует 12 литров бензина на 100 км пути, расстояние по шоссе равно 600 км, а цена бензина равна 42,5 рубля за литр. Во сколько рублей обойдётся наиболее дешёвая поездка на одного?

б) Двое решают, как им обойдётся дешевле доехать из одного города в другой — на поезде или в автомобиле, и планируют разделить расходы на поездку поровну. Билет на поезд стоит 860 рублей на одного человека. Автомобиль расходует 7 литров бензина на 100 км пути, расстояние по шоссе равно 800 км, а цена бензина равна 41,5 рубля за литр. Во сколько рублей обойдётся наиболее дешёвая поездка на одного?

41. а) Для строительства дачи можно использовать один из трёх вариантов фундамента: каменный, бетонный и фундамент из пеноблоков. Для каменного фундамента необходимо 7 тонн камня и 7 мешков цемента. Для фундамента из пеноблоков необходимо 6 кубометров пеноблоков. Для бетонного фундамента необходимо 9 тонн щебня и 25 мешков цемента. Тонна камня стоит 2000 рублей, кубометр пеноблоков стоит 2300 рублей, щебень стоит 750 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 260 рублей. Сколько рублей придётся заплатить за самый дешёвый фундамент?

б) Для строительства дачи можно использовать один из трёх вариантов фундамента: каменный, бетонный и фундамент из пеноблоков. Для каменного фундамента необходимо 6 тонн камня и 6 мешков цемента. Для фундамента из пеноблоков необходимо 4 кубометра пеноблоков. Для бетонного фундамента необходимо 8 тонн щебня и 22 мешка цемента. Тонна камня стоит 1700 рублей, кубометр пеноблоков стоит 2350 рублей, щебень стоит 740 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 220 рублей. Сколько рублей придётся заплатить за самый дешёвый фундамент?

42. а) Поставщик газа может заключить договор на транзит своего газа до клиента через любой из трёх газопроводов: Северный, Центральный или Западный. Длина Северного газопровода равна 380 километрам, длина Центрального газопровода равна 400 километрам, а длина Западного газопровода равна 280 километрам. Транспортировка 1000 кубометров газа на 100 километров по Северному газопроводу стоит 10 долларов, по Центральному газопроводу — 8,5 доллара, по Западному газопроводу — 11 долларов. Сколько долларов придётся заплатить за самый выгодный транзит 1,5 миллиона кубометров газа?

б) Поставщик газа может заключить договор на транзит своего газа до клиента через любой из трёх газопроводов: Северный, Центральный или Западный. Длина Северного газопровода равна 360 километрам, длина Центрального газопровода равна 370 километрам, а длина Западного газопровода равна 290 километрам. Транспортировка 1000 кубометров газа на 100 километров по Северному газопроводу стоит 8,5 доллара, по Центральному газопроводу — 8 долларов, по Западному газопроводу — 9 долларов. Сколько долларов придётся заплатить за самый выгодный транзит 1,5 миллиона кубометров газа?

Диагностическая работа 2

Вариант 1

1. Килограмм помидоров стоит 120 рублей. Мама купила 2 кг 400 г помидоров. Сколько рублей сдачи она должна получить с 500 рублей?

2. Пакетик сока стоит 16 рублей 50 копеек. Какое наибольшее количество пакетиков сока можно купить на 100 рублей?

3. В одном контейнере можно разместить 11 одинаковых коробок. Какое наименьшее число контейнеров потребуется купить для того, чтобы разместить 100 таких коробок?

4. Один киловатт-час электроэнергии стоит 3 рубля 60 копеек. Счётчик электроэнергии 1 ноября показывал 56 479 киловатт-часов, а 1 декабря — 56 612 киловатт-часов. Сколько рублей нужно заплатить за электроэнергию за ноябрь?

5. Искра купила месячный проездной билет на автобус. За месяц она сделала 52 поездки. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет стоит 840 рублей, а разовая поездка — 18 рублей?

6. Таксист за месяц проехал 6400 км. Стоимость 1 л бензина — 44 рубля. Средний расход бензина на 100 км составляет 9 л. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

7. Бассейн имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Его длина, ширина и глубина равны соответственно 20 м, 14 м и 1,3 м. Для облицовки дна и стен бассейна решено приобрести плитку по цене 400 рублей за кв. м. Сколько будет стоить покупка, если по периметру бассейна дополнительно планируется выложить прямоугольную дорожку шириной 1 м из той же плитки?

8. На счёте мобильного телефона Искры было 84 рубля, а после разговора с Серёжей осталось 19 рублей. Сколько минут длился разговор с Серёжей, если 1 минута разговора стоит 2 рубля 50 копеек?

9. Для строительства дачи можно использовать один из трёх вариантов фундамента: каменный, бетонный и фундамент из пеноблоков. Для каменного фундамента необходимо 9 тонн камня и 9 мешков цемента. Для фундамента из пеноблоков необходимо 9 кубометров пеноблоков. Для бетонного фундамента необходимо 12 тонн щебня и 34 мешка цемента. Тонна камня стоит 2100 рублей, кубометр пеноблоков стоит 2500 рублей, щебень стоит 630 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 200 рублей. Сколько рублей придётся заплатить за самый дешёвый фундамент?

10. Поставщик газа может заключить договор на транзит своего газа до клиента через любой из трёх газопроводов: Северный, Центральный или Западный. Длина Северного газопровода равна 370 километрам, длина Центрального газопровода равна 410 километрам, а длина Западного газопровода равна 290 километрам. Транспортировка 1000 кубометров газа на 100 километров по Северному газопроводу стоит 12 долларов, по Центральному газопроводу — 10,5 доллара, по Западному газопроводу — 15 долларов. Сколько долларов придётся заплатить за самый выгодный транзит 2,5 миллиона кубометров газа?

Вариант 2

1. Килограмм огурцов стоит 90 рублей. Папа купил 2 кг 600 г огурцов. Сколько рублей сдачи он должен получить с 500 рублей?

2. Пакетик сока стоит 13 рублей 50 копеек. Какое наибольшее количество пакетиков сока можно купить на 100 рублей?

3. В одном контейнере можно разместить 9 одинаковых коробок. Какое наименьшее число контейнеров потребуется для того, чтобы разместить 67 таких коробок?

4. Один киловатт-час электроэнергии стоит 1 рубль 40 копеек. Счётчик электроэнергии 1 марта показывал 770 киловатт-часов, а 1 апреля показывал 1135 киловатт-часов. Какую сумму нужно заплатить за электроэнергию за март? Ответ дайте в рублях.

5. Стоимость проездного билета на месяц составляет 800 рублей. Стоимость билета на одну поездку составляет 22 рубля. Серёжа купил проездной и сделал за месяц 45 поездок. Сколько рублей он сэкономил?

6. Таксист за месяц проехал 7000 км. Стоимость 1 л бензина — 42 рубля. Средний расход бензина на 100 км составляет 8 л. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

7. Бассейн имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Его длина, ширина и глубина равны соответственно 20 м, 10 м и 1,2 м. Для облицовки дна и стен бассейна решено приобрести плитку по цене 400 рублей за кв. м. Сколько будет стоить покупка, если по периметру бассейна дополнительно планируется выложить прямоугольную дорожку шириной 1 м из той же плитки?

8. На счёте мобильного телефона Серёжи было 53 рубля, а после разговора с Искрой осталось 8 рублей. Сколько минут длился разговор с Искрой, если 1 минута разговора стоит 2 рубля 50 копеек?

9. Для строительства дачи можно использовать один из трёх вариантов фундамента: каменный, бетонный и фундамент из пеноблоков. Для каменного фундамента необходимо 5 тонн камня и 5 мешков цемента. Для фундамента из пеноблоков необходимо 4 кубометра пеноблоков. Для бетонного фундамента необходимо 7 тонн щебня и 19 мешков цемента. Тонна камня стоит 2200 рублей, кубометр пеноблоков стоит 2400 рублей, щебень стоит 750 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 280 рублей. Сколько рублей придётся заплатить за самый дешёвый фундамент?

10. Поставщик газа может заключить договор на транзит своего газа до клиента через любой из трёх газопроводов: Северный, Центральный или Западный. Длина Северного газопровода равна 360 километрам, длина Центрального газопровода равна 420 километрам, а длина Западного газопровода равна 270 километрам. Транспортировка 1000 кубометров газа на 100 километров по Северному газопроводу стоит 11 долларов, по Центральному газопроводу — 9,5 доллара, по Западному газопроводу — 15 долларов. Сколько долларов придётся заплатить за самый выгодный транзит 3,5 миллиона кубометров газа?

§ 3. Текстовые арифметические задачи на проценты

Трудности, которые вызывают у многих учащихся даже несложные задачи на проценты, обычно во многом обусловлены достаточно формальным подходом к изложению темы. А ведь для решения подавляющего большинства задач на проценты достаточно понимать, что процент — это просто одна сотая часть числа. Поэтому для успешного решения задач на проценты достаточно научиться «переводить» условие задачи на язык десятичных дробей, а после её решения — делать обратный «перевод». Так, например, если товар стоил a рублей, а потом его цена выросла, например, на 8, 18 или 28 процентов, это означает, что для нахождения новой цены нужно число a увеличить соответственно на 8, 18 или 28 сотых. Получим $1{,}08a$, $1{,}18a$, $1{,}28a$ соответственно. Если же цена уменьшилась на 8, 18 или 28 процентов, это означает, что для нахождения новой цены нужно число a уменьшить соответственно на 8, 18 или 28 сотых. Получим $0{,}92a$, $0{,}82a$, $0{,}72a$ соответственно.

Так как процент — это сотая часть числа, для того чтобы найти $k\,\%$ от числа a, достаточно умножить число a на k сотых. Получим $\frac{k}{100} \cdot a$.

Пример 1. Найдите 20% от 84 килограммов. Ответ дайте в килограммах.

Решение. 20% данной величины — это двадцать сотых (т. е. две десятых) этой величины. Поэтому 20% от 84 килограммов — это $0{,}2 \cdot 84 = 16{,}8$ кг.

Ответ. 16,8.

Пример 2. Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 9% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,35 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте четырёх месяцев и весом 8 кг в течение суток?

Решение. Поскольку процент — это одна сотая часть числа, активного вещества в каждой таблетке содержится $20 \cdot 0{,}09 = 1{,}8$ мг. Ребёнку указанного в условии задачи возраста и весом 8 кг требуется $8 \cdot 1{,}35 = 10{,}8$ мг активного вещества в сутки. Искомое число таблеток будет равно $10{,}8 : 1{,}8 = 6$.

Ответ. 6.

Попробуем теперь ответить на следующий вопрос: на сколько процентов товар b дороже товара a, если товар a дешевле товара b на

20%? Кажется, ответ очевиден: на 20%. Но это не так. В самом деле, $a = 0{,}8b = \frac{4}{5}b$, значит, $b = \frac{5}{4}a = 1{,}25a$, т. е. b больше a на двадцать пять сотых. Следовательно, b дороже a на 25%. Этот «парадокс» объясняется просто: в одном случае мы выражаем a в процентах от b, в другом случае — b в процентах от a.

И ещё пример. В городе два магазина. В первом висит объявление о снижении цен на 80%, во втором — о снижении цен в 5 раз. Спрашивается, в какой магазин пойти покупателю, если цены в обоих магазинах до снижения были одинаковыми? Большинство почему-то выбирает второй магазин, хотя ответ здесь: в ближайший к дому. И впрямь, уменьшение величины a на 80% даёт $0{,}2a$. Но уменьшение величины a в 5 раз приводит к тому же результату: получаем $\frac{a}{5} = 0{,}2a$.

Пример 3. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Иван Иванович получил 26 100 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Ивана Ивановича?

Решение. Обозначим заработную плату Ивана Ивановича буквой $З$, а его получку после удержания налога — буквой $П$. Налог составляет 13%, поэтому $П$ меньше $З$ на 13 сотых, т. е. $П = 0{,}87 \cdot З$. По условию $П = 26\,100$. Значит, $0{,}87 \cdot З = 26\,100$, откуда $З = \frac{26\,100}{0{,}87} = 30\,000$ рублей.

Ответ. 30 000.

Отметим ещё следующее. Последовательное увеличение величины на некоторое число процентов, а затем уменьшение результата на то же число процентов не приводит к начальной величине: ведь второе действие мы совершаем уже с другой величиной. То же самое можно сказать и об обратной последовательности действий. Интересно, что в любом случае мы получим в итоге величину, меньшую начальной. Например, увеличив a на 10%, получим $1{,}1a$. Уменьшив полученную величину на 10%, получим $0{,}9 \cdot 1{,}1a = 0{,}99a$ — полученная величина меньше начальной на 1%. При этом порядок действий не играет роли: если сначала уменьшить a на 10%, а затем результат увеличить на 10%, получим $1{,}1 \cdot 0{,}9a = 0{,}99a$ — ту же самую величину. В общем случае при увеличении величины a на k% получим величину $a_1 = a\left(1 + \frac{k}{100}\right)$. Если же теперь уменьшить a_1 на k%, получим

$$a_2 = a_1\left(1 - \frac{k}{100}\right) = a\left(1 + \frac{k}{100}\right)\left(1 - \frac{k}{100}\right),$$

т. е. $a_2 = a\left(1 - \left(\frac{k}{100}\right)^2\right) < a$.

Пример 4. В июле товар стоил 5000 рублей. В ноябре цену на товар снизили на 7%, а в декабре подняли на 8%. Сколько рублей стоил товар после повышения цены в декабре?

Решение. Стоимость товара в ноябре уменьшилась на 7 сотых, т. е. составила $0{,}93 \cdot 5000 = 4650$ рублей. Полученная стоимость увеличилась в декабре на 8 сотых, т. е. составила $1{,}08 \cdot 4650 = 5022$ рубля.

Ответ. 5022.

Пример 5. Десять рубашек дороже куртки на 10%. На сколько процентов одиннадцать рубашек дороже куртки?

Решение. Обозначим буквой P стоимость одной рубашки, буквой K — стоимость куртки. Из условия задачи следует, что $10P = 1{,}1K$, откуда $P = \frac{1{,}1K}{10} = 0{,}11K$. Следовательно,

$$11P = 11 \cdot 0{,}11K = 1{,}21K.$$

Значит, стоимость одиннадцати рубашек больше стоимости куртки на 21 сотую, т. е. одиннадцать рубашек дороже куртки на 21%.

Ответ. 21.

Обратим внимание на то, что при изложенном подходе к решению задач на проценты не нужно запоминать никаких правил, составлять пропорции и т. п. — все решения сводятся к действиям с десятичными дробями.

В некоторых случаях, если не задана какая-то величина, например стоимость товара, её можно считать равной любому удобному для решения задачи числу.

Пример 6. Во время распродажи Паша купил четыре одинаковые по цене футболки со скидкой 40%. Сколько таких футболок он мог бы купить на ту же сумму, если бы скидка составила 60%?

Решение. Будем считать, что до распродажи футболка стоила 100 д. е. (денежных единиц). Тогда стоимость футболки со скидкой 40% будет равна 60 д. е. Значит, Паша потратил на покупку четырёх футболок $4 \cdot 60 = 240$ д. е. Если скидка составит 60%, то стоимость футболки будет равна 40 д. е. и на 240 д. е. можно будет купить $240 : 40 = 6$ футболок.

Ответ. 6.

Даже при вычислении вероятностей порой приходится иметь дело с процентами. Прежде чем рассматривать соответствующие задачи, напомним, что для их решения достаточно уметь находить отношение числа благоприятных для наступления некоторого события исходов к числу всех равновозможных исходов. Иногда это требует, как отмечалось, помимо определённых вычислительных навыков, ещё и действий с отношениями и/или процентами.

Пример 7. На птицеферме разводят куриц, уток и гусей. Известно, что уток в 1,5 раза больше, чем гусей, и на 40% меньше, чем куриц. Найдите вероятность того, что случайно увиденная на этой птицеферме птица окажется гусем.

Решение. Если обозначить число куриц через x, то число уток будет равно $0{,}6x$, а число гусей — в полтора раза меньше, т. е. $0{,}4x$. Значит, всего птиц на птицеферме $x+0{,}6x+0{,}4x=2x$. Поэтому вероятность случайно увидеть гуся равна $\frac{0{,}4x}{2x}=0{,}2$.

Ответ. 0,2.

Пример 8. На фабрике керамической посуды 5% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка окажется с дефектом. Результат округлите до сотых.

Решение. Пусть всего произведено x тарелок. Тогда $0{,}05x$ тарелок имеют дефект, а $0{,}95x$ тарелок — без дефекта. Из $0{,}05x$ дефектных тарелок при контроле качества выявляется $0{,}8\cdot 0{,}05x=0{,}04x$ тарелок, а не выявляется $0{,}05x-0{,}04x=0{,}01x$ тарелок. Эти не выявленные тарелки, а также тарелки без дефекта поступают в продажу, т. е. всего в продажу поступает $0{,}95x+0{,}01x=0{,}96x$ тарелок. При случайном выборе вероятность выбрать тарелку с дефектом равна $\frac{0{,}01x}{0{,}96x}=\frac{1}{96}\approx 0{,}01$.

Ответ. 0,01.

Пример 9. Поставщик заказывает одинаковые детали у двух фабрик. Первая фабрика выпускает 70% этих деталей, вторая — 30%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных деталей, а вторая — 5%. Найдите вероятность того, что случайно заказанная у поставщика деталь будет исправной.

Решение. Рассмотрим один из способов решения этой задачи, основанный на подборе удобных данных. При таком способе не нужно использовать формулы сложения или умножения вероятностей. Основан он на том, что количество выпускаемых каждой фабрикой деталей не задано и мы можем считать его равным любому удобному для решения числу. Разумеется, необходимо, чтобы эти количества согласовывались с условиями задачи и чтобы процент бракованных деталей был для каждой фабрики равен целому числу. Возникает вопрос: какое число считать удобным? Очевидно, что если один процент выпускаемых каждой фабрикой деталей будет равен целому числу, то и число дефектных деталей будет целым. Поэтому можно просто считать, что первая фабрика выпускает 700 деталей (и тогда 3% дефектных составят 21 штуку), а вторая фабрика выпускает 300 деталей (и тогда 5% дефектных составят 15 штук). Таким образом, общее число деталей будет равно 1000, а общее число дефектных деталей будет равно 36. Значит, исправных деталей окажется 964 и искомая вероятность составит $\frac{964}{1000} = 0{,}964$.

Ответ. 0,964.

Разумеется, задачу можно решить иначе, например, нарисовав дерево вероятностей либо произведя подсчёт иным способом. Рассмотрим один из них. Пусть число всех выпущенных деталей равно x. Тогда первая фабрика выпускает $0{,}7x$ деталей, из которых 97% не имеют дефектов, т. е. всего $0{,}97 \cdot 0{,}7x = 0{,}679x$ деталей без дефектов. Аналогично вторая фабрика выпускает $0{,}95 \cdot 0{,}3x = 0{,}285x$ деталей без дефектов, а обе фабрики выпускают

$$0{,}679x + 0{,}285x = 0{,}964x \text{ деталей без дефектов.}$$

Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{0{,}964x}{x} = 0{,}964$.

Пример 10. Из водоплавающих животных в заповеднике обитают бобры, ондатры и выдры. Найдите вероятность того, что случайно встреченное в заповеднике водоплавающее животное окажется ондатрой, если из трёх следующих утверждений два истинны, а одно ложно:

1) бобры составляют 44% водоплавающих животных заповедника;

2) ондатры составляют 77% водоплавающих животных заповедника;

3) выдры составляют 33% водоплавающих животных заповедника.

Решение. Предположим, что утверждение 2 истинно. Тогда оба утверждения 1 и 3 ложны, так как общее число животных не может быть больше 100%. По условию только одно утверждение является ложным. Получили противоречие. Значит, утверждение 2 является ложным, а утверждения 1 и 3 истинны. Поэтому ондатры составляют $100\% - 44\% - 33\% = 23\%$ водоплавающих животных заповедника, а искомая вероятность равна 0,23.

Ответ. 0,23.

Последняя задача напрямую связана с простейшим логическим перебором. Немного логики не помешает и при решении некоторых арифметических задач.

Пример 11. В магазине два отдела: галантереи и одежды. Если бы дневная выручка отдела галантереи увеличилась вчетверо, дневная выручка магазина выросла бы на 48%. На сколько процентов уменьшилась бы дневная выручка магазина, если бы дневная выручка отдела одежды сократилась втрое?

Решение. Увеличение в 4 раза выручки отдела галантереи означает, что к сумме выручки этого отдела добавляются ещё три такие суммы. Значит, одна такая сумма составляет $48\% : 3 = 16\%$ всей выручки магазина. Поэтому сумма дневной выручки отдела одежды равна $100\% - 16\% = 84\%$ всей выручки магазина. Если дневная выручка отдела одежды станет втрое меньше, то общая выручка магазина уменьшится на две трети от суммы выручки отдела одежды, что составит $\frac{2}{3} \cdot 84\% = 56\%$.

Ответ. 56.

Пример 12. Процент числа учеников одиннадцатого класса, поехавших на экскурсию, заключён в пределах от 95,2% до 95,6%. Найдите наименьшее возможное число учеников этого класса.

Решение. Из условия следует, что процент учеников, не поехавших на экскурсию, заключён в пределах от 4,4% до 4,8% числа учеников этого класса. Число x учеников этого класса будет наименьшим из возможных, если на экскурсию не поехал всего один человек. Таким образом, $0{,}044x \leqslant 1 \leqslant 0{,}048x$, откуда

$$\begin{cases} x \leqslant \dfrac{1000}{44}, \\ x \geqslant \dfrac{1000}{48}, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x \leqslant 22\dfrac{8}{11}, \\ x \geqslant 20\dfrac{5}{6}. \end{cases}$$

Наименьшим целым числом x, удовлетворяющим двум последним неравенствам, является 21.

Ответ. 21.

Упражнения к § 3

1. а) Найдите 30 % от 70 килограммов. Ответ дайте в килограммах.

б) Найдите 12 % от 2400 рублей. Ответ дайте в рублях.

2. а) Только 94 % из 27 500 выпускников города правильно решило задачу на проценты. Сколько человек правильно решило эту задачу?

б) Только 92 % из 32 500 выпускников города правильно решило задачу на проценты. Сколько человек правильно решило эту задачу?

3. а) Набор из восьми одинаковых по стоимости карандашей подорожал на 8 %. На сколько процентов подорожал один такой карандаш?

б) Набор из двенадцати одинаковых по стоимости карандашей подешевел на 24 %. На сколько процентов подешевел один такой карандаш?

4. а) Если бы в куске сыра не было дырок, он бы весил 800 граммов. Сколько весит кусок сыра, если дырки составляют 20 % его объёма? Ответ дайте в граммах.

б) Если бы в куске сыра не было дырок, он бы весил 600 граммов. Сколько весит кусок сыра, если дырки составляют 10 % его объёма? Ответ дайте в граммах.

5. а) Рубашка стоит 1450 рублей. Во время распродажи скидка на все товары составляет 20 %. Сколько рублей стоит рубашка во время распродажи?

б) Пачка сливочного масла стоит 80 рублей. Пенсионерам магазин делает скидку 5 %. Сколько рублей заплатит пенсионер за пачку масла?

6. а) В сентябре 1 кг слив стоил 60 рублей. В октябре сливы подорожали на 25 %. Сколько рублей стоил 1 кг слив после подорожания в октябре?

б) Магазин покупает учебники по оптовой цене 160 рублей за один учебник и продаёт их по розничной цене, которая на 40 % больше оптовой. Сколько рублей стоит учебник в этом магазине?

7. а) Налог на доходы составляет 13 % от заработной платы. Заработная плата Петра Ивановича равна 14 000 рублей. Сколько рублей он получит после удержания налога на доходы?

б) Налог на доходы составляет 13 % от заработной платы. Заработная плата Павла Сергеевича равна 21 000 рублей. Сколько рублей он получит после удержания налога на доходы?

8. а) 15 % вклада составляют 4500 рублей. Сколько рублей составляет вклад?

б) 45% вклада составляют 2700 рублей. Сколько рублей составляет вклад?

9. а) Цена на товар была снижена на 10% и составила 2700 рублей. Сколько рублей стоил товар до снижения цены?

б) Цена на товар была повышена на 10% и составила 462 рубля. Сколько рублей стоил товар до повышения цены?

10. а) Стоимость покупки с учётом 5-процентной скидки по дисконтной карте составила 1216 рублей. Сколько рублей пришлось бы заплатить за покупку при отсутствии дисконтной карты?

б) Стоимость покупки с учётом 6-процентной скидки по дисконтной карте составила 1222 рубля. Сколько рублей пришлось бы заплатить за покупку при отсутствии дисконтной карты?

11. а) Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Мария Гавриловна получила 10 440 рублей. Чему равна заработная плата Марии Гавриловны? Ответ дайте в рублях.

б) Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Елена Васильевна получила 11 745 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Елены Васильевны?

12. а) Мобильный телефон стоил 3500 рублей. Через некоторое время цену на эту модель снизили до 2800 рублей. На сколько процентов была снижена цена?

б) Куртка стоила 1200 рублей. После снижения цены она стала стоить 1140 рублей. На сколько процентов была снижена цена на куртку?

13. а) Джинсы стоили 1200 рублей. После повышения цены они стали стоить 1320 рублей. На сколько процентов была повышена цена на джинсы?

б) Кроссовки стоили 750 рублей. После повышения цены они стали стоить 900 рублей. На сколько процентов была повышена цена на кроссовки?

14. а) В июне 1 кг огурцов стоил 120 рублей. В июле огурцы подешевели на 20%, а в августе — ещё на 50%. Сколько рублей стоил 1 кг огурцов после снижения цены в августе?

б) В июне 1 кг помидоров стоил 140 рублей. В июле цена помидоров снизилась на 40%, а в августе — ещё на 50%. Сколько рублей стоил 1 кг помидоров после снижения цены в августе?

15. а) В сентябре 1 кг яблок стоил 50 рублей, в октябре яблоки подорожали на 20 %, а в ноябре — ещё на 40 %. Сколько рублей стоил 1 кг яблок после подорожания в ноябре?

б) В сентябре 1 кг слив стоил 60 рублей, в октябре сливы подорожал на 25 %, а в ноябре — ещё на 20 %. Сколько рублей стоил 1 кг слив после подорожания в ноябре?

16. а) В июне завод выпустил 800 приборов. В августе производство снизилось на 15 %, а в сентябре — ещё на 15 %. Сколько приборов завод выпустил в сентябре?

б) В июне завод выпустил 500 приборов. В августе производство снизилось на 20 %, а в сентябре — ещё на 20 %. Сколько приборов завод выпустил в сентябре?

17. а) В феврале товар стоил 70 000 рублей. В мае цену на товар подняли на 6 %, а в августе снизили на 6 %. Сколько рублей стоил товар после снижения цены в августе?

б) В феврале товар стоил 8000 рублей. В мае цену на товар подняли на 15 %, а в августе снизили на 15 %. Сколько рублей стоил товар после снижения цены в августе?

18. а) В октябре биржевая стоимость одной акции фирмы «Альфа» выросла на 20 % по сравнению с сентябрём, а в ноябре — ещё на 30 % по сравнению с октябрём и составила 312 рублей. Сколько рублей стоила одна акция в сентябре?

б) В апреле биржевая стоимость одной акции фирмы «Омега» выросла на 10 % по сравнению с мартом, а в мае — ещё на 20 % по сравнению с апрелем и составила 396 рублей. Сколько рублей стоила одна акция в марте?

19. а) В апреле биржевая стоимость одной акции фирмы «Гамма» снизилась на 10 % по сравнению с мартом, а в мае — ещё на 25 % по сравнению с апрелем и составила 270 рублей. Сколько рублей стоила одна акция в марте?

б) В октябре биржевая стоимость одной акции фирмы «Сигма» снизилась на 15 % по сравнению с сентябрём, а в ноябре — ещё на 20 % по сравнению с октябрём и составила 136 рублей. Сколько рублей стоила одна акция в сентябре?

20. а) Кружка стоит 120 рублей. Какое наибольшее число таких кружек можно будет купить на 500 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25 %?

б) Тарелка стоит 60 рублей. Какое наибольшее число таких тарелок можно будет купить на 500 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 15 %?

21. а) Магазин закупает тарелки по оптовой цене 20 рублей за штуку и продаёт с наценкой 30 %. Какое наибольшее число таких тарелок можно купить в этом магазине на 300 рублей?

б) Оптовая цена учебника 140 рублей. Розничная цена на 50 % выше оптовой. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по розничной цене на 5000 рублей?

22. а) В магазине «Сделай сам» мебель продаётся в разобранном виде. Если покупателю необходимо, он может купить собранную мебель, но в таком случае он должен оплатить сборку, которая составляет 15 % от стоимости покупки. Сколько стоит собранный кухонный шкаф, если без сборки он продаётся за 3200 рублей?

б) В магазине «Сделай сам» мебель продаётся в разобранном виде. Если покупателю необходимо, он может купить собранную мебель, но в таком случае он должен оплатить сборку, которая составляет 10 % от стоимости покупки. Сколько стоит собранный гардероб, если без сборки он продаётся за 3800 рублей?

23. а) Железнодорожный билет для взрослого стоит 960 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50 % от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 13 школьников и двух взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

б) Железнодорожный билет для взрослого стоит 1600 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50 % от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 24 школьников и трёх взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

24. а) Брюки стоят 3000 рублей, а рубашка — 1200 рублей. На сколько процентов рубашка дешевле брюк?

б) Зубная паста стоит 120 рублей, а стиральный порошок — 174 рубля. На сколько процентов стиральный порошок дороже зубной пасты?

25. а) Килограмм груш дороже килограмма яблок на 25 %. На сколько процентов килограмм яблок дешевле килограмма груш?

б) Килограмм яблок дешевле килограмма груш на 60 %. На сколько процентов килограмм груш дороже килограмма яблок?

26. а) Себестоимость изделия снизилась в 2,5 раза. На сколько процентов снизилась себестоимость?

б) Себестоимость изделия снизилась в 1,25 раза. На сколько процентов снизилась себестоимость?

27. а) Шесть килограммов огурцов стоят столько же, сколько пять килограммов помидоров. На сколько процентов один килограмм помидоров дороже одного килограмма огурцов?

б) Семь килограммов огурцов стоят столько же, сколько четыре килограмма помидоров. На сколько процентов один килограмм помидоров дороже одного килограмма огурцов?

28. а) Три рубашки дешевле куртки на 10%. На сколько процентов четыре рубашки дороже куртки?

б) Четыре рубашки дешевле куртки на 4%. На сколько процентов пять рубашек дороже куртки?

29. а) Брюки дороже рубашки на 25% и дешевле пиджака на 20%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

б) Брюки дороже рубашки на 20% и дешевле пиджака на 46%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

30. а) Брюки дороже рубашки на 20%, а пиджак дороже рубашки на 44%. На сколько процентов пиджак дороже брюк?

б) Брюки дороже рубашки на 30%, а пиджак дороже рубашки на 56%. На сколько процентов пиджак дороже брюк?

31. а) Килограмм груш дороже килограмма яблок на 15%. Килограмм яблок дороже килограмма слив на 20%. На сколько процентов килограмм груш дороже килограмма слив?

б) Килограмм груш дороже килограмма яблок на 10%. Килограмм яблок дороже килограмма слив на 20%. На сколько процентов килограмм груш дороже килограмма слив?

32. а) Куртка дороже пиджака на четверть, а пиджак дороже рубашки в 4 раза. На сколько процентов рубашка дешевле куртки?

б) Рубашка дешевле пиджака в 3 раза, куртка дороже пиджака на треть. На сколько процентов рубашка дешевле куртки?

33. а) Четыре килограмма яблок стоят столько же, сколько три килограмма груш, а пять килограммов груш стоят столько же, сколько два килограмма черешни. На сколько процентов один килограмм яблок дешевле одного килограмма черешни?

б) Пять килограммов яблок стоят столько же, сколько четыре килограмма груш, а десять килограммов груш стоят столько же, сколько семь килограммов черешни. На сколько процентов один килограмм яблок дешевле одного килограмма черешни?

34. а) Во время распродажи Витя купил 6 одинаковых по цене футболок со скидкой 60 %. Сколько таких футболок он мог бы купить на ту же сумму, если бы скидка составила 70 %?

б) Во время распродажи Ваня купил 5 одинаковых по цене футболок со скидкой 40 %. Сколько таких футболок он мог бы купить на ту же сумму, если бы скидка составила 50 %?

35. а) До распродажи брюки стоили дешевле пиджака на 60 % и дороже рубашки на 300 %. В период распродажи цена пиджака снизилась на 20 %, а цена брюк — на 25 %. Витя купил пиджак и брюки во время распродажи. Сколько рубашек он мог купить на ту же сумму, если цена рубашки не изменилась?

б) До распродажи брюки стоили дешевле пиджака на 40 % и дороже рубашки на 200 %. В период распродажи цена пиджака снизилась на 30 %, а цена брюк — на 50 %. Ваня купил пиджак и брюки во время распродажи. Сколько рубашек он мог купить на ту же сумму, если цена рубашки не изменилась?

36. а) На сколько рублей пиджак дороже брюк, если известно, что комплект из брюк и пиджака, в котором стоимость пиджака снижена на 20 %, а стоимость брюк — на 25 %, на 150 рублей дороже комплекта, в котором стоимость пиджака снижена на 25 %, а стоимость брюк — на 20 %?

б) На сколько рублей пиджак дороже брюк, если известно, что комплект из брюк и пиджака, в котором стоимость пиджака снижена на 30 %, а стоимость брюк — на 40 %, на 300 рублей дороже комплекта, в котором стоимость пиджака снижена на 40 %, а стоимость брюк — на 30 %?

37. а) Известно, что набор из 6 сладиков, 5 кисликов и 4 мнямников дороже набора из 3 сладиков, 4 кисликов и 5 мнямников на 70 %. На сколько процентов набор из 4 сладиков, 5 кисликов и 6 мнямников дороже набора из 3 сладиков, 4 кисликов и 5 мнямников?

б) Известно, что набор из 4 сладиков, 5 кисликов и 6 мнямников дороже набора из 3 сладиков, 4 кисликов и 5 мнямников на 30 %. На сколько процентов набор из 6 сладиков, 5 кисликов и 4 мнямников дороже набора из 3 сладиков, 4 кисликов и 5 мнямников?

38. а) Банковский вклад в мае увеличился на 30 %, а в июне уменьшился на 30 %, после чего на счету оказалось 27 300 рублей. Сколько рублей составлял вклад на конец апреля?

б) Банковский вклад в мае увеличился на 20 %, а в июне уменьшился на 20 %, после чего на счету оказалось 86 400 рублей. Сколько рублей составлял вклад на конец апреля?

39. а) В городе N живёт 300 000 жителей. Среди них 20 % детей и подростков. Среди взрослых 35 % не работает (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т. п.). Сколько взрослых жителей города работает?

б) В городе N живёт 12 000 жителей. Среди них 25 % детей и подростков. Среди взрослых 30 % не работает (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т. п.). Сколько взрослых жителей города работает?

40. а) В школе 800 учеников, из них 30 % — ученики начальной школы. Среди учеников средней и старшей школы 20 % изучают немецкий язык. Сколько учеников в школе изучают немецкий язык, если в начальной школе немецкий язык не изучается?

б) В школе 1200 учеников, из них — 35 % ученики начальной школы. Среди учеников средней и старшей школы 25 % изучают немецкий язык. Сколько учеников в школе изучают немецкий язык, если в начальной школе немецкий язык не изучается?

41. а) Среди 160 000 жителей города 55 % не интересуется футболом. Среди футбольных болельщиков 90 % смотрело по телевизору финал Лиги чемпионов. Сколько жителей города смотрело этот матч?

б) Среди 40 000 жителей города 60 % не интересуется футболом. Среди футбольных болельщиков 80 % смотрело по телевизору финал Лиги чемпионов. Сколько жителей города смотрело этот матч?

42. а) В кафе действует следующее правило: на ту часть заказа, которая превышает 1000 рублей, действует скидка 25 %. После игры в футбол студенческая компания из 20 человек сделала в кафе заказ на 3400 рублей. Все платят поровну. Сколько рублей заплатит каждый?

б) В кафе действует следующее правило: на ту часть суммы заказа, которая превышает 1000 рублей, действует скидка 20 %. После игры в футбол студенческая компания из 14 человек сделала в кафе заказ на 2375 рублей. Все платят поровну. Сколько рублей заплатит каждый?

43. а) Тетрадь стоит 24 рубля. Сколько рублей заплатил покупатель за 60 тетрадей, если при покупке более 50 тетрадей магазин делает скидку 10 % от стоимости всей покупки?

б) Пирожок в кулинарии стоит 12 рублей. При покупке более 30 пирожков продавец делает скидку 5 % от стоимости всей покупки. Покупатель купил 40 пирожков. Сколько рублей он заплатил за покупку?

44. а) Студент получил свой первый гонорар в размере 1500 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет роз для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество роз сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, розы стоят 120 рублей за штуку и букет должен состоять из нечётного числа цветов?

б) Студент получил свой первый гонорар в размере 1300 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет роз для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество роз сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, розы стоят 90 рублей за штуку и букет должен состоять из нечётного числа цветов?

45. а) При оплате услуг через платёжный терминал взимается комиссия 3%. Терминал принимает суммы, кратные 10 рублям. Месячная плата за интернет составляет 400 рублей. Какую минимальную сумму нужно заплатить через терминал, чтобы на счету фирмы, предоставляющей интернет-услуги, оказалась сумма, не меньшая 400 рублей?

б) При оплате услуг через платёжный терминал взимается комиссия 5%. Терминал принимает суммы, кратные 10 рублям. Аня хочет положить на счёт своего мобильного телефона не меньше 300 рублей. Какую минимальную сумму она должна заплатить через данный терминал?

46. а) Оплата за использование природного газа составляла 24 рубля на одного человека в месяц. С нового года она повысилась на 25%. Сколько рублей должна заплатить семья из четырёх человек за использование природного газа за три месяца в новом году?

б) Оплата за использование природного газа составляла 20 рублей на одного человека в месяц. С нового года она повысилась на 20%. Сколько рублей должна заплатить семья из трёх человек за использование природного газа за три месяца в новом году?

47. а) Хозяин овощной лавки купил на оптовом рынке 100 кг помидоров и заплатил 4000 рублей. За время хранения в лавке 10% помидоров испортилось, и хозяин не смог их продать. Остальные помидоры он продал по цене 70 рублей за килограмм. Какую прибыль он получил?

б) Хозяин овощной лавки купил на оптовом рынке 200 кг помидоров и заплатил 5000 рублей. За время хранения в лавке 15% помидоров испортилось, и хозяин не смог их продать. Остальные помидоры он продал по цене 60 рублей за килограмм. Какую прибыль он получил?

48. а) Под строительную площадку отвели участок прямоугольной формы. При утверждении плана застройки ширину участка уменьшили на 20%, а длину увеличили на 20%. На сколько процентов уменьшилась площадь участка после утверждения плана застройки?

б) Под строительную площадку отвели участок прямоугольной формы. При утверждении плана застройки ширину участка уменьшили на 20%, а длину увеличили на 10%. На сколько процентов уменьшилась площадь участка после утверждения плана застройки?

49. а) В 2008 году в городском квартале проживало 40 000 человек. В 2009 году в результате строительства новых домов число жителей выросло на 8%, а в 2010 году — на 9% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

б) В 2011 году в городском квартале проживало 30 000 человек. В 2012 году в результате строительства новых домов число жителей выросло на 7%, а в 2013 году — на 6% по сравнению с 2012 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2013 году?

50. а) Стены здания снаружи решено облицевать плиткой. Здание имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Его длина, ширина и высота равны 25 м, 15 м и 10 м соответственно. Суммарная площадь окон и входных дверей составляет 10% от площади стен. Одного ящика плитки хватает на облицовку 3 кв. м, ящики с плиткой продаются только целиком. Плитку купили с запасом в 10% от площади облицовки. Сколько ящиков плитки было куплено?

б) Стены здания снаружи решено облицевать плиткой. Здание имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Его длина, ширина и высота равны 30 м, 15 м и 10 м соответственно. Суммарная площадь окон и входных дверей составляет 20% от площади стен. Одного ящика плитки хватает на облицовку 6 кв. м, ящики с плиткой продаются только целиком. Плитку купили с запасом в 10% от площади облицовки. Сколько ящиков плитки было куплено?

51. а) Шкатулка и её крышка имеют форму прямоугольного параллелепипеда. Длина, ширина и глубина шкатулки равны соответственно 20 см, 15 см и 10 см. Высота крышки равна 2 см. Для обивки изнутри шкатулки и её крышки приобрели кусок атласа. Найдите площадь этого куска (в квадратных сантиметрах), если он был куплен с запасом в 10% от обиваемой площади.

б) Шкатулка и её крышка имеют форму прямоугольного параллелепипеда. Длина, ширина и глубина шкатулки равны соответственно 30 см, 20 см и 15 см. Высота крышки равна 3 см. Для обивки изнутри шкатулки и её крышки приобрели кусок бархата. Найдите площадь этого куска (в квадратных сантиметрах), если он был куплен с запасом в 10% от обиваемой площади.

52. а) Комната имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Её длина и ширина равны 6 м и 3 м соответственно, высота потолка равна 3 м. Ширина дверного проёма комнаты равна 1 м, высота — 2 м. В комнате два одинаковых квадратных окна шириной 1,5 м каждое. Для оклейки стен комнаты обоями необходимо купить их с запасом в 10% от оклеиваемой площади. Сколько рулонов обоев нужно купить, если площадь одного рулона равна 5 кв. м и рулоны продаются только целиком?

б) Комната имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Её длина и ширина равны 7 м и 4 м соответственно, высота потолка равна 3,5 м. Ширина дверного проёма комнаты равна 1 м, высота — 2 м. В комнате два одинаковых квадратных окна шириной 1,5 м каждое. Для оклейки стен комнаты обоями необходимо купить их с запасом в 10% от оклеиваемой площади. Сколько рулонов обоев нужно купить, если площадь одного рулона равна 5 кв. м и рулоны продаются только целиком?

53. а) Проходная комната имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Её длина и ширина равны 7 м и 4 м соответственно, высота потолка равна 3 м. Ширина каждого из двух дверных проёмов комнаты равна 1 м, высота 2 м. В комнате два одинаковых квадратных окна шириной 1,5 м каждое. Для оклейки стен комнаты обоями необходимо купить их с запасом в 10% от оклеиваемой площади. Сколько рулонов обоев нужно купить, если площадь одного рулона равна 6 кв. м и рулоны продаются только целиком?

б) Проходная комната имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Её длина и ширина равны 8 м и 4 м соответственно, высота потолка равна 3 м. Ширина каждого из двух дверных проёмов комнаты равна 1 м, высота 2 м. В комнате два одинаковых квадратных окна шириной 1,5 м каждое. Для оклейки стен комнаты обоями необходимо купить их с запасом в 10% от оклеиваемой площади. Сколько рулонов обоев нужно купить, если площадь одного рулона равна 6 кв. м и рулоны продаются только целиком?

54. а) Молодая семья состоит из двух человек: мужа и жены. Доход семьи складывается из их зарплат. Если бы зарплата мужа увеличилась втрое, доход семьи вырос бы на 108%. Сколько процентов дохода семьи составляет зарплата жены?

б) Молодая семья состоит из двух человек: мужа и жены. Доход семьи складывается из их зарплат. Если бы зарплата мужа увеличилась вчетверо, доход семьи вырос бы на 174%. Сколько процентов дохода семьи составляет зарплата жены?

55. а) Семья состоит из трёх человек: мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

б) Семья состоит из трёх человек: мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась втрое, общий доход семьи вырос бы на 118%. Если бы стипендия дочери уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 7%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

56. а) Численность волков в двух заповедниках в 2009 году составляла 220 особей. Через год обнаружили, что в первом заповеднике численность волков возросла на 10%, а во втором — на 20%. В результате общая численность волков в двух заповедниках составила 250 особей. Сколько волков было в первом заповеднике в 2009 году?

б) Численность волков в двух заповедниках в 2009 году составляла 250 особей. Через год обнаружили, что в первом заповеднике численность волков возросла на 30%, а во втором — на 20%. В результате общая численность волков в двух заповедниках составила 315 особей. Сколько волков было в первом заповеднике в 2009 году?

57. а) Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от цены прошлого года. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 8000 рублей, он через два года был продан за 6480 рублей.

б) Цена музыкального центра в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от цены прошлого года. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена музыкального центра, если, выставленный на продажу за 10 000 рублей, он через два года был продан за 7225 рублей.

58. а) В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 16% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

б) В среду акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в четверг подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 9% дешевле, чем при открытии торгов в среду. На сколько процентов подорожали акции компании в среду?

59. а) Митя, Антон, Гоша и Борис учредили компанию с уставным капиталом 200 000 рублей. Митя внёс 14% уставного капитала, Антон — 42 000 рублей, Гоша — 0,12 уставного капитала, а оставшуюся часть уставного капитала внёс Борис. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесённому в уставной капитал вкладу. Сколько рублей от прибыли в 1 000 000 рублей причитается Борису?

б) Петя, Жора, Гриша и Ваня учредили компанию с уставным капиталом 300 000 рублей. Петя внёс 17% уставного капитала, Жора — 48 000 рублей, Гриша — 0,14 уставного капитала, а оставшуюся часть уставного капитала внёс Ваня. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесённому в уставной капитал вкладу. Сколько рублей от прибыли в 500 000 рублей причитается Ване?

60. а) Объёмы ежемесячной добычи газа на первом, втором и третьем месторождениях относятся как $3 : 8 : 13$. Планируется уменьшить месячную добычу газа на первом месторождении на 13% и на втором — тоже на 13%. На сколько процентов нужно увеличить месячную добычу газа на третьем месторождении, чтобы суммарный объём добываемого за месяц газа не изменился?

б) Объёмы ежемесячной добычи газа на первом, втором и третьем месторождениях относятся как $7 : 6 : 14$. Планируется уменьшить месячную добычу газа на первом месторождении на 14% и на втором — тоже на 14%. На сколько процентов нужно увеличить месячную добычу газа на третьем месторождении, чтобы суммарный объём добываемого за месяц газа не изменился?

61. а) В магазине два отдела: бакалеи и гастрономии. Если бы дневная выручка отдела гастрономии сократилась вдвое, дневная выручка магазина уменьшилась бы на 34%. На сколько процентов увеличилась бы дневная выручка магазина, если бы дневная выручка отдела бакалеи выросла втрое?

б) В магазине два отдела: трикотажа и обуви. Если бы дневная выручка отдела трикотажа увеличилась втрое, дневная выручка магазина выросла бы на 76%. На сколько процентов уменьшилась бы дневная выручка магазина, если бы дневная выручка отдела обуви сократилась вдвое?

62. а) Процент числа учеников восьмого класса, принявших участие в олимпиаде, заключён в пределах от 96,8% до 97,2%. Найдите наименьшее возможное число учеников этого класса.

б) Процент числа школьников, получивших пятёрку на экзамене по математике, заключён в пределах от 1,7 % до 2,3 %. Найдите наименьшее возможное число школьников, сдававших экзамен по математике.

63. а) Затраты на производство одного микропроцессора составляют 68 евроцентов (один евро равен ста евроцентам). Испытания успешно проходит только 2 % продукции, а остальное идёт в брак. Компания включает затраты на производство всех процессоров в себестоимость исправных процессоров. Найдите цену (в евро) одного исправного процессора, поступившего в продажу, если компания получает от его продажи 25 % прибыли.

б) Затраты на производство одного микропроцессора составляют 75 евроцентов (один евро равен ста евроцентам). Испытания успешно проходит только 5 % продукции, а остальное идёт в брак. Компания включает затраты на производство всех процессоров в себестоимость исправных процессоров. Найдите цену (в евро) одного исправного процессора, поступившего в продажу, если компания получает от его продажи 10 % прибыли.

Диагностическая работа 3

Вариант 1

1. Расходы на одну из статей городского бюджета составляют 23,5 %. Выразите эту часть десятичной дробью.

2. Стоимость проезда в электропоезде составляет 240 рублей. Школьникам предоставляется скидка 50 %. Сколько рублей будет стоить проезд для 3 взрослых и 8 школьников?

3. Площадь земель крестьянского хозяйства, отведённая под посадку сельскохозяйственных культур, составляет 44 гектара и распределена между зерновыми и овощными культурами в отношении 7 : 4. Сколько гектаров занимают зерновые культуры?

4. Во время хранения картофеля на овощной базе вредители испортили 28 % урожая. Сколько килограммов картофеля хранилось на базе, если неиспорченного картофеля осталось 9360 кг?

5. Налог на доходы составляет 13 % от заработной платы. Сколько рублей составляет заработная плата Павла Сергеевича до вычета налогов, если после вычета у него остаётся 21 750 рублей?

6. Четыре рубашки дешевле куртки на 20 %. На сколько процентов шесть рубашек дороже куртки?

7. Под строительную площадку отвели участок прямоугольной формы. При утверждении плана застройки его длину и ширину увеличили на 20 %. На сколько процентов увеличилась площадь участка после утверждения плана застройки?

8. Стены здания снаружи решено облицевать плиткой. Здание имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Его длина, ширина и высота равны 23 м, 17 м и 10 м соответственно. Суммарная площадь окон и входных дверей составляет 10 % от площади стен. Одного ящика плитки хватает на облицовку 4 кв. м, ящики с плиткой продаются только целиком. Плитку купили с запасом в 10 % от площади облицовки. Сколько ящиков плитки было куплено?

9. В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 36 % дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

10. Известно, что набор из 5 сладиков, 4 кисликов и 3 мнямников дороже набора из 3 сладиков, 4 кисликов и 5 мнямников на 60%. На сколько процентов набор из 1 сладика, 2 кисликов и 3 мнямников дешевле набора из 3 сладиков, 4 кисликов и 5 мнямников?

Вариант 2

1. Расходы на одну из статей городского бюджета составляют 15,7%. Выразите эту часть десятичной дробью.

2. Стоимость проезда в электропоезде составляет 170 рублей. Школьникам предоставляется скидка 50%. Сколько рублей будет стоить проезд для 2 взрослых и 10 школьников?

3. Площадь земель крестьянского хозяйства, отведённая под посадку сельскохозяйственных культур, составляет 32 гектара и распределена между зерновыми и овощными культурами в отношении 3 : 1. Сколько гектаров занимают зерновые культуры?

4. Во время хранения картофеля на овощной базе вредители испортили 27% урожая. Сколько килограммов картофеля хранилось на базе, если неиспорченного картофеля осталось 8760 кг?

5. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Сколько рублей составляет заработная плата Павла Сергеевича до вычета налогов, если после вычета у него остаётся 13 050 рублей?

6. Четыре рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов пять рубашек дороже куртки?

7. Под строительную площадку отвели участок прямоугольной формы. При утверждении плана застройки ширину участка уменьшили на 20%, а длину уменьшили на 10%. На сколько процентов уменьшилась площадь участка после утверждения плана застройки?

8. Стены здания снаружи решено облицевать плиткой. Здание имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Его длина, ширина и высота равны 28 м, 22 м и 10 м соответственно. Суммарная площадь окон и входных дверей составляет 10% от площади стен. Одного ящика плитки хватает на облицовку 10 кв. м, ящики с плиткой продаются только целиком. Плитку купили с запасом в 10% от площади облицовки. Сколько ящиков плитки было куплено?

9. В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 49% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

10. Известно, что набор из 3 сладиков, 2 кисликов и 1 мнямника дешевле набора из 1 сладика, 2 кисликов и 3 мнямников на 40%. На сколько процентов набор из 2 сладиков, 3 кисликов и 4 мнямников дороже набора из 4 сладиков, 3 кисликов и 2 мнямников?

§ 4. Задачи о вкладах и кредитовании (банковских процентах)

Задачи на банковские проценты можно условно разделить на две группы. К первой отнесём задачи на проценты по вкладам (депозитам), ко второй — задачи о кредитах.

4.1. Проценты по вкладам (депозитам)

Для решения задач на проценты по вкладам достаточно скрупулёзно проработать материал предыдущего параграфа, поскольку эти задачи отличаются от задач предыдущего параграфа только сюжетом. В задачах на проценты по вкладам речь идёт либо об однократном изменении величины вклада на определённое число процентов (простые проценты), либо о последовательном изменении величины вклада через (как правило) равные промежутки времени на определённое число процентов (сложные проценты). В последнем случае каждый раз начиная со второго проценты начисляются на сумму, полученную после предыдущего начисления процентов. Тем самым задачи на проценты по вкладам представляют собой типичные задачи на последовательное изменение некоторой величины на определённое число процентов. Если S_0 — сумма вклада, то при начислении $r\,\%$ на неё получим сумму $S_1 = S_0\left(1+\frac{r}{100}\right)$. При начислении $r\,\%$ на сумму S_1 получим $S_2 = S_1\left(1+\frac{r}{100}\right) = S_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$ и т. д. После n-го начисления процентов получим сумму

$$S_n = S_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^n.$$

Если при каждом начислении проценты меняются и составляют соответственно $r_1\,\%$, $r_2\,\%$, …, $r_n\,\%$, то

$$S_n = S_0\left(1+\frac{r_1}{100}\right)\left(1+\frac{r_2}{100}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{r_n}{100}\right).$$

Отметим ещё, что обычно в предложениях по вкладам (депозитам) речь идёт об определённом проценте годовых. Если этот процент начисляется раз в год, то проблем нет, соответствующие формулы приведены выше. Но в некоторых случаях речь может идти о вкладах с пролонгацией (продлением) через определённые промежутки времени (как правило, 1, 3 или 6 месяцев). В этом случае формулы расчёта процентов на депозиты меняются. При однократном начислении процентов через m дней на вклад S_0 под r % годовых получим сумму

$$S = S_0\left(1+\frac{r}{100}\cdot\frac{m}{365}\right) \quad \text{(для обычного года)}$$

$$\text{или} \quad S = S_0\left(1+\frac{r}{100}\cdot\frac{m}{366}\right) \quad \text{(для високосного года),}$$

т. е. годовой процент умножается на долю, которую срок вклада составляет по отношению к году (в обычном году 365 дней, в високосном году — 366 дней).

Сумма δ начисленных процентов будет равна соответственно $\frac{S_0}{36\,500}$ для обычного года или $\frac{S_0}{36\,600}$ для високосного года. При реальных расчётах полученные величины округляются с заданной точностью (обычно так, чтобы можно было вычислить искомую сумму с точностью до копеек).

Пример 1. В не високосном году клиент открыл вклад в банке 1 сентября сроком на 1 месяц под 12 % годовых. Сколько рублей окажется на счёте вклада 1 октября того же года, если сумма вклада равна 100 000 рублей?

Решение. Воспользуемся формулой

$$S = S_0\left(1+\frac{r}{100}\cdot\frac{m}{365}\right),$$

где $S_0 = 100\,000$, $r = 12$, а $m = 30$ (поскольку в сентябре 30 дней). Получим $S = 100\,000\left(1+0{,}12\cdot\frac{30}{365}\right)$. Число в скобках с точностью до 7 знаков после запятой равно 1,0098630, поэтому $S = 100986{,}30$ (т. е. 100 986 рублей 30 копеек).

Ответ. 100 986,30.

Если проценты на депозит начисляются несколько раз через равные промежутки времени и каждый раз зачисляются на вклад, то сумма вклада по истечении n таких промежутков будет равна

$$S = S_0\left(1+\frac{r}{100}\cdot\frac{m}{365}\right)^n.$$

На практике банки варьируют величину m в соответствии с реальным числом дней в каждом конкретном месяце (28, 29, 30 или 31 день). Для приближённых расчётов может использоваться упрощённая модель, в соответствии с которой один месяц считается равным $\frac{1}{12}$ части года. Тогда если речь идёт о вкладе на 3 месяца под r % годовых с последующей автоматической пролонгацией в течение нескольких раз, то каждые три месяца сумма на счёте вклада будет увеличиваться на $\frac{r}{4}$ % (так как три месяца составляют четверть года) и после

n-й пролонгации сумма на счёте вклада составит $S_n = S_0\left(1 + \frac{r}{400}\right)^n$. Аналогично при пролонгации каждые полгода сумма на счёте вклада после n-й пролонгации составит $S_n = S_0\left(1 + \frac{r}{200}\right)^n$. Найденные значения обычно также округляются так, чтобы вычислить искомую сумму с точностью до копеек.

Пример 2. Какой вклад выгоднее: первый — на 1 год под 13% годовых, или второй — на 3 месяца (с автоматической пролонгацией каждые три месяца в течение года) под 12% годовых? При расчётах считайте, что один месяц равен $\frac{1}{12}$ части года.

Решение. Пусть S_0 — сумма вклада. Тогда по условиям первого депозита вкладчик через год получит $1{,}13 \cdot S_0$, а по условиям второго депозита он получит $(1{,}03)^4 \cdot S_0 = 1{,}12550881 \cdot S_0$, т. е. прибавка составит примерно 12,55%, а значит, первый вклад выгоднее.

Ответ. Первый.

Отметим, что задачи на проценты по вкладам относятся к довольно простым и на ЕГЭ по математике чаще встречаются среди заданий с кратким ответом. При этом громоздкие вычисления, подобные тем, что использовались в примерах 1—2, обычно не предполагаются.

4.2. Проценты по кредитам

Задачи на кредитование считаются более сложными по сравнению с задачами на вклады. В варианте ЕГЭ по математике это будет задание, требующее развёрнутого решения. Такие задачи появились на экзамене в последние годы и обычно вызывают значительные затруднения у очень многих выпускников, хотя в большинстве случаев их решение требует последовательного выполнения арифметических действий, а значит, аккуратности и определённых вычислительных навыков.

При начислении процентов по кредиту обычно используются две схемы: схема с дифференцированными (неравными) платежами и схема с аннуитетными (равными) платежами. Эти схемы отличаются принципами формирования и величиной обязательных платежей.

Дифференцированные платежи

Пусть S_0 — сумма кредита. Для кредита с дифференцированными платежами процент и периодичность обязательных платежей фиксируются (например, ежегодные, ежеквартальные или помесячные платежи), а фиксированный процент начисляется на ещё не выплаченную к моменту очередного обязательного платежа часть кредита (долга). В этом случае каждый год (или каждый платёжный период) сумма выплат уменьшается, поскольку она состоит из фиксированной части $\frac{S_0}{n}$ (где n — число платежей, равное числу платёжных периодов) и процентов, начисляемых на остаток долга по кредиту, величина которого каждый год (или каждый платёжный период) уменьшается на $\frac{S_0}{n}$. Таким образом, при схеме с дифференцированными платежами клиент возвращает банку до истечения каждого платёжного периода $\frac{1}{n}$ часть суммы кредита и проценты от ещё не выплаченной на начало этого платёжного периода части кредита.

Рассмотрим сначала базовую (упрощённую) задачу на проценты по кредиту с дифференцированными платежами. Пусть кредит берётся под k % годовых на n лет. Это означает, что клиент должен вернуть банку сумму кредита (долг) и проценты за пользование кредитом на следующих условиях: каждый год клиент возвращает банку $\frac{1}{n}$ часть суммы долга (кредита) и проценты за пользование кредитом, начисляемые ежегодно на остаток долга. Таким образом,
за первый год пользования кредитом сумма δ_1 процентов составит

$$\delta_1 = S_0 \cdot \frac{k}{100} = \frac{kS_0}{100};$$

за второй год пользования кредитом сумма δ_2 процентов составит

$$\delta_2 = \left(S_0 - \frac{S_0}{n}\right) \cdot \frac{k}{100} = \frac{kS_0(n-1)}{100n};$$

за третий год пользования кредитом сумма δ_3 процентов составит

$$\delta_3 = \left(S_0 - \frac{2S_0}{n}\right) \cdot \frac{k}{100} = \frac{kS_0(n-2)}{100n}$$

и т. д.;
за последний год пользования кредитом сумма δ_n процентов составит

$$\delta_n = \left(S_0 - \frac{(n-1)S_0}{n}\right) \cdot \frac{k}{100} = \frac{kS_0}{100n}.$$

Общая сумма δ всех начисленных процентов (переплата) находится по формуле $\delta = \delta_1 + \ldots + \delta_n$, откуда

$$\delta = \frac{kS_0}{100} + \frac{kS_0(n-1)}{100n} + \frac{kS_0(n-2)}{100n} + \ldots + \frac{kS_0}{100n}.$$

Вынесем за скобки общий множитель $\frac{kS_0}{100n}$. Получим

$$\delta = \frac{kS_0}{100n}\big(n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1\big).$$

Сумма $n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1$ легко вычисляется по формуле $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ суммы S_n первых n членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$. В данном случае $a_1 = 1$, $a_n = n$. Поэтому $S_n = \frac{n+1}{2} \cdot n$. Таким образом, $\delta = \frac{kS_0}{100n} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot n$, откуда

$$\delta = \frac{k(n+1)}{200} S_0. \tag{1}$$

Общая сумма S всех выплат по кредиту равна сумме кредита и сумме начисленных процентов: $S = S_0 + \delta$, т. е. $S = S_0 + \frac{k(n+1)}{200} S_0$, откуда

$$S = \frac{S_0(k(n+1) + 200)}{200}. \tag{2}$$

Пример 3. Виктор взял в банке кредит сроком на 4 года под 16 % годовых. На сколько процентов сумма всех выплат банку окажется больше суммы кредита, если досрочное погашение кредита не предполагается?

Решение. Пусть S_0 — сумма кредита. Тогда $\delta = \frac{16(4+1)}{200} S_0 = 0{,}4 \cdot S_0$. Значит, сумма всех выплат составит $0{,}4 \cdot S_0 + S_0 = 1{,}4 \cdot S_0$, т. е. окажется на 40 % больше суммы кредита.

Ответ. 40.

Заметим, что приведённая модель является упрощённой. На практике банки учитывают каждый день кредитования, а платежи, как правило, являются ежемесячными. Для решения примера 3 помимо перерасчёта процентов на условиях ежемесячных платежей пришлось бы учитывать и то, что один из четырёх лет окажется високосным. Примеры на реальные схемы кредитования будут рассмотрены позже, а пока приведём ещё два примера, связанные с упрощённой схемой (такие задачи обычно и встречаются в реальных вариантах ЕГЭ по математике).

Пример 4. Иван планирует взять ипотечный кредит (кредит на покупку квартиры под залог квартиры) в банке на несколько лет под 10 % годовых на следующих условиях: по истечении каждого года пользования кредитом он должен возвращать банку часть кредита, равную сумме кредита, делённой на число лет пользования кредитом (погашать кредит), и выплачивать банковские проценты за пользование кредитом в размере 10 % от не погашенной к моменту очередного платежа суммы кредита. Так, если кредит взят на 5 лет, то за первый год пользования кредитом Иван должен выплатить пятую часть суммы кредита и 10 % от всей суммы кредита, за второй год — пятую часть суммы кредита и 10 % от непогашенной суммы кредита, т. е. от $\frac{4}{5}$ суммы кредита, и т. п. При оформлении кредита банк предложил Ивану выплачивать кредит ежемесячными равными платежами по следующей схеме: сумма кредита и сумма процентов за всё время пользования кредитом суммируются и делятся на число месяцев пользования кредитом. Иван принял предложение банка. Известно, что сумма ежемесячного платежа равна 30 000 рублей, а сумма начисленных процентов оказалась равна сумме кредита.

а) На сколько лет был взят кредит?

б) Чему равна сумма кредита (в рублях)?

Решение. Пусть сумма кредита равна S_0, годовые составляют $k\,\%$, число лет кредита равно n. Тогда сумма δ выплат по процентам равна

$$\delta = \frac{k(n+1)}{200} S_0.$$

а) По условию сумма процентов равна сумме кредита. Следовательно, $\frac{k(n+1)}{200} S_0 = S_0$, откуда $k(n+1)=200$. Поскольку $k=10$, получим, что $n=19$.

б) Сумма l ежемесячного платежа по предложенной банком схеме находится по формуле

$$l = \frac{S_0(k(n+1)+200)}{2400n}, \quad \text{откуда} \quad S_0 = \frac{2400nl}{k(n+1)+200}.$$

Так как $k=10$, $n=19$, $l=30\,000$, находим, что

$$S_0 = \frac{2400nl}{400} = 6nl = 6\cdot 19\cdot 30\,000 = 3\,420\,000 \text{ рублей.}$$

Ответ. а) 19; б) 3 420 000.

Как отмечалось выше, в примере 4 также использовалась упрощённая, да ещё и смешанная схема: расчёт проводился для кредита с дифференцированными платежами, а условия погашения были как для кредита с равными (аннуитетными) ежемесячными платежами.

Рассмотрим теперь ещё одно задание из реального варианта ЕГЭ по математике. Эти задания иногда сформулированы так, что сразу трудно догадаться, о какой схеме идёт речь. Главное здесь — внимательное чтение и анализ условия, тогда задачу удаётся решить достаточно быстро.

Пример 5. 15 января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

• 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\,\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

• со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

• 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30 % больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение. Пусть сумма кредита равна S_0. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно, т. е. на $\frac{1}{19}$ часть, поэтому суммы долга за каждый месяц (до начисления процентов) составят (в порядке убывания)

$$S_0,\ \frac{18S_0}{19},\ \ldots,\ \frac{2S_0}{19},\ \frac{S_0}{19}.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на r %, поэтому последовательность размеров платежей по процентам будет следующей:

$$\frac{r}{100}\cdot S_0,\quad \frac{r}{100}\cdot\frac{18S_0}{19},\quad \ldots,\quad \frac{r}{100}\cdot\frac{2S_0}{19},\quad \frac{r}{100}\cdot\frac{S}{19}.$$

Ежемесячный платёж состоит из фиксированной суммы $\frac{S_0}{19}$ и суммы платежа по процентам. Ежемесячные платежи составят соответственно

$$\frac{S_0}{19}+\frac{r}{100}\cdot S_0,\quad \frac{S_0}{19}+\frac{r}{100}\cdot\frac{18S_0}{19},\quad \ldots,\quad \frac{S_0}{19}+\frac{r}{100}\cdot\frac{2S_0}{19},\quad \frac{S_0}{19}+\frac{r}{100}\cdot\frac{S}{19}.$$

Общая сумма выплат будет равна $S=S_0+\frac{rS_0}{1900}(19+18+\ldots+1)$, откуда

$$S=S_0+\frac{rS_0}{1900}\frac{1+19}{2}\cdot 19=S_0+\frac{rS_0}{10}.$$

По условию $S=1{,}3S_0$. Следовательно, $1{,}3S_0=S_0+\frac{rS_0}{10}$, откуда $\frac{r}{10}+1=$ $=1{,}3$, и $r=3$.

Ответ. 3.

Как видим, эта задача оказалась типичной задачей на кредит с дифференцированными платежами по упрощённой схеме. Отметим, что её формулировка не слишком удачна в части условий кредитования и у некоторых экзаменуемых трудности в решении могут быть обусловлены лингвистикой, а не математикой: ведь в задаче не указано, часть какого долга (первоначального или с начисленными процентами) берётся для расчёта выплат. Более удачными формулировками соответствующих условий возврата кредита являются следующие:

• 1-го числа каждого месяца на ещё не выплаченную часть кредита начисляется r %, т. е. к ещё не выплаченной части кредита добавляется r % от этой части;

• со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить $\frac{1}{19}$ часть долга и проценты, начисленные 1-го числа этого месяца.

Тем не менее, внимательное чтение и анализ условия задачи позволяют правильно интерпретировать его и получить нужный результат; в этом смысле задача является корректной.

Как уже отмечалось, в реальности схемы начисления процентов являются более сложными. Как правило, при кредитах для клиентов — физических лиц платежи будут ежемесячными, проценты рассчитывают исходя из этого и учитывают каждый день кредитования. Рассмотрим, как в этом случае начисляются проценты по кредиту.

Пусть по-прежнему сумма кредита равна S_0 и кредит берётся под k% годовых на n лет с условием ежемесячного погашения дифференцированными платежами. Это означает, что клиент должен вернуть банку сумму кредита (долг) и проценты за пользование кредитом на следующих условиях: каждый месяц клиент возвращает банку $\frac{1}{12n}$ часть суммы долга (кредита) и проценты за пользование кредитом, начисляемые ежемесячно на остаток долга. Таким образом, за каждый месяц пользования кредитом сумма δ_m процентов в не високосном году будет вычисляться по формуле

$$\delta_m = S_{m-1} \cdot \frac{k}{100} \cdot \frac{l_i}{365} = \frac{S_{m-1} k l_i}{36\,500},$$

где m — номер месяца (платёжного периода),

$$S_{m-1} = S_0 - \frac{m-1}{12n} S_0 = \frac{12n - m + 1}{12n} S_0$$

— остаток долга на начало этого платёжного периода, l_i — число дней в этом месяце (28, 30 или 31), т. е.

$$\delta_m = \frac{k l_i (12n - m + 1) S_0}{438\,000n},$$

а в високосном году — по формуле

$$\delta_m = \frac{k l_i (12n - m + 1) S_0}{439\,200n},$$

где l_i — число дней в месяце, т. е. 29, 30 или 31.

Пример 6. 1 июля не високосного года Екатерина взяла в банке кредит на сумму 109 500 рублей под 24% годовых сроком на 6 месяцев на условиях погашения кредита дифференцированными платежами. Это означает, что до 1 числа каждого следующего за июлем месяца она вносит в банк платёж, состоящий из $\frac{1}{6}$ части долга (т. е. 18 250 рублей) и процентов, которые начисляются с учётом числа дней соответствующего месяца: 30 или 31 (всего 6 платежей). Найдите сумму всех выплат по кредиту.

Решение. Найдём сумму платежей по процентам в каждом из месяцев кредитования.

Сумма процентов в рублях за *июль* составит

$$\delta_1 = 109\,500 \cdot 0{,}24 \cdot \frac{31}{365} = 2232.$$

Сумма процентов в рублях за *август* составит

$$\delta_2 = (109\,500 - 18\,250) \cdot 0{,}24 \cdot \frac{31}{365} = 1860.$$

Сумма процентов в рублях за *сентябрь* составит

$$\delta_2 = (109\,500 - 18\,250 \cdot 2) \cdot 0{,}24 \cdot \frac{30}{365} = 1440.$$

Сумма процентов в рублях за *октябрь* составит

$$\delta_4 = (109\,500 - 18\,250 \cdot 3) \cdot 0{,}24 \cdot \frac{31}{365} = 1116.$$

Сумма процентов в рублях за *ноябрь* составит

$$\delta_5 = (109\,500 - 18\,250 \cdot 4) \cdot 0{,}24 \cdot \frac{30}{365} = 720.$$

Сумма процентов в рублях за *декабрь* составит

$$\delta_6 = (109\,500 - 18\,250 \cdot 5) \cdot 0{,}24 \cdot \frac{31}{365} = 372.$$

Таким образом, сумма всех выплат в рублях по процентам (переплата) составит

$$\delta = \delta_1 + \ldots + \delta_6 = 2232 + 1860 + 1440 + 1116 + 720 + 372 = 7740,$$

а общая сумма выплат: $S = 109\,500 + 7740 = 117\,240$.

Ответ. 117 240.

Обратим внимание на то, что вычисления в рассмотренном примере сильно упрощаются, если заметить, что

$$\frac{109\,500 - 18\,250(n-1)}{365} \cdot 0{,}24 = (300 - 50(n-1)) \cdot 0{,}24 = \\ = 72 - 12(n-1) = 84 - 12n$$

и тогда $\delta_n = (84 - 12n) \cdot l_i$, где $l_i = 30$ либо $l_i = 31$ в зависимости от месяца.

В процентах переплата по кредиту составит $\frac{7740}{109\,500} \cdot 100\,\% \approx 7{,}07\,\%$.

Этот пример является примером реального расчёта по кредиту с дифференцированными платежами. Если бы аннуитетные платежи рассчитывались по схеме из примера 4, то выплаты по процентам по любой из схем были бы одинаковыми, отличались бы только суммы обязательных платежей (одни и те же по аннуитетной схеме, убывающие — по схеме с дифференцированными платежами). Реальные же схемы кредитов с аннуитетными платежами (для кредитования физических лиц в нашей стране в основном используют именно эти схемы) устроены иначе, чем в примере 4, и процентные выплаты по ним оказываются больше, чем для кредитов с дифференцированными платежами. Перейдём к рассмотрению этих схем.

Аннуитетные платежи

Начнём с упрощённой реальной схемы, предполагающей ежегодные, а не ежемесячные выплаты. По-прежнему будем считать, что S_0 — сумма кредита (долга) и кредит берётся на n лет под k % годовых. Эта же схема применима и в тех случаях, когда процент по кредиту указывается для платёжного периода, а не для полного года.

Для реальных кредитов с аннуитетными платежами условия начисления процентов оказываются следующими:

• до истечения очередного платёжного периода банк начисляет k % на оставшуюся сумму долга, т. е. увеличивает её на k %;

• после начисления процентов клиент вносит в банк (также до истечения соответствующего платёжного периода) некоторую сумму x — одну и ту же для каждого платежа; сумма долга при этом уменьшается, и на эту уменьшенную на x сумму начисляются проценты до истечения следующего платёжного периода, после чего клиент вносит в банк платёж в размере той же суммы x и т. п.

Из этих условий и находится сумма x регулярного платежа. Для её вычисления запишем суммы долга по истечении каждого платёжного периода, обозначив $1+\dfrac{k}{100}$ буквой m:

$$
\begin{aligned}
&S_1 = mS_0 - x,\\
&S_2 = mS_1 - x = m^2S_0 - mx - x,\\
&S_3 = mS_2 - x = m^3S_0 - m^2x - mx - x,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&S_n = mS_{n-1} - x = m^nS_0 - m^{n-1}x - \ldots - mx - x.
\end{aligned}
$$

Поскольку по истечении последнего платёжного периода долг равен 0, получаем, что $S_n=0$, т. е. $m^nS_0 - m^{n-1}x - \ldots - mx - x = 0$. Отсюда

$$x + mx + \ldots + m^{n-1}x = m^nS_0,$$

или (после вынесения общего множителя в левой части последнего равенства) $x(1+m+\ldots+m^{n-1})=m^nS_0$. Сумма $1+m+\ldots+m^{n-1}$ вычисляется по формуле $S=b_1\dfrac{q^n-1}{q-1}$ суммы S первых n членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$. В данном случае $b_1=1$, $q=m$. Поэтому $S_n=\dfrac{m^n-1}{m-1}$. Таким образом, $x\dfrac{m^n-1}{m-1}=m^nS_0$, откуда

$$x=\frac{m^n(m-1)}{m^n-1}S_0. \tag{3}$$

Число $A=\dfrac{m^n(m-1)}{m^n-1}$ называется коэффициентом аннуитета. Часто его вычисляют, записывая годовой процент в сотых долях (т. е. в виде десятичной дроби), для чего обозначают $\dfrac{k}{100}$ (или $0{,}01k$) буквой p. Тогда $m=p+1$ и $A=\dfrac{p(p+1)^n}{(p+1)^n-1}$. Формула (3) при этом примет вид

$$x=\frac{p(p+1)^n}{(p+1)^n-1}S_0. \tag{4}$$

Последняя формула позволяет находить сумму регулярного платежа и для любого периодического платежа. При этом считают, что p — это процентная ставка, выраженная в сотых долях в расчёте за этот период. Например, для n ежемесячных платежей по кредиту под 12% годовых $p=\dfrac{0{,}12}{12}=0{,}01$, и если кредит берётся сроком на 10 лет, то $x=\dfrac{0{,}01\cdot(1{,}01)^{120}}{(1{,}01)^{120}-1}S_0$. Ясно, что вычисления по подобным формулам без применения специальных (хотя и несложных) программ будут, мягко говоря, затруднительными. Так, если считать, что сумма кредита на 10 лет под 12% годовых равна 1 000 000 руб., то

$$x=\frac{0{,}01\cdot(1{,}01)^{120}}{(1{,}01)^{120}-1}\cdot 1\,000\,000\approx 0{,}0143471\cdot 1\,000\,000=14\,347{,}1 \text{ руб.}$$

Общая сумма S выплат находится по формуле

$$S=120x=120\cdot 14\,347{,}1=1\,721\,652 \text{ руб.}$$

Сумма δ выплаченных процентов (переплата) составит 721 652 руб., т. е. примерно 72,17% от суммы кредита.

Чтобы сравнить выплаты по схеме с дифференцированными платежами и схеме с аннуитетными платежами при одинаковых сумме, сроке и процентной ставке кредита, посчитаем выплаты по аннуитетной схеме в условиях примера 6.

Пример 7. 1 июля не високосного года Екатерина взяла в банке кредит на сумму 109 500 рублей под 24% годовых сроком на 6 месяцев на условиях погашения кредита ежемесячными аннуитетными (равными) платежами. Это означает, что

• до истечения соответствующего платёжного периода, т. е. до 1-го числа каждого следующего за июлем месяца, банк начисляет 24% на оставшуюся сумму долга, т. е. увеличивает её на 24%;

• после начисления процентов Екатерина вносит в банк (также до истечения соответствующего платёжного периода, т. е. до 1-го числа каждого месяца начиная с августа) некоторую фиксированную сумму — одну и ту же для каждого платежа; сумма долга при этом уменьшается, и на эту уменьшенную сумму начисляются проценты до истечения следующего платёжного периода, после чего Екатерина вносит в банк платёж в размере той же фиксированной суммы, и т. п.

Найдите сумму всех выплат по кредиту.

Решение. В данном случае (для схемы с аннуитетными платежами) $p=\frac{0{,}24}{12}=0{,}02$. Тогда сумма ежемесячного платежа составляет

$$x=\frac{0{,}02\cdot(1{,}02)^6}{(1{,}02)^6-1}\cdot 109\,500\approx 0{,}1785258\cdot 109\,500\approx 19\,548{,}58 \text{ руб.}$$

и сумма всех выплат равна

$$S=6x=6\cdot 19\,548{,}58=117\,291{,}48 \text{ руб.},$$

т. е. переплата составляет $\delta=117\,291{,}48-109\,500=7791{,}48$ руб.

Ответ. 117 291,48.

Напомним, что переплата по кредиту с дифференцированными платежами при тех же условиях (пример 6) составила 7740 рублей. При большом сроке кредита (несколько лет) разница становится куда более существенной. Отметим ещё и то, что для кредита с аннуитетными платежами банки варьируют долю процентов и долю выплачиваемого долга в каждом из платежей. При этом в первом платеже доля долга будет минимальной, а доля процентов — максимальной. В каждом следующем платеже доля процентов будет уменьшаться, а доля долга — увеличиваться, так что через определённое время (примерно в середине срока кредитования) доля процентов окажется совсем небольшой и досрочное погашение кредита перестанет быть выгодным. Таким образом, банки извлекают максимально возможную прибыль от кредитования. Справедливости ради следует заметить, что часто банки ограничивают максимально возможный ежемесячный платёж определённым процентом от ежемесячного заработка клиента (обычно — не более 40%). В таких случаях схема с аннуитетными платежами позволяет взять в кредит бо́льшую (по сравнению с кредитом с дифференцированными платежами) сумму.

В заданиях ЕГЭ по математике обычно рассматриваются несколько упрощённые схемы, например, кредит выдаётся на условиях оплаты тремя равными платежами с начислением фиксированного процента на сумму долга за каждый период.

Пример 8. 31 декабря 2014 года бизнесмен взял в банке кредит на 3 года под 10 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: до 31 ноября каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 10 %), затем до истечения этого же платёжного периода (т. е. по 31 декабря того же года) бизнесмен переводит в банк определённую (одну и ту же для каждого года) сумму ежегодного платежа. Какой была сумма кредита (в рублях), если сумма ежегодного платежа составила 2 662 000 рублей?

Решение. Пусть S_0 — сумма кредита, x — сумма ежегодной выплаты. Запишем суммы долга по истечении каждого платёжного периода:

$$S_1 = 1{,}1S_0 - x;$$
$$S_2 = 1{,}1S_1 - x = (1{,}1)^2S_0 - 1{,}1x - x;$$
$$S_3 = 1{,}1S_2 - x = (1{,}1)^3S_0 - (1{,}1)^2x - 1{,}1x - x.$$

Поскольку по истечении последнего платёжного периода долг равен 0, имеем $S_3 = 0$, т. е.

$$(1{,}1)^3S_0 - (1{,}1)^2x - 1{,}1x - x = 0,$$

откуда

$$((1{,}1)^2 + 1{,}1 + 1)x = (1{,}1)^3S_0,$$

т. е. $3{,}31x = 1{,}331S_0$. Так как $x = 2\,662\,000$, получаем, что

$$S_0 = \frac{3{,}31 \cdot 2\,662\,000}{1{,}331} = 3{,}31 \cdot 2\,000\,000 = 6\,620\,000.$$

Ответ. 6 620 000.

Как видим, в подобных задачах используются формулы, связывающие 4 величины: сумму кредита, процентную ставку, число платежей (срок кредита), сумму регулярного платежа. Обычно в условии задания ЕГЭ задаются три из этих величин, а четвёртую требуется найти. Так, в рассмотренном примере были заданы процентная ставка, число платежей, сумма регулярного платежа, а требовалось найти сумму кредита.

Рассмотрим ещё несколько примеров из реальных вариантов ЕГЭ на разные схемы кредитования. Ещё раз заметим, что условия задач нужно читать и анализировать очень внимательно, поскольку схемы кредитования могут отличаться от реальных.

Пример 9. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

• в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 38 млн рублей?

Решение. Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно, т. е. на $\frac{1}{n}$-ю часть, поэтому суммы долга за каждый месяц (до начисления процентов) составят (в порядке убывания)

$$16, \quad 16-\frac{16}{n}=\frac{16(n-1)}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{16\cdot 2}{n}, \quad \frac{16}{n}.$$

По условию каждый январь долг возрастает на 25 %, поэтому последовательность размеров платежей по процентам будет следующей:

$$16\cdot 0{,}25=4, \quad \frac{16(n-1)}{n}\cdot 0{,}25=\frac{4(n-1)}{n}, \quad \ldots,$$
$$\frac{20\cdot 2}{n}\cdot 0{,}25=\frac{4\cdot 2}{n}, \quad \frac{20}{n}\cdot 0{,}25=\frac{4}{n}.$$

Ежегодный платёж состоит из фиксированной суммы $\frac{16}{n}$ и суммы платежа по процентам, поэтому ежегодные платежи составят соответственно

$$\frac{16}{n}+4, \quad \frac{16}{n}+\frac{4(n-1)}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{16}{n}+\frac{4\cdot 2}{n}, \quad \frac{16}{n}+\frac{4}{n}.$$

Общая сумма S всех выплат составит

$$S=16+4+\frac{4(n-1)}{n}+\ldots+\frac{4}{n}.$$

Вынесем за скобки общий множитель всех слагаемых правой части последнего равенства начиная со второго:

$$S=16+\frac{4}{n}(n+(n-1)+\ldots+1).$$

Сумму в скобках находим как сумму арифметической прогрессии:

$$S=16+\frac{4}{n}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot n=16+2(n+1)=2n+18.$$

По условию $S=38$, откуда $2n+18=38$ и $n=10$.

Ответ. 10.

Пример 10. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

• в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 1,4 млн рублей, а наименьший — не менее 0,6 млн рублей.

Решение. По условию долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно, т. е. на $\frac{1}{9}$ часть, поэтому суммы долга за каждый год (до начисления процентов) составят (в порядке убывания)

$$4{,}5,\ 4,\ \ldots,\ 1,\ 0{,}5.$$

По условию каждый январь долг возрастает на $r\%$. поэтому последовательность размеров платежей по процентам будет следующей:

$$4{,}5\cdot\frac{r}{100},\quad 4\cdot\frac{r}{100},\quad \ldots,\quad 0{,}5\cdot\frac{r}{100}.$$

Ежемесячный платёж состоит из фиксированной суммы $\frac{4{,}5}{9}=0{,}5$ и суммы платежа по процентам. Следовательно, наибольший платёж составит $0{,}5+4{,}5\cdot\frac{r}{100}$ млн рублей, а наименьший платёж составит $0{,}5+0{,}5\cdot\frac{r}{100}$ млн рублей.

Получаем $0{,}5+4{,}5\cdot\frac{r}{100}\leqslant 1{,}4$, откуда $r\leqslant 20$, и $0{,}5+0{,}5\cdot\frac{r}{100}\geqslant 0{,}6$, откуда $r\geqslant 20$. Следовательно, $r=20$.

Ответ. 20.

Некоторые задачи можно решать, не используя формулы, а ограничившись простым перебором (оформлять который для наглядности лучше с помощью таблицы) или элементарными логическими построениями. Рассмотрим оба этих способа на примере двух аналогичных заданий.

Пример 11. 1 января 2016 года Тарас Павлович взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 2 процента на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 2 %), затем Тарас Павлович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев

Тарас Павлович мог взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты не превышали 220 тыс. рублей?

Решение. Ясно, что чем больше месячные выплаты, тем быстрее будет выплачен долг. Значит, срок кредита будет минимален в том случае, когда величина выплаты будет равна 220 тыс. рублей. Составим таблицу, в первом столбце которой будем указывать долг на первое число месяца, а во втором — долг в том же месяце, но уже после выплаты. Для упрощения расчётов будем сохранять только два знака после запятой, представляя суммы долга в тыс. рублей.

Месяц	Долг на первое число месяца (тыс. руб.)	Долг после выплаты (тыс. руб.)
1	1122	902
2	920,04	700,04
3	714,04	494,04
4	503,92	283,92
5	289,60	69,60
6	70,99	0

Заметим, что в последний месяц выплата составит менее 220 тыс. руб. Из таблицы видно, что минимальный срок кредита в условиях задачи составляет 6 месяцев.

Ответ. 6.

Пример 12. 1 января 2016 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич мог взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты не превышали 275 тыс. рублей?

Решение. Заметим, что за 4 месяца Александр Сергеевич выплатит 1,1 млн рублей. Таким образом, он не покроет долг с процентами. Каждый месяц долг увеличивается не более чем на $1\,100\,000 \cdot 0{,}01 = 11\,000$ рублей. Значит, за пять месяцев Александр Сергеевич должен будет выплатить не более $1\,100\,000 + 5 \cdot 11\,000 = 1\,155\,000$ рублей, что меньше, чем $5 \cdot 275\,000 = 1\,375\,000$ рублей. Таким образом, Александр Сергеевич сможет выплатить кредит за 5 месяцев.

Ответ. 5.

Упражнения к § 4

1. а) Какой вклад выгоднее: первый — на 1 год под 16% годовых или второй — на 4 месяца (с автоматической пролонгацией каждые четыре месяца в течение года с момента открытия вклада) под 15% годовых? При расчётах считайте, что один месяц равен $\frac{1}{12}$ части года.

б) Какой вклад выгоднее: первый — на 1 год под 15% годовых или второй — на 6 месяцев (с автоматической пролонгацией каждые шесть месяцев в течение года с момента открытия вклада) под 14% годовых? При расчётах считайте, что один месяц равен $\frac{1}{12}$ части года.

2. а) Георгий приобрёл ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Георгий может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В течение какого года после покупки Георгий должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

б) Семён приобрёл ценную бумагу за 8 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 1 тыс. рублей. В любой момент Семён может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 8%. В течение какого года после покупки Семён должен продать ценную бумагу, чтобы через двадцать пять лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

3. а) По вкладу «А» банк в конце каждого года увеличивает на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» увеличивает эту сумму на 11% в течение каждого из первых двух лет. Найдите наибольшее натуральное число процентов, начисленное за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад будет менее выгоден, чем вклад «А».

б) По вкладу «А» банк в конце каждого года увеличивает на 20% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» увеличивает эту сумму на 25% в течение каждого из первых двух лет. Найдите наибольшее натуральное число процентов, начисленное за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад будет менее выгоден, чем вклад «А».

4. а) По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 20% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» увеличивает эту сумму на 21 % в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

б) По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» увеличивает эту сумму на 11 % в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

5. а) По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 20 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 10 % в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

б) По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 5 % в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

6. а) По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 10 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в первый и второй годы, а также целое число m млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m, при которых первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года как минимум утроятся.

б) По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 20 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 13 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в первый и второй годы, а также целое число m млн рублей третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m, при которых первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года как минимум утроятся.

7. а) По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 млн рублей в первый и второй годы, а также по 10 млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений (в млн рублей), при котором они за два года станут больше 150 млн, а за четыре года станут больше 250 млн рублей.

б) По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 10% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 млн рублей в первый и второй годы, а также по 10 млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений (в млн рублей), при котором они за два года станут больше 200 млн, а за четыре года станут больше 270 млн рублей.

8. а) Банк предоставляет кредит сроком на 10 лет под 19% годовых на следующих условиях: ежегодно заёмщик возвращает банку 19% от непогашенной части кредита и $\frac{1}{10}$ суммы кредита. Так, в первый год заёмщик выплачивает $\frac{1}{10}$ суммы кредита и 19% от всей суммы кредита, во второй год заёмщик выплачивает $\frac{1}{10}$ суммы кредита и 19% от $\frac{9}{10}$ суммы кредита и т. д. Во сколько раз сумма, которую выплатит банку заёмщик, будет больше суммы кредита, если заёмщик не воспользуется досрочным погашением кредита?

б) Банк предоставляет ипотечный кредит сроком на 20 лет под 12% годовых на следующих условиях: ежегодно заёмщик возвращает банку 12% от непогашенной части кредита и $\frac{1}{20}$ суммы кредита. Так, в первый год заёмщик выплачивает $\frac{1}{20}$ суммы кредита и 12% от всей суммы кредита, во второй год заёмщик выплачивает $\frac{1}{20}$ суммы кредита и 12% от $\frac{19}{20}$ суммы кредита и т. д. Во сколько раз сумма, которую выплатит банку заёмщик, будет больше суммы кредита, если заёмщик не воспользуется досрочным погашением кредита?

9. а) Пётр взял кредит в банке на срок 12 месяцев. По договору Пётр должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется r% этой суммы, и своим ежемесячным платежом Пётр погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц. Известно, что общая сумма, выплаченная Петром банку за весь срок кредитования, оказалась на 13 % больше, чем сумма, взятая им в кредит. Найдите r.

б) Алексей взял кредит в банке на срок 17 месяцев. По договору Алексей должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется r % этой суммы, и своим ежемесячным платежом Алексей погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц. Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась на 27 % больше, чем сумма, взятая им в кредит. Найдите r.

10. а) 1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 900 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 1 %), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович мог взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 000 рублей?

б) 1 января 2015 года Павел Витальевич взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 1 %), затем Павел Витальевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Павел Витальевич мог взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 125 тыс. руб.?

11. а) В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

• в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат (в млн рублей) после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?

б) В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

• в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат (в млн рублей) после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж составит 1,25 млн рублей?

12. а) Ольга хочет взять в кредит 100 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет Ольга может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24 000 рублей?

б) Савелий хочет взять в кредит 1,4 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет Савелий может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 330 тысяч рублей?

13. а) 31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5 % годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 14,5 %), затем Дмитрий переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (т. е. за два года)?

б) 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5 % годовых. Схема выплат кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 12,5 %), затем Алексей переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (т. е. за четыре года)?

14. а) 31 декабря 2014 года Валерий взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на определённое количество процентов), затем Валерий переводит очередной транш. Валерий выплатил кредит за два транша, переводя в первый раз 660 тыс. рублей, во второй — 484 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Валерию?

б) 31 декабря 2014 года Пётр взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на определённое количество процентов), затем Пётр переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 2 592 000 рублей, то выплатит долг за 4 года, а если по 4 392 000 рублей, то за 2 года. Под какой процент Пётр взял деньги в банке?

15. а) В июле 2019 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей (где S — натуральное число) сроком на 3 года. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг увеличивается на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

• в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022
Долг (в тыс. рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

б) В июле 2019 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей (где S — натуральное число) сроком на 3 года. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг увеличивается на 17,5 % по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

• в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022
Долг (в тыс. рублей)	S	$0{,}9S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

16. а) 15 января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

• 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r % по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;

• со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

• 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором сумма выплат будет меньше 1,25 млн руб.

б) 15 января планируется взять кредит в банке на 1 млн рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

• 1-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;

• со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

• 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять менее 1,2 млн рублей.

17. а) В июле 2019 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг увеличивается на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

• в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}6S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет больше 50 млн рублей.

б) В июле 2019 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн руб., где S — целое число. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг увеличивается на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

• в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}5S$	$0{,}1S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей.

18. а) В июле 2019 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн руб., где S — целое число. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг увеличивается на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

• в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее S, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.

б) В июле 2019 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн руб., где S — целое число. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг увеличивается на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

• в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором разница между наибольшей и наименьшей выплатами будет меньше 1 млн рублей.

19. а) В июле 2019 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

• в июле 2020, 2021 и 2022 гг. долг остаётся равным S тыс. рублей;

• выплаты в 2023 и 2024 годах равны по 625 тыс. рублей;

• к июлю 2024 года долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за пять лет. Ответ дайте в тыс. рублей.

б) В июле 2019 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

• в июле 2020, 2021 и 2022 гг. долг остаётся равным S тыс. рублей;

• выплаты в 2023 и 2024 годах равны по 360 тыс. рублей;

• к июлю 2024 года долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за пять лет. Ответ дайте в тыс. рублей.

20. а) Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10 % по сравнению с его размером в начале года, а кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 30 млн рублей. Ответ дайте в млн рублей.

б) Вклад в размере 6 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10 % по сравнению с его размером в начале года, а кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 15 млн рублей. Ответ дайте в млн рублей.

21. а) 31 декабря 2014 года Ярослав взял в банке некоторую сумму в кредит под 12,5 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 12,5 %), затем Ярослав переводит в банк 2 132 325 рублей. Какую сумму взял Ярослав в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (т. е. за четыре года)? Ответ дайте в рублях.

б) 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 10 %), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами? Ответ дайте в рублях.

22. а) 31 декабря 2014 года Тимофей взял в банке 7 007 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 20 %), затем Тимофей переводит в банк платёж. Весь долг Тимофей выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

б) 31 декабря 2014 года Савелий взял в банке 7 378 000 рублей в кредит под 12,5 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 12,5 %), затем Савелий переводит в банк платёж. Весь долг Савелий выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

23. а) В июле планируется взять кредит на сумму 8 052 000 рублей. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (т. е. за четыре года)?

б) В июле планируется взять кредит на сумму 9 282 000 рублей. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (т. е. за четыре года)?

24. а) В июле планируется взять кредит на сумму 8 052 000 рублей. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей меньше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (т. е. за два года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (т. е. за четыре года)?

б) В июле планируется взять кредит на сумму 9 282 000 рублей. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей меньше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (т. е. за два года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (т. е. за четыре года)?

25. а) В июле в банке был взят кредит на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 399 300 рублей.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен тремя равными платежами (т. е. за три года)?

б) В июле в банке был взят кредит на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 207 360 рублей.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (т. е. за четыре года)?

26. а) В июле в банке был взят кредит на сумму 100 000 рублей. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Известно, что кредит был полностью погашен за два года, причём в первый год было переведено 75 000 рублей, а во второй год — 46 000 рублей. Найдите число r.

б) В июле в банке был взят кредит на сумму 100 000 рублей. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Известно, что кредит был полностью погашен за два года, причём в первый год было переведено 68 000 рублей, а во второй год — 59 000 рублей. Найдите число r.

27. а) В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

Известно, что если каждый год выплачивать по 292 820 рублей, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 534 820 рублей, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите число r.

б) В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

Известно, что если каждый год выплачивать по 216 000 рублей, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 366 000 рублей, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите число r.

28. а) В июле планируется взять кредит на сумму 1 000 000 рублей. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга;

• ежегодные выплаты не превышают 300 000 рублей.

На какое минимальное количество лет можно взять кредит при таких условиях?

б) В июле планируется взять кредит на сумму 1 000 000 рублей. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга;

• ежегодные выплаты не превышают 400 000 рублей.

На какое минимальное количество лет можно взять кредит при таких условиях?

29. а) В июле планируется взять кредит на сумму 1 000 000 рублей. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга;

• ежегодные выплаты не превышают 400 000 рублей.

Какое минимальное число рублей может составлять долг через год после взятия кредита?

б) В июле планируется взять кредит на сумму 1 000 000 рублей. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга;

• ежегодные выплаты не превышают 300 000 рублей.

Какое минимальное число рублей может составлять долг через год после взятия кредита?

30. а) В июле планируется взять кредит на сумму 1 000 000 рублей. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга;

• ежегодные выплаты не превышают 400 000 рублей.

Какое минимальное число рублей может составить последний платёж, если кредит нужно выплатить за минимальное количество лет?

б) В июле планируется взять кредит на сумму 1 000 000 рублей. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга;

• ежегодные выплаты не превышают 300 000 рублей.

Какое минимальное число рублей может составить последний платёж, если кредит нужно выплатить за минимальное количество лет?

31. а) В июле планируется взять кредит на сумму 1 000 000 рублей. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга;

• ежегодные выплаты не превышают 300 000 рублей.

На какое минимальное число рублей сумма выплат может превышать размер кредита?

б) В июле планируется взять кредит на сумму 1 000 000 рублей. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга;

• ежегодные выплаты не превышают 400 000 рублей.

На какое минимальное число рублей сумма выплат может превышать размер кредита?

32. а) 15 июля планируется взять кредит на сумму 900 000 рублей. Условия его возврата таковы:

• 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

• со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить некоторую часть долга.

На какое минимальное количество месяцев можно взять кредит при условии, что ежемесячные выплаты не должны превышать 180 000 рублей?

б) 15 июля планируется взять кредит на сумму 1 000 000 рублей. Условия его возврата таковы:

• 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

• со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить некоторую часть долга.

На какое минимальное количество месяцев можно взять кредит при условии, что ежемесячные выплаты не должны превышать 100 000 руб.?

33. а) 15 января планируется взять кредит в банке на 48 месяцев. Условия его возврата таковы:

• 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

• со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

• 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 49% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

б) В июле планируется взять кредит в банке на сумму 100 000 рублей. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Найдите число r, если известно, что кредит был полностью погашен за два года, причём в первый год было переведено 60 000 рублей, а во второй год — 72 000 рублей?

34. а) Вася мечтает о собственной квартире, которая стоит 3 млн руб. Вася может купить её в кредит, при этом банк готов выдать эту сумму сразу, а погашать кредит Васе придётся 20 лет равными ежемесячными платежами, при этом ему придётся выплатить сумму, на 180% превышающую исходную. Вместо этого Вася может какое-то время снимать квартиру (стоимость аренды — 15 тыс. руб. в месяц), откладывая каждый месяц на покупку квартиры сумму, которая останется от его возможного платежа банку (по первой схеме) после уплаты арендной платы за съёмную квартиру. За сколько лет в этом случае Вася сможет накопить на квартиру, если считать, что её стоимость не изменится?

б) Ваня мечтает о собственной квартире, которая стоит 2 млн руб. Ваня может купить её в кредит, при этом банк готов выдать эту сумму сразу, а погашать кредит Васе придётся 20 лет равными ежемесячными платежами, при этом ему придётся выплатить сумму, на 260% превышающую исходную. Вместо этого Ваня может какое-то время снимать квартиру (стоимость аренды — 14 тыс. руб. в месяц), откладывая каждый месяц на покупку квартиры сумму, которая останется от его возможного платежа банку (по первой схеме) после уплаты арендной платы за съёмную квартиру. За сколько месяцев в этом случае Ваня сможет накопить на квартиру, если считать, что её стоимость не изменится?

35. а) Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 10% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита (в млн рублей), при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 8 млн.

б) Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита (в млн рублей), при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 10 млн.

Диагностическая работа 4

Вариант 1

1. 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 3,6 млн рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

• 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

• со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

• 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

а) Сколько рублей составит первый платёж?

б) Сколько рублей составит последний платёж?

в) На сколько рублей пятнадцатый платёж превосходит шестнадцатый?

г) Какую сумму (в рублях) нужно вернуть банку за весь срок кредитования?

д) Какую сумму (в рублях) нужно вернуть банку в течение второго года (с 13-го по 24-й месяцы) кредитования?

е) На сколько рублей увеличится сумма выплат, если взять кредит с такими же условиями на 72 месяца?

2. 15 января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы:

• 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

• со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

• 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что на 8-й месяц кредитования нужно выплатить 232 тыс. рублей.

а) Какую сумму (в рублях) нужно вернуть банку за весь срок кредитования?

б) Какую сумму (в рублях) планируется взять в кредит?

3. 15 января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы:

• 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;

• со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

• 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 24% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

4. 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

• 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

• со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

• 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что сумма выплат составит 6,05 млн руб.?

5. В июле планируется взять кредит на сумму 728 000 рублей. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен тремя равными платежами (т. е. за три года)?

6. Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 1 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада (в млн рублей), при котором через четыре года вклад будет больше 10 млн рублей.

Вариант 2

1. 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 600 тыс. рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

• 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

• со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

• 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

а) Сколько рублей составит первый платёж?

б) Сколько рублей составит последний платёж?

в) На сколько рублей тринадцатый платёж превосходит четырнадцатый?

г) Какую сумму (в рублях) нужно вернуть банку за весь срок кредитования?

д) Какую сумму (в рублях) нужно вернуть банку в течение второго года (с 13-го по 24-й месяцы) кредитования?

е) На сколько рублей увеличится сумма выплат, если взять кредит с такими же условиями на 30 месяцев?

2. 15 января планируется взять кредит в банке на 7 месяцев. Условия его возврата таковы:

• 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

• со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

• 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что на 4-й месяц кредитования нужно выплатить 56 тыс. рублей.

а) Какую сумму (в рублях) нужно вернуть банку за весь срок кредитования?

б) Какую сумму (в рублях) планируется взять в кредит?

3. 15 января планируется взять кредит в банке на 35 месяцев. Условия его возврата таковы:

• 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;

• со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

• 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 18 % больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

4. 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 2 млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

• 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

• со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

• 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что сумма выплат составит 2,11 млн руб.?

5. В июле в банке был взят кредит на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 12,5 % по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 324 000 рублей.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен двумя равными платежами (т. е. за два года)?

6. Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10 % по сравнению с его размером в начале года, а кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада (в млн рублей), при котором через четыре года вклад будет больше 20 млн рублей.

§ 5. Задачи оптимизации производства товаров или услуг

В последние годы в вариантах ЕГЭ по математике и школьных диагностических работ появились задачи, которые можно отнести к простейшим задачам оптимизации.

В таких задачах заданы определённые условия производства какой-либо продукции или услуги (это могут быть любые изделия, сельхозпродукты, полезные ископаемые, транспортные перевозки и т. д. и т. п.) и требуется найти значения некоторых величин с целью максимизации прибыли (как вариант — максимизации количества производимых товаров или услуг) или минимизации расходов. Связи между данными величинами во многих случаях моделируются линейными уравнениями и неравенствами (поэтому эти задачи часто относят к задачам линейного программирования) либо простейшими нелинейными уравнениями и неравенствами. В школьной практике математическая модель (т. е. формализация условия задачи посредством неравенств и уравнений) любой из таких задач обычно приводит к одному-двум линейным уравнениям (неравенствам) относительно двух данных неизвестных и к одному линейному или простейшему нелинейному уравнению, связывающему данные неизвестные и величину, максимум или минимум которой надо определить. Вводя в качестве новой неизвестной (параметра) эту величину (её обычно называют *целевой функцией*) и выразив одну из данных переменных через другую переменную и введённый параметр, мы получим одно или два линейных уравнения (неравенства), связывающие данные неизвестные (т. е. задающие определённые ограничения на величины этих неизвестных), и одно (возможно, нелинейное) уравнение с параметром. После этого задача сведётся к определению наибольшего (наименьшего) значения параметра, при котором полученное уравнение имеет хотя бы один корень на множестве неотрицательных чисел, удовлетворяющий данным ограничениям. Этот корень будет точкой максимума или минимума целевой функции. Находить его можно либо с помощью графических интерпретаций, либо аналитически. Поскольку в таких задачах обычно речь идёт о целых неотрицательных величинах, найденная точка максимума или минимума также должна быть целой и неотрицательной. Если это не так, то при аналитическом решении задачи, как правило, достаточно вычислить значения целевой функции в двух ближайших к точке экстремума целых точках (будем называть каждую из таких точек *опорной*). Обычно это те точки, между которыми находится точка максимума (минимума) целевой функции. Вычислив значения целевой функции в опорных точках, нужно выбрать наибольшее (или наименьшее — в зависимости от условий задачи) из найденных значений, которое и будет оптимальным решением. Для квадратичной целевой функции можно ограничиться вычислением значения в одной опорной точке — ближайшей к её точке максимума (минимума). В задачах, которые удобно решать с помощью графических интерпретаций, исследование может оказаться чуть более сложным и разветвлённым: оптимальное значение целевой функции не обязательно будет связано с опорными точками, но именно эти точки позволят найти такое решение.

Отметим, что в задачах оптимизации порой используются абстрактные денежные единицы (обозначение: д. е.) Это могут быть рубли, тысячи, миллионы рублей или единиц других валют.

Обратим внимание на одну особенность задач оптимизации. Условия и сюжеты этих задач могут быть очень похожими, различие порой заключается в одном-двух числах. При этом уровень сложности и методы решения таких «задач-близнецов» будут отличаться — и довольно существенно. Примеры, которые будут приведены ниже, в частности, призваны продемонстрировать и эти различия.

5.1. Логический перебор в задачах оптимизации

Начнём с задач, в которых можно обойтись без исследования целевой функции (а в первом примере даже вовсе не вводить её), решив их с помощью логического перебора. Справедливости ради следует заметить, что таких задач в вариантах ЕГЭ по математике и диагностических работах не так много.

Пример 1. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 400 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 11 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход (в млн рублей) может получить фермер?

Решение. Продавать свёклу более выгодно, поэтому второе поле, где её урожайность выше, следует засадить только свёклой. Доход от её продажи составит $10\ \text{га} \cdot 400\ \text{ц/га} \cdot 11\,000\ \text{руб./ц} = 44$ млн руб. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га. Если всё первое поле засеять свёклой, то доход составит $10\ \text{га} \cdot 300\ \text{ц/га} \cdot 11\,000 =$ $= 33$ млн руб. Если всё первое поле засеять картофелем, то доход составит 10 га · 400 ц/га · 10 000 = 40 млн руб. Значит, с единицы площади первого поля доход от картофеля будет больше, чем доход от свёклы, поскольку потери от меньшей стоимости компенсируются более высокой урожайностью. Поэтому всё первое поле следует засеять картофелем. Таким образом, наибольший возможный доход фермера равен $44+40=84$ млн руб.

Ответ. 84.

Пример 2. В двух шахтах добывают алюминий и никель. На первой шахте имеется 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 2 кг никеля. На второй шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение. Пусть в первой шахте x рабочих, а во второй шахте y рабочих заняты на добыче алюминия. Составим таблицу по данным задачи.

	Алюминий		Никель	
	Количество рабочих, чел.	Количество металла за смену, кг	Количество рабочих, чел.	Количество металла за смену, кг
Шахта 1	x	$5x$	$20-x$	$10(20-x)$
Шахта 2	y	$10y$	$100-y$	$5(100-y)$
Всего		$5x+10y$		$700-10x-5y$

Алюминия необходимо добывать вдвое больше никеля, поэтому $5x+10y=2(700-10x-5y)$, откуда $5x+4y=280$. В силу неотрицательности введённых переменных из условия задачи и последнего равенства следует, что $x \leqslant 20$, $y \leqslant 70$. Пусть a — масса сплава. По условию она должна быть втрое больше массы добытого никеля, т. е. $a=3(700-10x-5y)$. Так как $5x=280-4y$, после подстановки этого выражения в выражение $a=3(700-10x-5y)$ и алгебраических преобразований получим, что $a=3(140+3y)$. Поскольку наибольшее возможное значение y равно 70 (при этом $x=0$), наибольшее возможное значение массы сплава составляет $a=3(140+3\cdot 70)=1050$. Таким образом, 70 рабочих второй шахты должны быть заняты на добыче алюминия, а оставшиеся 30 рабочих второй шахты и все 20 рабочих первой шахты должны быть заняты на добыче никеля. При этом они добудут 700 кг алюминия и 350 кг никеля, а масса сплава будет равна 1050 кг.

Ответ. 1050.

В следующей задаче главная сложность — понять, какую величину нужно выбрать в качестве неизвестной, чтобы получить математическую модель задачи.

Пример 3. Один из цехов фабрики, производящей пищевые полуфабрикаты, выпускает вареники со следующими видами начинки: картофельная и грибная. В данной ниже таблице приведены себестоимость и отпускная цена, а также производственные возможности фабрики по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта.

Вид начинки	Себестоимость (за 1 тонну)	Отпускная цена (за 1 тонну)	Производственные возможности
картофель	88 тыс. руб.	138 тыс. руб.	110 (тонн в месяц)
грибы	92 тыс. руб.	154 тыс. руб.	80 (тонн в месяц)

Для выполнения условий ассортимента, которые предъявляются торговыми сетями, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 44 тонн. Предполагая, что вся продукция цеха находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль (в млн рублей), которую может получить фабрика от производства вареников за 1 месяц.

Решение. Пусть x % производственных мощностей цеха занято под производство вареников с картофелем, а $(100-x)$ % производственных мощностей цеха занято под производство вареников с грибами. Тогда вареников с картофелем производится $110\cdot\frac{x}{100}=1{,}1x$ тонн, а вареников с грибами производится $80\cdot\frac{100-x}{100}=80-0{,}8x$ тонн. Согласно условию должны выполняться неравенства $1{,}1x\geqslant 44$, откуда $x\geqslant 40$, и $80-0{,}8x\geqslant 44$, откуда $x\leqslant 45$. Производство одной тонны вареников с картофелем приносит фабрике 50 000 рублей прибыли, а производство одной тонны вареников с грибами — 62 000 рублей прибыли. Поэтому прибыль составит $a=50\,000\cdot 1{,}1x+62\,000(80-0{,}8x)$, откуда $a=5400x+4\,960\,000$. Поскольку $40\leqslant x\leqslant 45$, наибольшее значение прибыли будет достигаться при $x=45$ и составит $a=5400\cdot 45+{}$ $+4\,960\,000=5\,203\,000$ рублей.

Ответ. 5,203.

Пример 4. Бизнесмен купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть одноместные номера площадью 16 квадратных метров каждый и двухместные номера площадью 20 квадратных метров каждый. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 812 квадратных метров. Бизнесмен может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Из соображений конкурентоспособности он может выбрать одну из двух ценовых линеек:

1) 3200 рублей в сутки за одноместный номер и 3800 рублей в сутки за двухместный номер;

2) 3040 рублей в сутки за одноместный номер и 4000 рублей в сутки за двухместный номер.

а) Сколько одноместных и сколько двухместных номеров должно быть в отеле для получения максимально возможного суточного дохода?

б) Какую наибольшую сумму (в рублях) может при этом заработать в сутки на своём отеле бизнесмен?

Решение. 1. Для первой ценовой линейки доход, который будет приносить бизнесмену 1 кв. м площади одноместного номера, равен $\frac{3200}{16} = 200$ рублей; доход, который будет приносить бизнесмену 1 кв. м площади двухместного номера, равен $\frac{3800}{20} = 190$ рублей. Наименьшим общим кратным чисел 16 и 20 является 80. На площади 80 кв. м можно разместить 5 одноместных номеров или 4 двухместных номера. Но квадратный метр одноместного номера приносит больший доход, чем квадратный метр двухместного номера. Поэтому на каждых 80 кв. м площади здания выгоднее разместить 5 одноместных номеров. Поскольку общая площадь равна $812 = 80 \cdot 10 + 12$, получим 50 одноместных номеров и 12 кв. м в остатке. Этот остаток нужно использовать исходя из следующих рассуждений. Если к площади одноместного номера добавить 4 кв. м, получим площадь двухместного номера, а двухместный номер приносит больший доход, чем одноместный. Поскольку $12 = 4 \cdot 3$, нужно 3 одноместных номера заменить двухместными. Таким образом, получим 47 одноместных номеров и 3 двухместных номера. Максимально возможный суточный доход в этом случае составит $47 \cdot 3200 + 3 \cdot 3800 = 161\,800$ рублей.

2. Для второй ценовой линейки доход, который будет приносить бизнесмену 1 кв. м площади одноместного номера, равен $\frac{3040}{16} = 190$ рублей; доход, который будет приносить бизнесмену 1 кв. м площади двухместного номера, равен $\frac{4000}{20} = 200$ рублей. Наименьшим общим

кратным чисел 16 и 20 является 80. На площади 80 кв. м можно разместить 5 одноместных номеров или 4 двухместных номера. Но квадратный метр двухместного номера в данном случае приносит больший доход, чем квадратный метр одноместного номера. Поэтому на каждых 80 кв. м площади здания выгоднее разместить 4 двухместных номера. Поскольку общая площадь равна $812 = 80 \cdot 10 + 12$, получим 40 одноместных номеров и 12 кв. м в остатке. Этот остаток нужно использовать исходя из следующих рассуждений. Если к площади двухместного номера добавить 12 кв. м, получим площадь двух одноместных номеров, а два одноместных номера приносят больший доход, чем один двухместный. Значит, нужно один двухместный номер заменить двумя одноместными. Таким образом, получим 39 двухместных номеров и 2 одноместных номера. Максимально возможный суточный доход в этом случае составит $2 \cdot 3040 + 39 \cdot 4000 = 162\,080$ рублей.

Ответ. а) 39 двухместных номеров и 2 одноместных номера; б) 162 080 рублей.

5.2. Линейные целевые функции с целочисленными точками экстремума

Перейдём к задачам, которые без исследования целевой функции решить довольно проблематично. Поскольку речь в этой части пособия идёт о линейных целевых функциях, а графиком линейной целевой функции является прямая, приведём основные сведения, связанные с уравнением прямой.

Напомним, что уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$, а для построения этой прямой достаточно задать координаты двух её точек. Поскольку $y(0) = b$, прямая $y = kx + b$ пересекает ось ординат в точке $(0; b)$ (в силу чего коэффициент b называют начальной ординатой). Прояснить смысл коэффициента k (который во всех задачах, связанных с графическим заданием функции или её производной, играет ключевую роль) удобнее всего на примере прямой $y = kx$, проходящей через начало координат и точку $(1; k)$. Если $k > 0$, то тангенс угла α, который эта прямая образует с положительным направлением оси абсцисс, находится из прямоугольного треугольника с вершинами в точках $(0; 0)$, $(1; k)$ и $(1; 0)$ и катетами, равными 1 и k. Он будет равен отношению противолежащего этому углу катета к прилежащему: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{k}{1} = k$ (см. рис. 1). Именно этот угол является важнейшим для дальнейшего изложения.

Если $k < 0$, то угол α будет тупым, а его тангенс — отрицательным. В этом случае он дополняет острый угол β прямоугольного треугольника с теми же вершинами $(0; 0)$, $(1; k)$ и $(1; 0)$ и катетами, равны-

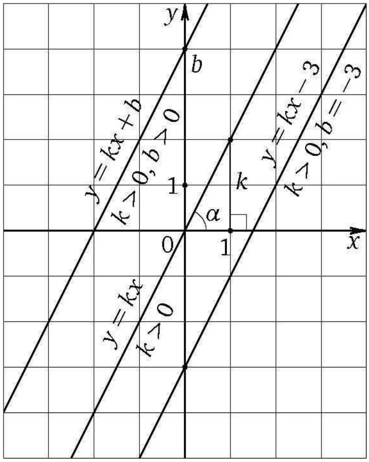


Рис. 1

ми 1 и $|k|$, до 180° (см. рис. 2). Поэтому $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\beta = -\frac{|k|}{1} = -|k|$. Поскольку в данном случае $k<0$, имеем $|k| = -k$ и $\operatorname{tg}\alpha = k$. Таким образом, и в этом случае коэффициент k равен тангенсу угла, который прямая образует с положительным направлением оси абсцисс.

Наконец, если $k=0$, то уравнение прямой $y=kx+b$ принимает вид $y=b$. Эта прямая, очевидно, параллельна оси абсцисс (поскольку

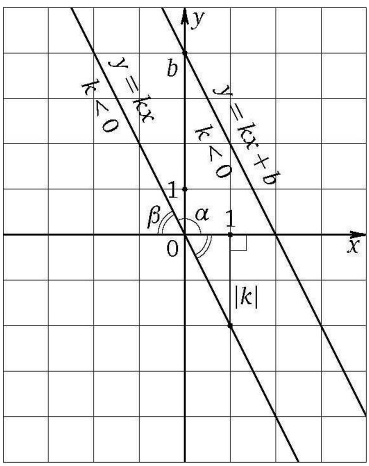


Рис. 2

ординаты всех её точек одинаковы) и пересекает ось ординат в точке $(0; b)$ (см. рис. 3), поэтому угол, который она образует с положительным направлением оси абсцисс (а значит, и его тангенс), равен нулю.

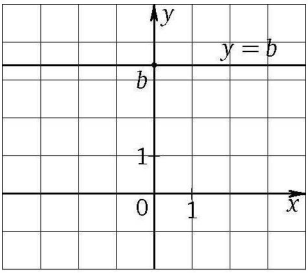


Рис. 3

Прямая $y = kx + b$ параллельна прямой $y = kx$, её можно получить параллельным переносом прямой $y = kx$ вдоль оси ординат на b единиц вверх (при $b > 0$) или на $|b|$ единиц вниз (при $b < 0$); угловой коэффициент k прямой $y = kx + b$ будет, разумеется, также равен $\operatorname{tg} \alpha$.

Итак, в любом случае коэффициент k в уравнении прямой $y = kx + b$ равен тангенсу угла, который эта прямая образует с положительным направлением оси абсцисс. Именно поэтому он называется угловым.

Решение довольно значительной части задач ЕГЭ, связанных с исследованием функций, сводится к вычислению углового коэффициента некоторой прямой (в том числе изображённой на листе бумаги в клетку). Кроме того, для решения задач оптимизации важно умение достаточно быстро находить угловой коэффициент прямой по двум её точкам с известными координатами (по сути это аналог задачи на бумаге в клетку). Такие задачи решаются следующим образом: на прямой выбирают две точки, которые являются узлами клеток (т. е. точками с целочисленными координатами), и рассматривают прямоугольный треугольник с вершинами в выбранных точках, катеты которого параллельны осям координат. При этом если прямая образует с положительным направлением оси абсцисс острый угол, то искомый угловой коэффициент будет равен тангенсу соответствующего острого угла в построенном треугольнике. Если же этот угол тупой, то в ответе нужно записать число, противоположное найденному тангенсу (т. е. полученную величину со знаком «минус»). При этом лучше сразу в решении фиксировать знак углового коэффициента, чтобы потом не ошибиться, записывая ответ. Проконтролировать, правильно ли определён знак углового коэффициента, можно ещё и следующим образом: мысленно провести прямую, параллельную данной, через начало координат. Если полученная таким образом прямая лежит в первой и третьей четвертях, то угловой коэффициент положителен, если во второй и четвёртой, то отрицателен.

Сделаем ещё замечание о сравнении угловых коэффициентов двух прямых в том случае, когда эти коэффициенты одного знака. Пусть прямая l_1 задана уравнением $y = k_1x + b_1$, а прямая l_2 задана уравнением $y = k_2x + b_2$. Если оба угловых коэффициента этих прямых положительны и $k_1 > k_2$, это означает, что в случае прохождения этих прямых через одну точку M

• слева от M точки прямой l_1 расположены ниже точек прямой l_2, а справа — выше.

Если оба угловых коэффициента этих прямых отрицательны и $|k_1| > |k_2|$, это означает, что в случае прохождения этих прямых через одну точку M

• слева от M точки прямой l_1 расположены выше точек прямой l_2, а справа — ниже (см. рис. 4, 5).

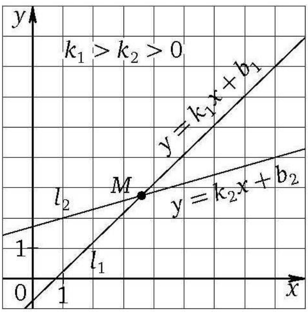


Рис. 4

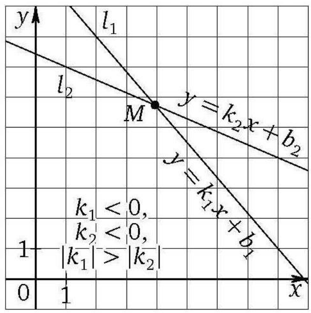


Рис. 5

Пример 5. Найдите угловой коэффициент прямой, изображённой на рис. 6.

Решение. Прямая образует с положительным направлением оси абсцисс острый угол. Поэтому её угловой коэффициент k, равный тангенсу этого угла, положителен. Для его вычисления выберем на прямой две точки, расположенные в узлах сетки. Пусть это будут, например, точки A и B (см. рис. 7). Обозначим буквой C точку пересечения прямых, проходящих через выбранные точки параллельно осям координат, как показано на рисунке. Поскольку при параллельном переносе одной из двух прямых угол между ней и второй прямой не

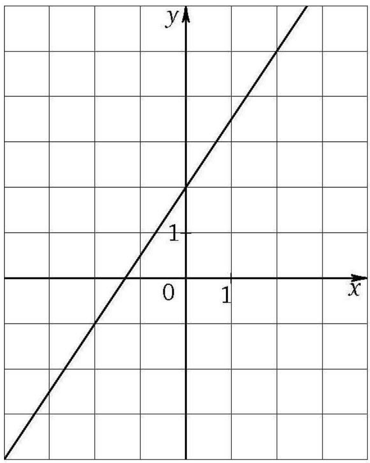


Рис. 6

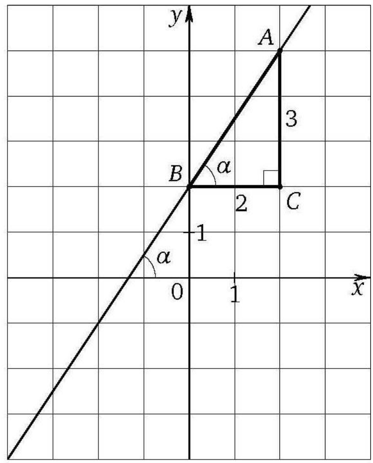


Рис. 7

меняется, искомый угол α будет равен углу ABC. Но тогда

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Ответ. 1,5.

Пример 6. Найдите угловой коэффициент прямой, изображённой на рис. 8.

Решение. Прямая, параллельная данной и проходящая через начало координат, очевидно, будет расположена во второй и четвёртой четвертях. Поэтому её угловой коэффициент k, равный в силу параллельности угловому коэффициенту данной прямой, будет отрицателен. Зна-

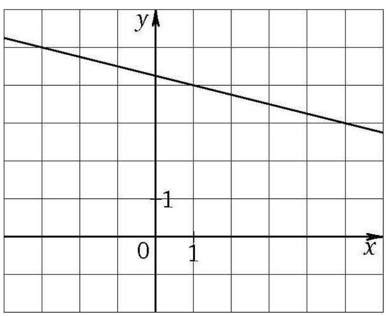


Рис. 8

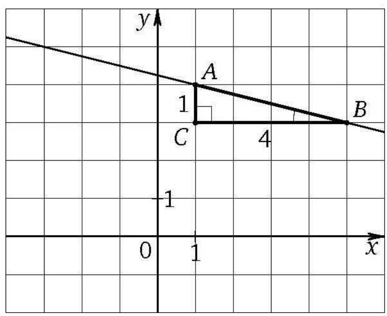


Рис. 9

чит, он будет противоположен тангенсу острого угла ABC (см. рис. 9), т. е. $k=-\operatorname{tg}\angle ABC$. Поскольку $\operatorname{tg}\angle ABC=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{4}=0{,}25$, получаем, что $k=-0{,}25$.

Ответ. $-0{,}25$.

Рассмотрим ещё несколько подготовительных задач. В этих задачах отсутствует экономическое содержание, но по сути они представляют собой математические модели задач оптимизации, которые после формализации условий с помощью уравнений и неравенств приводятся именно к таким алгебраическим задачам.

Пример 7. Найдите наибольшее возможное значение b, при котором прямая l имеет хотя бы одну общую точку с областью, ограниченной изображённым на рис. 10 прямоугольным треугольником AOB (включая стороны треугольника), если l задана уравнением:

1) $y=-\frac{4}{5}x+b$; 2) $y=-\frac{2}{5}x+b$.

Решение. Угловой коэффициент прямой AB равен

$$-\frac{AO}{OB}=-\frac{12}{20}=-\frac{3}{5}.$$

1. Прямая $y=-\frac{4}{5}x+b$ пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой $\frac{5b}{4}$. Модуль углового коэффициента прямой $y=-\frac{4}{5}x+b$ равен $\frac{4}{5}$ и больше модуля углового коэффициента прямой AB, равного $\frac{3}{5}$. Поскольку оба угловых коэффициента отрицательны, это означает, что угол между прямой $y=-\frac{4}{5}x+b$ и положительным направлением оси

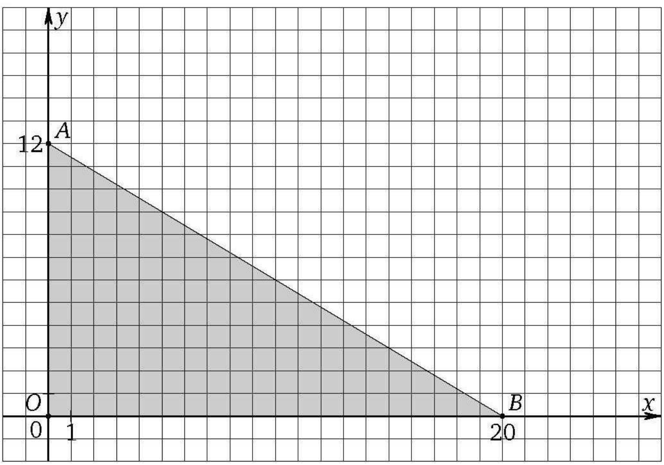


Рис. 10

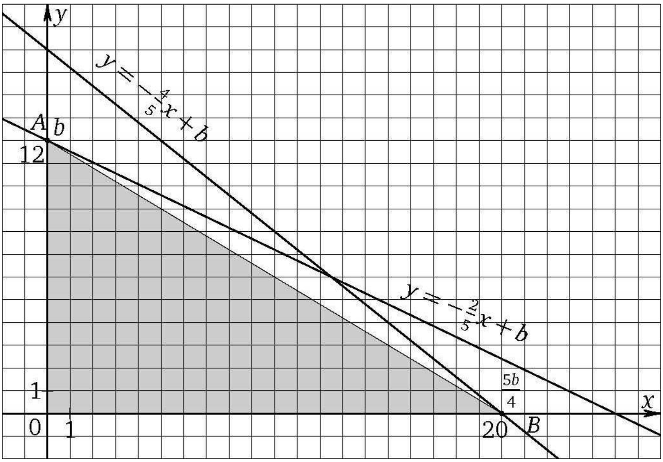


Рис. 11

абсцисс будет меньше угла между прямой AB и положительным направлением оси абсцисс. Поэтому наибольшее значение b получим, если прямая $y=-\frac{4}{5}x+b$ проходит через точку B (см. рис. 11). В этом случае $\frac{5b}{4}=20$, откуда $b=16$.

2. Прямая $y=-\frac{2}{5}x+b$ пересекает ось ординат в точке с ординатой b. Модуль углового коэффициента прямой $y=-\frac{2}{5}x+b$ равен $\frac{2}{5}$ и меньше модуля углового коэффициента прямой AB, равного $\frac{3}{5}$. Поскольку оба угловых коэффициента отрицательны, это означает, что угол между прямой $y=-\frac{2}{5}x+b$ и положительным направлением оси абсцисс будет больше угла между прямой AB и положительным направлением оси абсцисс. Поэтому наибольшее значение b получим, если прямая $y=-\frac{2}{5}x+b$ проходит через точку A (см. рис. 11). В этом случае $b=12$.

Ответ. 1) 16; 2) 12.

Замечание. Обратим внимание на вывод, который можно сделать для прямых с отрицательными угловыми коэффициентами на основании решённой задачи:

• если модуль углового коэффициента данной прямой меньше модуля углового коэффициента прямой AB, значение b будет максимальным, когда данная прямая проходит через точку A;

• если модуль углового коэффициента данной прямой больше модуля углового коэффициента прямой AB, значение b будет максимальным, когда данная прямая проходит через точку B.

Наглядное представление об этом можно получить, мысленно (или на листе бумаги) проведя прямую через точку B: если она пересечёт отрезок OA, то для получения искомого максимального значения нужно переместить эту прямую параллельно самой себе так, чтобы она проходила через точку A; в противном случае построенная прямая и будет искомой.

Для случая многоугольной области вариантов будет ещё больше.

Пример 8. Найдите наибольшее возможное значение b_i ($i \in \{1; 2; 3\}$), при котором прямая l имеет хотя бы одну общую точку с областью, ограниченной изображённым на рис. 12 четырёхугольником $OABC$ (включая стороны четырёхугольника), если l задана уравнением:

1) $y = -\frac{1}{3}x + b_1$; 2) $y = -\frac{7}{9}x + b_2$; 3) $y = -\frac{13}{9}x + b_3$.

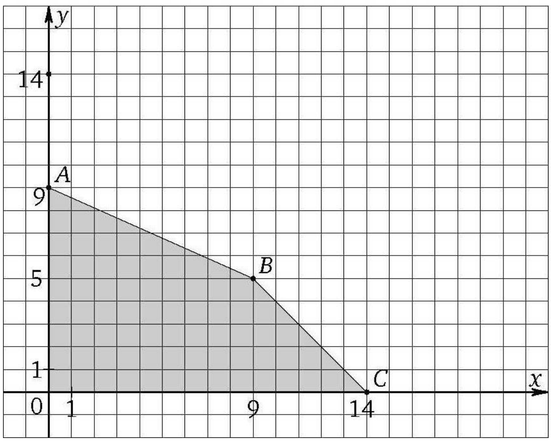


Рис. 12

Решение. Пусть прямая BC пересекает ось ординат в точке E. Угловой коэффициент прямой AB равен $-\frac{4}{9}$, угловой коэффициент прямой BC равен -1 (объясните почему).

1. Модуль углового коэффициента прямой $y = -\frac{1}{3}x + b_1$ равен $\frac{1}{3}$: он меньше модуля углового коэффициента прямой AB и меньше модуля углового коэффициента прямой BC. Поэтому если провести прямую $y = -\frac{1}{3}x + b_1$ через точку B, то она пересечёт ось ординат в точке, лежащей ниже точки A (см. рис. 13).

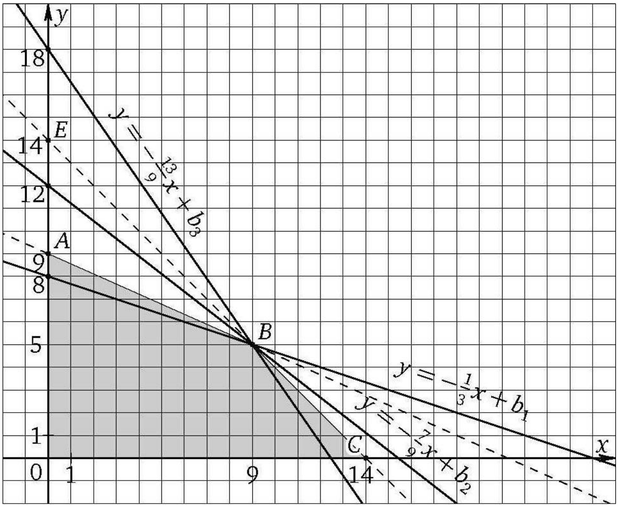


Рис. 13

Следовательно, наибольшее значение b_1 получим, если прямая $y=-\frac{1}{3}x+b_1$ проходит через точку A, т. е. если $b_1=9$.

2. Модуль углового коэффициента прямой $y=-\frac{7}{9}x+b_2$ равен $\frac{7}{9}$: он больше модуля углового коэффициента прямой AB и меньше модуля углового коэффициента прямой BC. Поэтому если провести прямую $y=-\frac{7}{9}x+b_2$ через точку B, то она пересечёт ось ординат в точке, лежащей выше точки A, но ниже точки E (см. рис. 13). Следовательно, наибольшее значение b_2 получим, если прямая $y=-\frac{7}{9}x+b_2$ проходит через точку B. В этом случае $5=-\frac{7}{9}\cdot 9+b_2$ откуда $b_2=12$.

3. Модуль углового коэффициента прямой $y=-\frac{13}{9}x+b_3$ равен $\frac{13}{9}$: он больше модуля углового коэффициента прямой AB и больше модуля углового коэффициента прямой BC. Поэтому если провести прямую $y=-\frac{13}{9}x+b_3$ через точку B, то она пересечёт ось ординат в точке, лежащей выше точки E (см. рис. 13). Следовательно, наибольшее значение b_3 получим, если прямая $y=-\frac{13}{9}x+b_3$ проходит через точку C. В этом случае $0=-\frac{13}{9}\cdot 14+b_3$ откуда $b_3=20\frac{2}{9}$.

Ответ. 1) $b_1=9$; 2) $b_2=12$; 3) $b_3=20\frac{2}{9}$.

Этот и предыдущий примеры показывают, насколько важно для правильной графической интерпретации уметь извлекать необходимую информацию из сравнения угловых коэффициентов данных прямых.

Пример 9. Найдите наибольшее и наименьшее возможные значения выражения $2x+5y$, если известно, что $2x+y \geqslant 12$, $x+4y \geqslant 20$, $3x+5y \leqslant 46$.

Решение. Обозначим $b=2x+5y$. Тогда $y=-\frac{2}{5}x+\frac{b}{5}$. Данные неравенства можно переписать в виде $y \geqslant -2x+12$, $y \geqslant -\frac{1}{4}x+5$, $y \leqslant -\frac{3}{5}x+\frac{46}{5}$. Воспользуемся графическими интерпретациями полученных неравенств. Неравенство вида $y \geqslant kx+b$ (соответственно неравенство вида $y \leqslant kx+b$) означает, что ему удовлетворяют все точки $(x; y)$ координатной плоскости Oxy, ордината каждой из которых не меньше (соответственно не больше) ординаты той точки прямой $y=kx+b$, которая имеет ту же абсциссу. Таким образом, множество всех точек $(x; y)$ координатной плоскости Oxy, координаты каждой из которых удовлетворяют неравенству $y \geqslant kx+b$ (соответственно неравенству вида $y \leqslant kx+b$), — это множество всех точек плоскости Oxy, которые расположены выше (соответственно ниже), т. е. над (соответственно под) прямой $y \geqslant kx+b$ и на самой этой прямой. Чтобы найти множество всех тех точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют каждому из данных неравенств, вычислим координаты точек попарного пересечения прямых $y=-2x+12$, $y=-\frac{1}{4}x+5$, $y=-\frac{3}{5}x+\frac{46}{5}$. Для этого решим уравнения:

$-2x+12=-\frac{3}{5}x+\frac{46}{5}$, откуда $x=2$, и тогда $y=-2\cdot 2+12=8$;

$-\frac{1}{4}x+5=-\frac{3}{5}x+\frac{46}{5}$, откуда $x=12$, и тогда $y=-\frac{1}{4}\cdot 12+5=2$;

$-2x+12=-\frac{1}{4}x+5$, откуда $x=4$, и тогда $y=-2\cdot 4+12=4$.

Таким образом, точкой пересечения прямых $y=-2x+12$ и $y=-\frac{3}{5}x+\frac{46}{5}$ является точка $A(2; 8)$, точкой пересечения прямых $y=-\frac{1}{4}x+5$ и $y=-\frac{3}{5}x+\frac{46}{5}$ является точка $B(12; 2)$, точкой пересечения прямых $y=-2x+12$ и $y=-\frac{1}{4}x+5$ является точка $C(4; 4)$. Искомое множество — треугольник ABC вместе с внутренней областью. Теперь задачу можно переформулировать так: найти наибольшее и наименьшее значения b, при которых прямая $y=-\frac{2}{5}x+\frac{b}{5}$ имеет хотя бы одну общую точку с областью координатной плоскости, ограниченной треугольником ABC (включая стороны треугольника). Прямая $y=-\frac{2}{5}x+\frac{b}{5}$ пересекает ось ординат в точке с ординатой $\frac{b}{5}$,

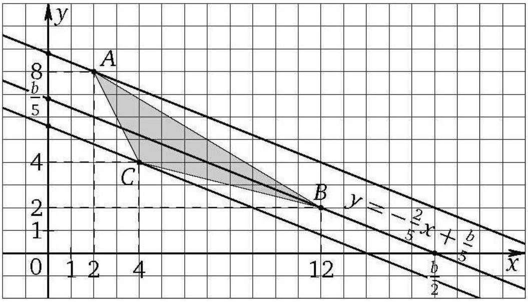


Рис. 14

а ось абсцисс — в точке с абсциссой $\frac{b}{2}$. Заметим, что модуль углового коэффициента прямой $y=-\frac{2}{5}x+\frac{b}{5}$ больше модуля углового коэффициента прямой BC $(y=-\frac{1}{4}x+5)$, но меньше модуля углового коэффициента прямой AB $(y=-\frac{3}{5}x+\frac{46}{5})$ и прямой BC $(y=-2x+12)$. На рис. 14 изображены три положения прямой $y=-\frac{2}{5}x+\frac{b}{5}$ для случаев, когда она проходит через одну из вершин треугольника ABC.

Наибольшее значение b достигается, если эта прямая проходит через точку A. В этом случае $b=2\cdot 2+5\cdot 8=44$. Наименьшее значение b, достигается, если эта прямая проходит через точку C. В этом случае $b=2\cdot 4+5\cdot 4=28$.

Ответ. $\max(2x+5y)=44$; $\min(2x+5y)=28$.

Рассмотренные примеры являются своего рода проводниками к тем идеям и методам, которые используются для решения некоторых задач оптимизации после формализации их условий с помощью неравенств и уравнений.

Перейдём к задачам оптимизации с линейной целевой функцией, в которых связи между переменными даются только линейными уравнениями и/или неравенствами. Составив математическую модель такой задачи, мы придём к традиционной с точки зрения элементарной математики — и притом одной из наиболее простых — задаче на метод областей (подобной одной из разобранных выше), поскольку будут даны система линейных неравенств и уравнений, определяющих условия производства продукции или услуги, и линейная функция с параметром, наибольшее или наименьшее значение которого надо найти. На координатной плоскости такая система задаёт треугольник или многоугольник, расположенный в первой координатной четверти (поскольку в подобных задачах речь идёт о неотрицательных величинах), а графиком линейной функции является прямая, с помощью параллельных переносов которой и можно найти требуемое значение параметра — например, максимальное значение, при котором указанная прямая будет иметь с построенной областью хотя бы одну общую точку. Эту прямую будем называть *целевой прямой*.

Пример 10. Малое предприятие выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется пять часов работы станка А и три часа работы станка Б, а для изготовления изделия второго типа требуется два часа работы станка А и четыре часа работы станка Б (станки могут работать в любой последовательности). По техническим причинам станок А может работать не более 150 часов в месяц, а станок Б — не более 132 часов в месяц. Каждое изделие первого типа приносит предприятию 300 д. е. прибыли, а каждое изделие второго типа — 200 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует выпускать для получения этой прибыли.

Решение. Обозначим через x число изделий первого типа, через y — число изделий второго типа, а через a — прибыль предприятия. Тогда $a = 300x + 200y$, откуда $y = -\frac{3}{2}x + \frac{a}{200}$, а условия производства даются системой неравенств

$$\begin{cases} 5x + 2y \leqslant 150, \\ 3x + 4y \leqslant 132, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \end{cases}$$

где x и y — целые числа. На координатной плоскости Oxy система неравенств задаёт четырёхугольник $OABC$ с внутренней областью, ограниченной осями координат и прямыми $y = -\frac{5}{2}x + 75$ и $y = -\frac{3}{4}x + 33$ (см. рис. 15).

Модуль углового коэффициента прямой $y = -\frac{3}{2}x + \frac{a}{200}$ равен $\frac{3}{2}$: он больше модуля углового коэффициента прямой AB, равного $\frac{3}{4}$, но меньше модуля углового коэффициента прямой BC, равного $\frac{5}{2}$. Три различных положения прямой $y = -\frac{3}{2}x + \frac{a}{200}$ обозначены на рисунке цифрами: положение (1) соответствует значению $a = 0$, положение (3) соответствует наибольшему возможному значению a, положе-

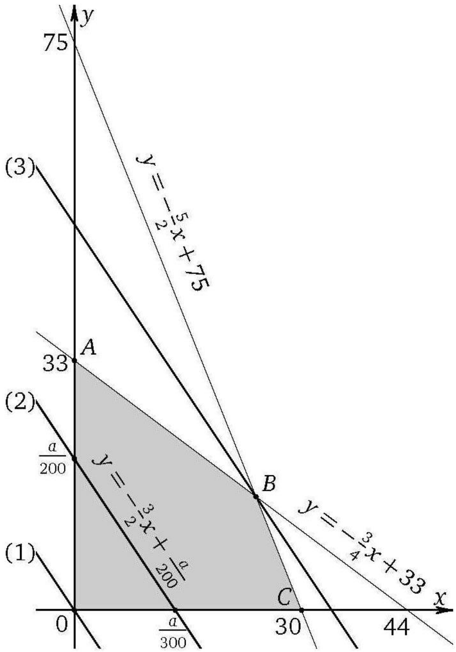


Рис. 15

ние (2) соответствует промежуточному между первыми двумя значению a. Прямая $y=-\frac{3}{2}x+\frac{a}{200}$ пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой $\frac{a}{300}$, а ось ординат — в точке с ординатой $\frac{a}{200}$ (напомним, что $a \geqslant 0$). Наибольшее значение каждой из этих величин соответствует максимальной прибыли a и в данном случае достигается, если прямая $y=-\frac{3}{2}x+\frac{a}{200}$ проходит через точку B — точку пересечения прямых $y=-\frac{5}{2}x+75$ и $y=-\frac{3}{4}x+33$, абсцисса и ордината которой находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} y=-\frac{5}{2}x+75, \\ y=-\frac{3}{4}x+33 \end{cases}$$

и равны соответственно 24 и 15. Подставив эти абсциссу и ординату в уравнение прямой $y=-\frac{3}{2}x+\frac{a}{200}$, находим $a=10\,200$.

Ответ. 24 изделия первого типа; 15 изделий второго типа; максимальная прибыль равна 10 200 д. е.

Замечание. Для упрощения вычислений можно было в рассмотренной задаче положить $b=\frac{a}{200}$ и рассмотреть в качестве целевой прямой прямую $y=-\frac{3}{2}x+b$. Ясно, что наибольшее значение b соответствует наибольшему значению a и наоборот. После вычисления максимального значения b осталось бы найти искомое значение $a=200b$.

В более сложных случаях координаты точки B могут оказаться дробными числами. В таких случаях нужно найти ближайшие к B точки четырёхугольника $OABC$ или его внутренней области (разумеется, это справедливо и для любого другого многоугольника), имеющие целые координаты (напомним, что такие точки называются опорными), выбрать ту из них, для которой прямая $y=-\frac{3}{2}x+\frac{a}{200}$ (или аналогичная ей) пересекает ось абсцисс (или ось ординат) в точке, наиболее удалённой от начала координат, после чего исследовать, будет ли решение, полученное с помощью этой прямой, оптимальным.

5.3. Линейные целевые функции с нецелочисленными точками экстремума

Рассмотрим примеры решения задач на линейную целевую функцию с нецелочисленной точкой экстремума. Наиболее универсальным и доказательным способом решения таких задач является, по мнению автора, метод областей.

Пример 11. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём небольшой апарт-отель. В отеле могут быть стандартные номера-апартаменты площадью 40 квадратных метров и номера-апартаменты «люкс» площадью 80 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под апартаменты, равна 700 квадратным метрам. Предприниматель может поделить эту площадь между апартаментами различных типов, как хочет. Стандартные апартаменты будут приносить отелю 4000 рублей в сутки за номер, апартаменты «люкс» — 10 000 рублей в сутки за номер. Какую наибольшую сумму (в рублях) сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

Решение. Обозначим через x число стандартных апартаментов, через y — число апартаментов «люкс», через a — суточный доход предпринимателя от аренды апартаметов. Тогда

$$\begin{cases} 40x+80y\leqslant 700, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} 2x+4y\leqslant 35, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y\leqslant -\frac{1}{2}x+\frac{35}{4}, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0. \end{cases}$$

При этом $a = 4000x + 10\,000y = 10\,000\left(\frac{2}{5}x + y\right)$. Обозначим $\frac{a}{10\,000}$ буквой b. Ясно, что доход a будет максимальным при максимальном b. Итак $b = \frac{2}{5}x + y$, откуда $y = -\frac{2}{5}x + b$. Таким образом,

$$y \leqslant -\frac{1}{2}x + \frac{35}{4}; \quad y = -\frac{2}{5}x + b; \quad x \geqslant 0; \quad y \geqslant 0; \quad b \geqslant 0.$$

Неравенства $y \leqslant -\frac{1}{2}x + \frac{35}{4}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ задают в первой четверти координатной плоскости Oxy треугольник AOB вместе с его внутренней областью, ограниченной прямой $y = -\frac{1}{2}x + \frac{35}{4}$ и осями координат. Координаты вершин треугольника: $A\left(0; \frac{35}{4}\right)$, $O(0; 0)$, $B\left(\frac{35}{2}; 0\right)$. Целевая прямая $y = -\frac{2}{5}x + b$ пересекает оси координат в точках $(0; b)$ и $\left(\frac{5b}{2}; 0\right)$. Требуется найти максимальное значение $b \geqslant 0$, при котором прямая $y = -\frac{2}{5}x + b$ будет иметь с указанной областью хотя бы одну общую точку с целочисленными координатами. Поскольку модуль углового коэффициента целевой прямой меньше модуля углового коэффициента прямой AB, значение b будет максимальным, если целевая прямая проходит через точку A. Но ордината точки A не является целым числом, она равна $\frac{35}{4} = 8\frac{3}{4}$. Максимальная целая ордината для точек указанной области равна 8 (см. рис. 16). Выберем точку $(0; 8)$ в качестве опорной. Тогда уравнением опорной прямой будет $y = -\frac{2}{5}x + 8$.

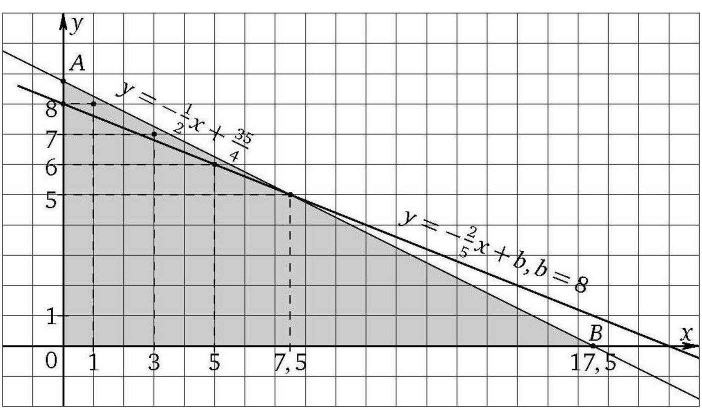


Рис. 16

Заметим, что в области, ограниченной осью ординат и прямыми $y=-\frac{2}{5}x+8$ и $y=-\frac{1}{2}x+\frac{35}{4}$ (включая эти прямые), окажутся и другие точки с целыми координатами (на рисунке эти точки выделены). Найдём координаты этих точек. Сначала найдём точку пересечения прямых $y=-\frac{2}{5}x+8$ и $y=-\frac{1}{2}x+\frac{35}{4}$, решив уравнение $-\frac{2}{5}x+8=-\frac{1}{2}x+\frac{35}{4}$, откуда $x=\frac{15}{2}=7{,}5$. Тогда $y=-\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{2}+\frac{35}{4}=5$. Следовательно, допустимыми ординатами являются 8; 7; 6. Для точек с одинаковыми ординатами наибольшее значение b будет у той из целевых прямых $y=-\frac{2}{5}x+b$, которая проходит через точку с большей абсциссой. Найдём соответствующие абсциссы:

- если $y=8$, то $2x+4\cdot 8\leqslant 35$, откуда $x\leqslant\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$, и максимальным неотрицательным целым решением последнего неравенства является $x=1$;
- если $y=7$, то $2x+4\cdot 7\leqslant 35$, откуда $x\leqslant\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$, и максимальным неотрицательным целым решением последнего неравенства является $x=3$;
- если $y=6$, то $2x+4\cdot 6\leqslant 35$, откуда $x\leqslant\frac{11}{2}=5\frac{1}{2}$, и максимальным неотрицательным целым решением последнего неравенства является $x=5$.

Вычислим значения целевой функции в найденных точках. Для наглядности приведём результаты вычислений в виде таблицы.

x	y	$a=4000x+10\,000y$
1	8	$a=4000\cdot 1+10\,000\cdot 8=84\,000$
3	7	$a=4000\cdot 3+10\,000\cdot 7=82\,000$
5	6	$a=4000\cdot 5+10\,000\cdot 6=80\,000$

Ответ. 84 000.

Замечание 1. В некоторых случаях выбор оптимального решения можно упростить, основываясь на следующих рассуждениях. Для любых двух точек $M(x_1;y_1)$ и $N(x_2;y_2)$, где $x_2>x_1$, $y_2<y_1$, наибольшее значение b зависит от того, как связаны между собой угловой коэффициент k целевой прямой $y=kx+b$ и угловой коэффициент прямой MN (напомним, что в данном случае речь идёт об отрицательных угловых коэффициентах). Если модуль углового коэффициента целевой прямой больше модуля углового коэффициента прямой MN (равного в данном случае $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$), то наибольшее значение b получим в случае, когда целевая прямая проходит через точку N (в этом случае $b_1>b_2$; см. рис. 17). Если модуль углового коэффициента целевой

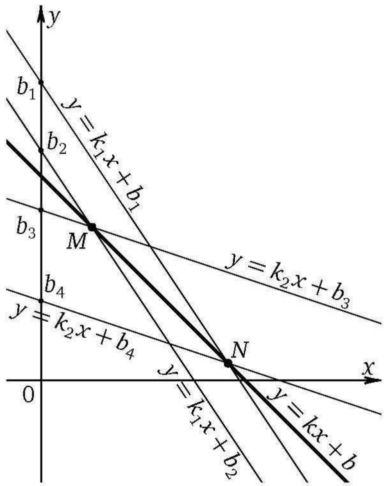


Рис. 17

прямой меньше модуля углового коэффициента прямой MN, то наибольшее значение b получим в случае, когда целевая прямая проходит через точку M $(b_3 > b_4)$.

Если точек несколько, то, возможно, сравнивать угловые коэффициенты соответствующих прямых с угловым коэффициентом целевой прямой будет дольше, чем просто вычислить значения b в этих точках, как это и было сделано при решении последнего примера.

Замечание 2. Вторым способом решения задачи является логический перебор (см. пример 4).

Заметим ещё, что в рассмотренной задаче одинаковый доход дают набор из 8 апартаментов «люкс» и 0 стандартных апартаментов и набор из 6 апартаментов «люкс» и 5 стандартных апартаментов. Если по каким-то причинам нужно было бы выбирать оптимальное решение из этих двух вариантов, предпринимателю пришлось бы учитывать дополнительные факторы. С одной стороны, 8 апартаментов могут быть дешевле в обслуживании, чем 11; с другой стороны, более дешёвые апартаменты проще сдать в аренду.

Решённый пример позволяет указать пошаговый алгоритм решения подобных задач, т. е. задач с оптимальной целевой прямой, проходящей через вершину A прямоугольного треугольника AOB, ордината которой не является целочисленной. Напомним, что ближайшая к A точка треугольника AOB (или его внутренней области) называется *опорной точкой*. Целевую прямую, проходящую через опорную точку, будем называть *опорной целевой прямой* (или просто *опорной прямой*). Приведём этот алгоритм.

1. Составляем математическую модель задачи, получив необходимые неравенства и уравнение целевой прямой.

2. Строим прямоугольный треугольник AOB на плоскости Oxy и находим ординату опорной точки.

3. Получаем уравнение опорной целевой прямой и строим её.

4. Вычисляем координаты точки пересечения опорной прямой, построенной в п. 3, с прямой AB и находим целые ординаты, заключённые между ординатами опорной точки и найденной точки пересечения.

5. Для ординаты опорной точки и каждой из найденных в п. 4 ординат вычисляем наибольшую возможную целую абсциссу. Получаем набор точек — «претендентов» на оптимальное решение.

6. Вычисляем значения целевой функции в найденных в п. 5 точках и выбираем наибольшее их них.

Если модуль углового коэффициента целевой прямой больше модуля углового коэффициента прямой AB, значение b будет максимальным, когда целевая прямая проходит через точку B. В этом случае соответственно корректируется и алгоритм.

Метод решения, основанный на приведённом алгоритме, назовём *методом опорных точек*.

Обратим внимание на то, что в большинстве случаев разумный масштаб сделанного рисунка не позволит визуально определить искомые точки-«претенденты»; их обязательно нужно находить с помощью данных неравенств, как это и было сделано при решении примера 11. «Обоснование» выбора таких точек с помощью рисунка не будет засчитано экспертами, проверяющими задания с развёрнутым решением ЕГЭ по математике, и не позволит получить максимальный балл за эту задачу. Почему это так, проиллюстрируем следующей задачей, которую решим с помощью приведённого алгоритма.

Пример 12. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 квадратных метров и номера «люкс» площадью 36 квадратных метров каждый. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1100 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 3000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 5000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму (в рублях) сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

Решение. 1. Обозначим через x число стандартных номеров, через y — число номеров «люкс», через a — суточный доход предпринимателя от аренды номеров. Тогда

$$\begin{cases} 27x + 36y \leqslant 1100, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 3x + 4y \leqslant \frac{1100}{9}, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y \leqslant -\frac{3}{4}x + \frac{275}{9}, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

При этом $a = 3000x + 5000y = 5000\left(\frac{3}{5}x + y\right)$. Обозначим $\frac{a}{5000}$ буквой b. Ясно, что доход a будет максимальным при максимальном b. Итак $b = \frac{3}{5}x + y$, откуда $y = -\frac{3}{5}x + b$ — уравнение целевой прямой. Таким образом,

$$y \leqslant -\frac{3}{4}x + \frac{275}{9}; \quad y = -\frac{3}{5}x + b; \quad x \geqslant 0; \quad y \geqslant 0; \quad b \geqslant 0.$$

2. Заметим, что $\frac{275}{9} = 30\frac{5}{9}$. Неравенства $y \leqslant -\frac{3}{4}x + 30\frac{5}{9}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ задают в первой четверти координатной плоскости Oxy прямоугольный треугольник AOB вместе с его внутренней областью, ограниченной прямой $y = -\frac{3}{4}x + 30\frac{5}{9}$ и осями координат. Координаты вершин треугольника: $A\left(0; 30\frac{5}{9}\right)$, $O(0; 0)$, $B\left(40\frac{20}{27}; 0\right)$ (см. рис. 18).

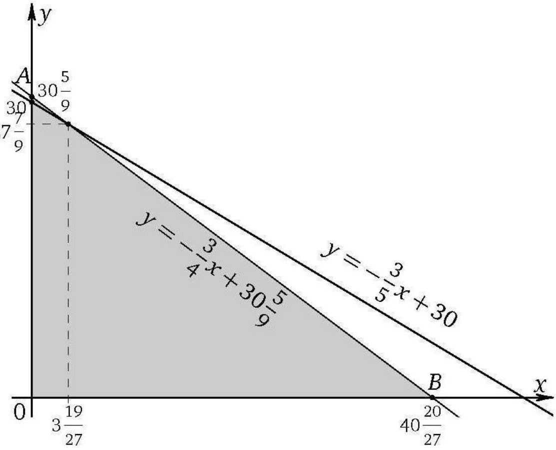


Рис. 18

3. Требуется найти максимальное значение $b \geqslant 0$, при котором целевая прямая будет иметь с указанной областью хотя бы одну общую точку с целочисленными координатами. Поскольку модуль углового коэффициента целевой прямой меньше модуля углового коэффициента прямой AB, значение b будет максимальным, если целевая прямая проходит через точку A. Но ордината точки A не является целым числом. Опорной точкой в данном случае будет точка $(0; 30)$, а уравнением опорной целевой прямой — уравнение $y = -\frac{3}{5}x + 30$.

4. Найдём координаты точки пересечения опорной прямой и прямой AB. Для этого решим уравнение

$$-\frac{3}{5}x + 30 = -\frac{3}{4}x + 30\frac{5}{9},$$

откуда $x = \frac{100}{27} = 3\frac{19}{27}$. Тогда $y = -\frac{3}{5} \cdot \frac{100}{27} + 30 = 27\frac{7}{9}$. Следовательно, допустимыми ординатами являются 30, 29, 28. Для точек с одинаковыми ординатами наибольшее значение b будет у той из целевых прямых $y = -\frac{3}{5}x + b$, которая проходит через точку с большей абсциссой.

5. Найдём соответствующие абсциссы.

Если $y = 30$, то $27x + 36 \cdot 30 \leqslant 1100$, откуда $x \leqslant \frac{20}{27}$. Единственным неотрицательным целым решением последнего неравенства является $x = 0$.

Если $y = 29$, то $27x + 36 \cdot 29 \leqslant 1100$, откуда $x \leqslant 2\frac{2}{27}$. Максимальным неотрицательным целым решением последнего неравенства является $x = 2$.

Если $y = 28$, то $27x + 36 \cdot 28 \leqslant 1100$, откуда $x \leqslant 3\frac{11}{27}$. Максимальным неотрицательным целым решением последнего неравенства является $x = 3$.

6. Вычислим значения целевой функции в найденных точках. Для наглядности приведём результаты вычислений в виде таблицы.

x	y	$a = 3000x + 5000y$
0	30	$a = 3000 \cdot 0 + 5000 \cdot 30 = 150\,000$
2	29	$a = 3000 \cdot 2 + 5000 \cdot 29 = 151\,000$
3	28	$a = 3000 \cdot 3 + 5000 \cdot 28 = 149\,000$

Ответ. 151 000.

Заметим, что использование приведённого алгоритма позволяет, вообще говоря, обойтись без рисунка. При этом в п. 2 достаточно просто описать прямоугольный треугольник AOB, как это сделано в решении, а в п. 3 — получить уравнение опорной целевой прямой без её построения. Тем не менее, для большей наглядности рисунок всё-таки лучше сделать. Разумеется, и эту задачу можно было решить с помощью логического перебора (по аналогии с решением примера 4).

В случае многоугольной области (например, аналогичной рассмотренной в примере 7) исследование может оказаться более сложным, а логический перебор — слишком разветвлённым. Если наибольшее значение целевой функции достигается в точке, хотя бы одна из координат которой не является целой, обычно сначала приходится находить две опорные точки, после чего выбирать ту из них, для которой опорная прямая будет пересекать ось ординат в точке с большей ординатой. После выбора такой опорной точки и соответствующей ей опорной прямой нужно установить, будут ли находиться в области, ограниченной этой прямой (и расположенной выше неё) и сторонами многоугольника, точки с целочисленными координатами. Если таких точек нет, то оптимальное решение даёт выбранная опорная точка. Если такие точки есть, оптимальное решение даёт одна из них.

Пример 13. Малое предприятие выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется 9 часов работы станка А и 11 часов работы станка Б. Для изготовления изделия второго типа требуется 13 часов работы станка А и 3 часа работы станка Б (станки могут работать в любой последовательности). По техническим причинам станок А может работать не более 130 часов в месяц, а станок Б — не более 88 часов в месяц. Каждое изделие первого типа приносит предприятию 22 000 д. е. прибыли, а каждое изделие второго типа — 26 000 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует выпускать для получения этой прибыли.

Решение. 1. Пусть x — число изделий первого типа, y — число изделий второго типа, a — прибыль предприятия. Тогда $a = 22\,000x + 26\,000y$. Обозначим $\frac{a}{26\,000}$ буквой b. Тогда $b = \frac{11}{13}x + y$. Ясно, что доход a будет максимальным при максимальном b. При этом $y = -\frac{11}{13}x + b$ — уравнение целевой прямой. Условия производства даются системой неравенств

$$\begin{cases} 9x + 13y \leqslant 130, \\ 11x + 3y \leqslant 88, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{где } x \text{ и } y \text{ — целые числа.}$$

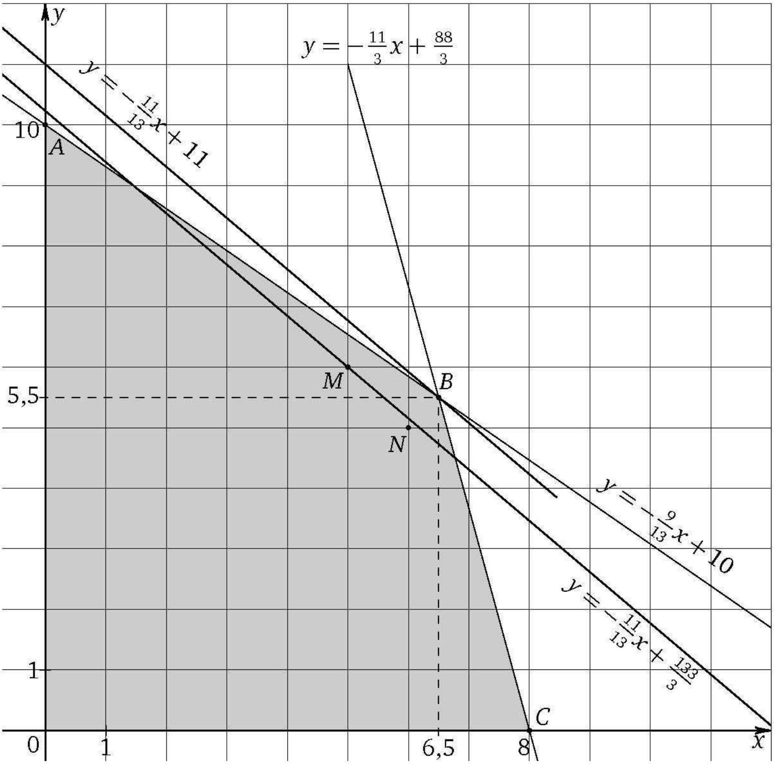


Рис. 19

2. На координатной плоскости Oxy полученная система неравенств задаёт четырёхугольник $OABC$ с внутренней областью, ограниченной осями координат и прямыми $y=-\frac{9}{13}x+10$ и $y=-\frac{11}{3}x+\frac{88}{3}$ (см. рис. 19).

Прямая $y=-\frac{11}{13}x+b$ пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой $\frac{13b}{11}$, а ось ординат — в точке с ординатой b (напомним, что $b \geqslant 0$). Наибольшее значение каждой из этих величин соответствует максимальной прибыли a и достигается, если прямая $y=-\frac{11}{13}x+b$ проходит через точку B — точку пересечения прямых $y=-\frac{9}{13}x+10$ и $y=-\frac{11}{3}x+\frac{88}{3}$. Если хотя бы одна из координат точки B не будет целой, для решения задачи придётся использовать метод опорных точек. Абсцисса и ордината точки B находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} y = -\frac{9}{13}x + 10, \\ y = -\frac{11}{3}x + \frac{88}{3} \end{cases}$$

и равны соответственно 6,5 и 5,5, т. е. не являются целыми. Применим метод опорных точек. Ближайшими к B точками с целыми ординатами являются точки с ординатами 5 и 6. Если $y = 5$, то должны выполняться неравенства

$$\begin{cases} 9x + 13 \cdot 5 \leqslant 130, \\ 11x + 3 \cdot 5 \leqslant 88, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x \leqslant 7\frac{2}{9}, \\ x \leqslant 6\frac{7}{11}. \end{cases}$$

Наибольшим целым решением последней системы является $x = 6$. Если $y = 6$, то должны выполняться неравенства

$$\begin{cases} 9x + 13 \cdot 6 \leqslant 130, \\ 11x + 3 \cdot 6 \leqslant 88, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x \leqslant 5\frac{7}{9}, \\ x \leqslant 6\frac{4}{11}. \end{cases}$$

Наибольшим целым решением последней системы является $x = 5$. Таким образом, в качестве опорных точек будем рассматривать точки $M(5; 6)$ и $N(6; 5)$.

3. Выберем из найденных опорных точек ту, которая соответствует большему значению целевой функции, т. е. большему значению b (см. замечание 1 к примеру 11). Модуль углового коэффициента прямой MN равен $\frac{6-5}{6-5} = 1$. Модуль углового коэффициента целевой прямой $y = -\frac{11}{13}x + b$ равен $\frac{11}{13} < 1$. Поэтому искомой точкой будет точка M. Найдём уравнение опорной целевой прямой, проходящей через точку $M(5; 6)$. Для этого подставим координаты точки в уравнение прямой: $6 = -\frac{11}{13} \cdot 5 + b$, откуда $b = \frac{133}{13} = 10\frac{3}{13}$. Уравнение опорной целевой прямой: $y = -\frac{11}{13}x + \frac{133}{13}$.

4. Остаётся установить, будут ли находиться в области, ограниченной найденной опорной прямой (и расположенной не ниже неё) и сторонами многоугольника, другие точки с целочисленными координатами. Если таких точек нет, то оптимальное решение даёт выбранная опорная точка M. Если такие точки есть, оптимальное решение даёт одна из них. Найдём точки пересечения опорной прямой

с прямыми $y=-\frac{9}{13}x+10$ и $y=-\frac{11}{3}x+\frac{88}{3}$. Для этого решим уравнения

$$-\frac{11}{13}x+\frac{133}{13}=-\frac{9}{13}x+10 \quad \text{и} \quad -\frac{11}{13}x+\frac{133}{13}=-\frac{11}{3}x+\frac{88}{3}.$$

Корнем первого уравнения является $x=\frac{3}{2}$, и тогда

$$y=-\frac{9}{13}\cdot\frac{3}{2}+10=\frac{233}{26}=8\frac{25}{26}.$$

Корнем второго уравнения является $x=\frac{149}{22}=6\frac{17}{22}$, и тогда

$$y=-\frac{11}{3}\cdot\frac{149}{22}+\frac{88}{3}=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}.$$

Таким образом, в область, ограниченную опорной прямой и прямыми $y=-\frac{9}{13}x+10$ и $y=-\frac{11}{3}x+\frac{88}{3}$, могут попасть только точки с целыми ординатами 5, 6, 7, 8. Исключив уже рассмотренные точки с ординатами 5 и 6, получим всего две точки с целыми ординатами, которые могут оказаться в указанной области. Если $y=7$, то должны выполняться неравенства

$$\begin{cases} 9x+13\cdot 7\leqslant 130,\\ 11x+3\cdot 7\leqslant 88,\\ 11x+13\cdot 7\geqslant 133,\end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x\leqslant 4\frac{1}{3},\\ x\leqslant 6\frac{1}{11},\\ x\geqslant 3\frac{9}{11}.\end{cases}$$

Единственным целым решением последней системы является $x=4$. Если $y=8$, то должны выполняться неравенства

$$\begin{cases} 9x+13\cdot 8\leqslant 130,\\ 11x+3\cdot 8\leqslant 88,\\ 11x+13\cdot 8\geqslant 133,\end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x\leqslant 2\frac{8}{9},\\ x\leqslant 5\frac{9}{11},\\ x\geqslant 2\frac{7}{11}.\end{cases}$$

Полученная система не имеет целых решений. Таким образом, области, ограниченной опорной целевой прямой (и расположенной выше неё) и сторонами многоугольника, принадлежит ровно одна точка с целыми координатами $x=4$ и $y=7$. Именно эта точка и даёт оптимальное решение задачи.

5. Вычислим значение целевой функции в найденной точке:

$$a=2000(11x+13y)=2000(11\cdot 4+13\cdot 7)=270\,000.$$

Ответ. 4 изделия первого типа; 7 изделий второго типа; максимальная прибыль равна 270 000 д. е.

5.4. Нелинейные целевые функции с целочисленными точками экстремума

Перейдём к задачам, в которых целевая функция не является линейной. Сначала рассмотрим несколько подготовительных алгебраических задач. К таким (и схожим с ними задачам) приводят математические модели многих «школьных» задач оптимизации с нелинейными целевыми функциями. Поэтому идеи и методы, которые применяются при их решении, являются базовыми для решения большой части задач оптимизации, встречающихся в вариантах ЕГЭ по математике и школьных диагностических работ.

Пример 14. Найдите наименьшее значение выражения $4x^2+9y^2$, если $2x+3y=20$.

Решение. Пусть $a=4x^2+9y^2$. Из условия задачи следует, что $3y=20-2x$. Тогда $a=4x^2+(20-2x)^2=8(x^2-10x+50)$. Для решения задачи остаётся найти наименьшее значение квадратичной функции $y=x^2-10x+50$. Оно достигается в точке $x_0=\frac{10}{2}=5$ и равно $5^2-10\cdot 5+50=25$. При этом $a=8\cdot 25=200$.

Ответ. 200.

Пример 15. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $2x+3y$, если $4x^2+9y^2=50$.

Решение. Пусть $a=2x+3y$. Тогда $3y=a-2x$. Поскольку $4x^2+{}+9y^2=50$, получим, что

$$4x^2+(a-2x)^2=50, \quad \text{откуда} \quad 8x^2-4ax+a^2-50=0.$$

Для решения задачи остаётся найти наибольшее и наименьшее значения a, при которых квадратное уравнение $8x^2-4ax+a^2-50=0$ имеет хотя бы один корень. Последнее будет выполнено в том и только том случае, если дискриминант D уравнения неотрицателен, или (что то же) если $\frac{D}{4}\geqslant 0$. В данном случае $\frac{D}{4}=4a^2-8(a^2-50)=4(100-a^2)$, откуда $100-a^2\geqslant 0$, т. е. $a^2\leqslant 100$, и, значит, $a\in[-10; 10]$. Поэтому $\min(2x+3y)=-10$, $\max(2x+3y)=10$.

Ответ. $\min(2x+3y)=-10$, $\max(2x+3y)=10$.

Пример 16. Найдите наибольшее значение выражения $3\sqrt{4t+5}+{}+4\sqrt{31-4t}$. При каком значении t оно достигается?

Решение. Данное выражение определено при $-\frac{5}{4}\leqslant t\leqslant\frac{31}{4}$, т. е. при $t\in[-1{,}25; 7{,}75]$. Стандартный способ решения задачи основывается на исследовании функции $a=3\sqrt{4t+5}+4\sqrt{31-4t}$ на отрезке $[-1{,}25; 7{,}75]$ с помощью производной. Покажем, как можно решать подобные задачи с помощью векторной алгебры. Введём векторы

$\vec{m}\{3; 4\}$ и $\vec{n}\{\sqrt{4t+5}; \sqrt{31-4t}\}$. Вычислим длины этих векторов:

$$|\vec{m}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5, \quad |\vec{n}| = \sqrt{(\sqrt{4t+5})^2+(\sqrt{31-4t})^2} = 6.$$

Тогда

$$a = \vec{m}\cdot\vec{n} = |\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}).$$

Поскольку $\cos(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) \leqslant 1$, наибольшее значение a будет равно $|\vec{m}|\cdot|\vec{n}| = 5\cdot 6 = 30$. Оно достигается, если $\cos(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = 1$, т. е. $\widehat{\vec{m}, \vec{n}} = 0$. Последнее возможно, только если векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ сонаправлены, т. е. если отношения их соответствующих координат равны одному и тому же положительному числу — отношению длин этих векторов: $\frac{\sqrt{4t+5}}{3} = \frac{\sqrt{31-4t}}{4} = \frac{6}{5}$, откуда $t = 1{,}99$.

Ответ. $\max\left(3\sqrt{4t+5}+4\sqrt{31-4t}\right) = 30$ при $t = 1{,}99$.

При использовании этого метода нужно вводить векторы так, чтобы их длины не зависели от переменной, а были равны конкретным числам. Значения соответствующих координат вводимых векторов при этом должны быть числами одного знака при любых допустимых значениях переменной. Обратим ещё внимание на то, что в задачах на нахождение наибольших (наименьших) значений выражений или функций нужно обязательно доказывать, что эти значения достигаются. Для этого достаточно найти значения переменной, при которых данное выражение или функция принимает наибольшее (наименьшее) значение, как это и было сделано при решении последнего примера.

Перейдём к задачам оптимизации, начав с задачи, в которой целевая функция задана с помощью уравнения второй степени. Этот пример является показательным в том смысле, что его можно решать разными способами, три из которых и будут приведены ниже.

Ответ. 500.

Пример 17. Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара, а если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей. Григорий готов выделять 5 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение. Пусть на заводе, расположенном в первом городе, рабочие трудятся x^2 часов, а на заводе, расположенном во втором городе, — y^2 часов. Тогда за неделю будет произведено $3x+4y$ единиц товара, а затраты на оплату труда составят $500(x^2+y^2)$ рублей. Обозначим $3x+4y$ через a, т. е. введём целевую функцию. Таким образом, нужно найти наибольшее неотрицательное $a=3x+4y$ при условии $500(x^2+y^2)=5\,000\,000$, откуда $y=\dfrac{a-3x}{4}$ (или $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{a}{4}$) и $x^2+y^2=10\,000$, где $0\leqslant x\leqslant 100$, $0\leqslant y\leqslant 100$ (объясните почему).

Как уже отмечалось, задачу можно решить несколькими способами, три из которых и будут рассмотрены ниже.

Первый способ — метод областей: уравнение $x^2+y^2=10\,000$ является уравнением окружности с центром в начале координат и радиусом 100 на плоскости Oxy, а уравнение $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{a}{4}$ — уравнением прямой, пересекающей оси координат в точках $A\left(0;\dfrac{a}{4}\right)$ и $B\left(\dfrac{a}{3};0\right)$. Требуется найти наибольшее значение параметра a, при котором прямая

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{a}{4}$$

имеет с окружностью хотя бы одну общую точку. Ясно, что в силу условий $x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$ наибольшему значению a будет отвечать случай касания прямой и окружности в точке K (см. рис. 20) первой координатной четверти (указанные условия позволяют рассматривать, вообще говоря, только часть окружность, расположенную в этой четверти). Искомое значение a можно найти, записав площадь S треугольника OAB двумя разными способами: как полупроизведение катетов $OA=\dfrac{a}{4}$ и $OB=\dfrac{a}{3}$ и как полупроизведение высоты OK (равной радиусу

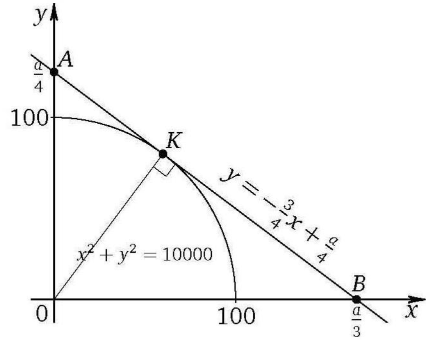


Рис. 20

окружности) на гипотенузу

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \frac{5a}{12}.$$

Отсюда $\frac{a}{4} \cdot \frac{a}{3} = 100 \cdot \frac{5a}{12}$ и $a = 500$.

Второй способ аналогичен тому, что был использован при решении примера 15, и заключается в подстановке $y = -\frac{3}{4}x + \frac{a}{4}$ в уравнение $x^2 + y^2 = 10\,000$. После такой подстановки получим квадратное уравнение относительно переменной x. Требуется найти наибольшее значение a, при котором уравнение имеет хотя бы один корень. Это значение находится из условия неотрицательности дискриминанта уравнения. Такой метод решения подобных задач иногда называют *методом введения параметра*. Приведём решение, выполнив указанную подстановку:

$$x^2 + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{a}{4}\right)^2 = 10\,000, \quad \text{откуда} \quad x^2 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{3}{8}ax + \frac{a^2}{16} = 10\,000.$$

После преобразований получим $25x^2 - 6ax + a^2 - 160\,000 = 0$. Полученное уравнение имеет хотя бы один корень, только если его дискриминант D неотрицателен, или (что то же) если $\frac{D}{4} \geqslant 0$. Поскольку $\frac{D}{4} = 9a^2 - 25(a^2 - 160\,000) = 16(250\,000 - a^2)$, из условия неотрицательности дискриминанта получаем неравенство $250\,000 - a^2 \geqslant 0$, откуда $a^2 \leqslant 250\,000$, т. е. $|a| \leqslant 500$. Значит, искомым наибольшим значением является $a = 500$. В этом случае $D = 0$ и $x = \frac{3a}{25} = 60$;

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{a}{4} = -\frac{3}{4} \cdot 60 + \frac{500}{4} = 80.$$

Эти значения, очевидно, удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant x \leqslant 100$ и $0 \leqslant y \leqslant 100$.

Третий способ основан на вычислении наибольшего значения функции $a = 3x + 4y$ при условии $x^2 + y^2 = 10\,000$, из которого с учётом неотрицательности всех переменных получим $y = \sqrt{10\,000 - x^2}$, и, значит, $a = 3x + 4\sqrt{10\,000 - x^2}$. Найти наибольшее значение полученной функции можно по крайней мере двумя способами: с помощью производной (для этого придётся использовать формулу производной сложной функции) и с помощью неравенства $\vec{m} \cdot \vec{n} \leqslant |\vec{m}| \cdot |\vec{n}|$, которое было использовано при решении примера 16 и знак равенства в котором достигается только при условии сонаправленности векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, т. е. при условии равенства отношений их соответствующих координат отношению длин этих векторов. Рассмотрим оба способа. Производная функции $a = 3x + 4\sqrt{10\,000 - x^2}$ вычисляется, как уже отмечалось, по формуле производной сложной функции: $a' = 3 - \dfrac{4x}{\sqrt{10\,000 - x^2}}$. Точки экстремума находятся из условия равенства нулю производной:

$$3 - \frac{4x}{\sqrt{10\,000 - x^2}} = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{4x}{\sqrt{10\,000 - x^2}} = 3.$$

После возведения в квадрат обеих частей последнего равенства получим $\dfrac{16x^2}{10\,000 - x^2} = 9$ и $x^2 = 3600$. С учётом неотрицательности переменной x находим, что $x = 60$. Если $x \in (0;\, 60)$, то $a' > 0$; если $x \in (60;\, 100)$, то $a' < 0$. Значит, $x = 60$ — точка максимума, и, поскольку это единственная точка экстремума на промежутке $(0;\, 100)$, наибольшее значение функции $a = 3x + 4\sqrt{10\,000 - x^2}$ достигается в этой точке и равно $3 \cdot 60 + 4\sqrt{10\,000 - 60^2} = 3 \cdot 60 + 4 \cdot 80 = 500$.

В заключение обзора методов решения этой задачи рассмотрим, как найти наибольшее значение функции $a = 3x + 4\sqrt{10\,000 - x^2}$ с помощью векторной алгебры. Введём векторы $\vec{m}\{3;\, 4\}$ и $\vec{n}\{x;\, \sqrt{10\,000 - x^2}\}$. Тогда

$$|\vec{m}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad |\vec{n}| = \sqrt{x^2 + (\sqrt{10\,000 - x^2})^2} = 100.$$

Поскольку

$$a = \vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) \leqslant |\vec{m}| \cdot |\vec{n}|,$$

получим, что $a \leqslant 500$, т. е. наибольшее значение a равно 500. Как уже отмечалось, оно достигается, если векторы $\vec{m}\{3;\, 4\}$ и $\vec{n}\{x;\, \sqrt{10\,000 - x^2}\}$ сонаправлены, т. е. если отношения их соответствующих координат равны отношению длин этих векторов:

$$\frac{x}{3} = \frac{\sqrt{10\,000 - x^2}}{4} = \frac{100}{5}, \quad \text{откуда} \quad x = 60.$$

Ответ. 500.

Вычисление наибольшего или наименьшего значения функции с помощью производной в подобных задачах представляется достаточно громоздким и требует уверенного владения навыками вычисления производных (в том числе сложной функции) и исследования функции на наибольшее или наименьшее значение. В большинстве случаев при решении подобных задач можно обойтись без применения производной, используя метод введения параметра или вычисляя наибольшее (наименьшее) значение квадратичной функции. Рассмотрим ещё несколько примеров, начав с задачи, которая решается методом введения параметра. Эта задача очень похожа на предыдущую, только уравнение второй степени, полученное при составлении математической модели задачи, уже не будет уравнением окружности.

Пример 18. Геннадий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Геннадий платит рабочему 250 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 200 рублей. Геннадий готов выделять 900 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение. Пусть на заводе, расположенном в первом городе, рабочие трудятся x^2 часов, а на заводе, расположенном во втором городе, — y^2 часов. Тогда за неделю будет произведено $x+y$ единиц товара, а затраты на оплату труда составят $250x^2+200y^2$ рублей. Обозначим $x+y$ через a, т. е. введём параметр (целевую функцию). Таким образом, нужно найти наибольшее значение величины $a=x+y$ при условии $250x^2+200y^2=900\,000$, откуда $5x^2+4y^2=18\,000$. Из равенства $a=x+y$ находим $y=a-x$. Тогда $5x^2+4(a-x)^2=18\,000$, где $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $a\geqslant 0$. Требуется найти наибольшее значение a, при котором уравнение $5x^2+4(a-x)^2=18\,000$ имеет хотя бы один неотрицательный корень. Полученное уравнение после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых примет вид

$$9x^2-8ax+4a^2-18\,000=0.$$

Последнее уравнение является квадратным. Оно имеет хотя бы один корень, только если его дискриминант D неотрицателен, или (что то же) если $\frac{D}{4}\geqslant 0$. Поскольку

$$\frac{D}{4}=16a^2-9(4a^2-18\,000)=9\cdot 18\,000-20a^2=20(8100-a^2),$$

из условия неотрицательности дискриминанта получаем неравенство $8100-a^2\geqslant 0$, откуда $a^2\leqslant 8100$, т. е. $|a|\leqslant 90$. Значит, искомым наибольшим значением является $a=90$. В этом случае $D=0$ и $x=\frac{4a}{9}=40>0$; $y=a-x=90-40=50>0$.

Ответ. 90.

Для решения следующих двух задач потребуется найти наименьшее значение квадратичной функции (разумеется, это лучше делать без применения производной). Напомним, что оно достигается в точке, которая является абсциссой вершины параболы — графика этой квадратичной функции.

Пример 19. Строительство нового завода стоит 75 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2+x+7$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px-(0{,}5x^2+x+7)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?

Решение. Из условия следует, что ежегодная прибыль a фирмы (в млн рублей) равна $px-(0{,}5x^2+x+7)$, т. е. $a=-0{,}5x^2+(p-1)x-7$. График функции $a=-0{,}5x^2+(p-1)x-7$ — парабола, ветви которой направлены вниз. Наибольшего значения эта функция достигает в точке x_0, являющейся абсциссой вершины параболы, т. е. в точке

$$x_0=-\frac{p-1}{2\cdot(-0{,}5)}=p-1.$$

Тогда наибольшее значение функции $a=-0{,}5x^2+(p-1)x-7$ будет равно $\frac{(p-1)^2}{2}-7$. Строительство завода окупится не более чем за 3 года, если

$$3\cdot\left(\frac{(p-1)^2}{2}-7\right)\geqslant 75,$$

откуда $(p-1)^2\geqslant 64$, и $(p-9)(p+7)\geqslant 0$. Множеством решений последнего неравенства является $(-\infty;-7]\cup[9;+\infty)$. Наименьшим неотрицательным (поскольку цена продукции не может быть отрицательной) решением неравенства будет $p=9$.

Ответ. 9.

В следующем примере очень важно оптимизировать вычисления, поскольку данные числа приводят к квадратичной функции с большими коэффициентами. Главное здесь — не торопиться находить произведения трёхзначных чисел; лучше выносить за скобки общий множитель везде, где это возможно.

Пример 20. Аглая является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара, а если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Аглая платит рабочему 500 рублей. Аглае нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

Решение. Пусть на заводе, расположенном в первом городе, рабочие трудятся x^2 часов, а на заводе, расположенном во втором городе, — y^2 часов. Тогда за неделю будет произведено $2x+5y$ единиц товара, а затраты на оплату труда составят $500(x^2+y^2)$ рублей. Обозначим $500(x^2+y^2)$ через a, т. е. введём параметр (целевую функцию. Таким образом, нужно найти наименьшее значение функции $a=500(x^2+y^2)$ при условии $2x+5y=580$, откуда $5y=580-2x$. Тогда $a=500(x^2+y^2)=20(25x^2+(5y)^2)$. Поэтому

$$a = 20(25x^2+(580-2x)^2) = 20(29x^2-4\cdot 580x+580^2),$$

где $0\leqslant x\leqslant 290$ (объясните почему).

Наименьшего значения a достигает в той же точке, в которой достигает наименьшего значения квадратичная функция

$$y = 29x^2-4\cdot 580x+580^2,$$

т. е. в точке $x=x_0=\dfrac{4\cdot 580}{2\cdot 29}=40$. В этом случае

$$a = 20(29\cdot 40^2-4\cdot 580\cdot 40+580^2) = 2000(29\cdot 16-58\cdot 16+58^2) = \\ = 2000(58^2-29\cdot 16).$$

Далее,

$$2000(58^2-58\cdot 8) = 2000\cdot 58\cdot (58-8) = 2000\cdot 58\cdot 50 = \\ = 58\cdot 100\,000 = 5\,800\,000.$$

Ответ. 5,8 млн рублей.

Пример 21. В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов (в кг) можно за сутки суммарно добыть в двух областях?

Решение. Поскольку алюминий и никель взаимозаменяемы, а рабочие первой области одинаково эффективно добывают и алюминий, и никель, они могут добывать любой из металлов. За сутки ими будет добыто $160 \cdot 5 \cdot 0{,}1 = 80$ кг металла. Пусть во второй области алюминий добывают t рабочих, тогда никель добывают $(160 - t)$ рабочих. За сутки они добудут $\sqrt{5t}$ кг алюминия и $\sqrt{5(160-t)} = \sqrt{800-5t}$ кг никеля. Найдём наибольшее значение функции

$$a(t) = \sqrt{5t} + \sqrt{800-5t}$$

для натуральных t, не бóльших 160. Введём векторы $\vec{m}\{1;1\}$ и $\vec{n}\{\sqrt{5t};\ \sqrt{800-5t}\}$. Вычислим длины этих векторов:

$$|\vec{m}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}, \quad |\vec{n}| = \sqrt{(\sqrt{5t})^2 + (\sqrt{800-5t})^2} = \sqrt{800}.$$

Тогда $a = \vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(\widehat{\vec{m}, \vec{n}})$. Поскольку $\cos(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) \leqslant 1$, наибольшее значение a будет равно $|\vec{m}| \cdot |\vec{n}| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{800} = 40$. Оно достигается, если $\cos(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = 1$, т. е. $\widehat{\vec{m}, \vec{n}} = 0$. Последнее возможно, только если векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ сонаправлены, т. е. если отношения их соответствующих координат равны одному и тому же положительному числу — отношению длин этих векторов:

$$\frac{\sqrt{5t}}{1} = \frac{\sqrt{800-5t}}{1} = \frac{\sqrt{800}}{\sqrt{2}} = 20,$$

откуда $t = 80$. Тем самым 80 рабочих второй области следует направить на добычу алюминия и 80 — на добычу никеля. Они добудут 40 кг металла. Совместно рабочие первой и второй области добудут 120 кг металла.

Ответ. 120.

Замечание. Разумеется, тот же результат можно получить и с помощью производной:

$$a'(t) = \frac{5}{2\sqrt{5t}} - \frac{5}{2\sqrt{800-5t}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{800-5t} - \sqrt{5t}}{\sqrt{5t} \cdot \sqrt{800-5t}}.$$

Найдём неотрицательные нули производной. Для этого достаточно решить уравнение $\sqrt{800-5t} = \sqrt{5t}$, единственным корнем которого является $t = 80$. При $t < 80$ производная положительна, а при $t > 80$ производная отрицательна, поэтому в точке 80 функция достигает максимума $f(80) = \sqrt{5 \cdot 80} + \sqrt{800 - 5 \cdot 80} = 40$, который в силу единственности точки экстремума и будет равен наибольшему значению функции на исследуемом промежутке.

В следующей задаче применение производной уже вполне оправданно.

Пример 22. Макар является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $36t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, и если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, то они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Макар платит рабочему 200 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 70 изделий. Какую наименьшую сумму (в млн рублей) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

Решение. Пусть на заводе, расположенном в первом городе, рабочие трудятся $36x^3$ часов, а на заводе, расположенном во втором городе, — y^3 часов. Тогда за неделю будет произведено $x+y$ единиц изделий, а затраты на оплату труда составят $200(36x^3+y^3)$ рублей. Обозначим $200(36x^3+y^3)$ через a, т. е. введём параметр (целевую функцию. Таким образом, нужно найти наименьшее значение $a=200(36x^3+y^3)$ при условии $x+y=70$, откуда $y=70-x$. Тогда $a=200(36x^3+(70-x)^3)$. Требуется найти наименьшее возможное значение функции функции $a=200(36x^3+(70-x)^3)$, где $0\leqslant x\leqslant 70$ (объясните почему). Найдём производную функции:

$$a' = 200(36\cdot 3x^2-3\cdot(70-x)^2),$$

откуда $a'=3\cdot 200(36x^2-(70-x)^2)$. Производная обращается в нуль, если $36x^2-(70-x)^2=0$, т. е. если

$$\left[\begin{aligned} 6x &= 70-x,\\ 6x &= -70+x,\end{aligned}\right. \quad \text{т. е.} \quad \left[\begin{aligned} x &= 10,\\ x &= -14.\end{aligned}\right.$$

Условию $0\leqslant x\leqslant 70$ удовлетворяет только $x=10$. Если $x\in(0;\,10)$, то $a'<0$; если $x\in(10;\,70)$, то $a'>0$. Значит, $x=10$ — точка минимума, и, поскольку это единственная точка экстремума на рассматриваемом промежутке, наименьшее значение функции

$$a = 200(36x^3+(70-x)^3)$$

достигается в этой точке и равно

$$a = 200(36\cdot 10^3+(70-10)^3) = 200(6^2\cdot 10^3+6^3\cdot 10^3) = \\ = 200\cdot 6^2\cdot 10^3\cdot 7 = 50\,400\,000.$$

Ответ. 50,4.

5.5. Нелинейные целевые функции с нецелочисленными точками экстремума

Перейдём теперь к примерам задач, в которых нелинейная целевая функция, рассматриваемая на множестве неотрицательных целых чисел, достигает наименьшего (наибольшего) значения при значении x_0 переменной, не являющемся целым числом, причём x_0 является единственной точкой экстремума на рассматриваемом множестве. Напомним, что в таких случаях обычно вычисляют значение целевой функции в двух ближайших к x_0 целых точках, между которыми и заключена точка x_0, выбирая из двух найденных значений целевой функции наименьшее или наибольшее в зависимости от вопроса задачи. В некоторых случаях удаётся обойтись без такого сравнения, вычислив значение целевой функции только в одной из таких точек. Например, если для квадратичной целевой функции абсцисса x_0 вершины параболы, являющейся её графиком, не будет целым числом, то достаточно вычислить значение этой функции только в ближайшей к x_0 целой точке либо в любой из них, если эти точки равноудалены от x_0. В последнем случае задача будет иметь два решения, любое из которых является оптимальным.

Пример 23. В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 20 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $2t^2$ д. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 д. е. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько д. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

Решение. Пусть на первый объект будет направлено x рабочих, тогда их суточная зарплата составит $2x^2$ д. е. При этом на второй объект будет направлено $(20-x)$ рабочих, а их суточная заработная плата составит

$$(20-x)^2 = x^2 - 40x + 400 \text{ д. е.}$$

Значит, суточная зарплата всех рабочих составит $a = 3x^2 - 40x + 400$ д. е. Функция $a = 3x^2 - 40x + 400$ является квадратичной, ветви параболы — её графика — направлены вверх. Наименьшего значения эта функция достигает в точке, являющейся абсциссой вершины её графика, т. е. в точке $x_0 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$. Это число не является целым, поэтому на множестве целых неотрицательных чисел функция $a = 3x^2 - 40x + 400$ достигает наименьшего значения в ближайшей к x_0 целой точке, т. е. в точке $x = 7$. Следовательно, на первый объект нужно направить 7 рабочих, на второй объект — 13 рабочих, а зарплата всех рабочих составит

$$a(7) = 3 \cdot 7^2 - 40 \cdot 7 + 400 = 267 \text{ д. е.}$$

Ответ. На первый объект нужно направить 7 рабочих, на второй объект — 13 рабочих; выплата составит 267 д. е.

Рассмотрим почти аналогичную задачу, в которой уже два решения являются оптимальными.

Пример 24. В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 35 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $7t^2$ д. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ д. е. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими (укажите все возможные варианты)? Сколько д. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

Решение. Пусть на первый объект будет направлено x рабочих, тогда их суточная зарплата составит $7x^2$ д. е. При этом на второй объект будет направлено $(35 - x)$ рабочих, а их суточная заработная плата составит $3(35 - x)^2 = 3x^2 - 210x + 3675$ д. е. Значит, суточная зарплата всех рабочих составит $a = 10x^2 - 210x + 3675$ д. е. Функция $a = 10x^2 - 210x + 3675$ является квадратичной, ветви параболы — её графика — направлены вверх. Наименьшего значения эта функция достигает в точке, являющейся абсциссой вершины её графика, т. е. в точке $x_0 = \frac{105}{10} = 10{,}5$. Это число не является целым, поэтому на множестве целых неотрицательных чисел функция $a = 10x^2 - 210x + 3675$ достигает наименьшего значения в ближайшей к x_0 целой точке, т. е. либо в точке $x = 10$, либо в точке $x = 11$. Следовательно, либо на первый объект нужно направить 10 рабочих, а на второй объект — 25 рабочих, либо на первый объект нужно направить 11 рабочих, а на второй объект — 24 рабочих. В любом из этих случаев зарплата всех рабочих составит

$$a(10) = 10 \cdot 10^2 - 210 \cdot 10 + 3675 = 2575 \text{ д. е.}$$

Ответ. На первый объект нужно направить 10 рабочих, а на второй объект — 25 рабочих, либо на первый объект нужно направить 11 рабочих, а на второй объект — 24 рабочих; выплата составит 2575 д. е.

Заметим, что в подобных случаях для принятия оптимального решения обычно учитывают какие-то дополнительные факторы, например стоимость транспортировки рабочих на объект, стоимость питания и т. п.

Пример 25. В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 28 человек. Их нужно распределить на строительство двух частных домов, находящихся в разных городах. Если на строительстве первого дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $5t^2$ д. е. Если на строительстве второго дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ д. е. Дополнительные суточные накладные расходы (транспорт, питание и т. п.) обходятся в 4 д. е. в расчёте на одного рабочего при строительстве первого дома и в 3 д. е. при строительстве второго дома. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы все выплаты на их суточное содержание (т. е. суточная зарплата и суточные накладные расходы) оказались наименьшими? Сколько д. е. в сумме при таком распределении составят все суточные затраты (на зарплату и накладные расходы)?

Решение. Пусть на строительство первого дома будет направлено x рабочих, тогда их суточная зарплата составит $5x^2$ д. е., а суточные накладные расходы — $4x$ д. е. При этом на строительство второго дома будет направлено $(28-x)$ рабочих, их суточная заработная плата составит $3(28-x)^2 = 3x^2 - 168x + 2352$ д. е., а суточные накладные расходы — $3(28-x)$ д. е. Значит, все суточные затраты составят $a = 8x^2 - 167x + 2436$ д. е. Функция $a = 8x^2 - 167x + 2436$ является квадратичной, ветви параболы — её графика — направлены вверх. Наименьшего значения эта функция достигает в точке, являющейся абсциссой вершины её графика, т. е. в точке $x_0 = \frac{167}{16} = 10\frac{7}{16}$. Это число не является целым, поэтому на множестве целых неотрицательных чисел функция $a = 8x^2 - 167x + 2436$ достигает наименьшего значения в ближайшей к x_0 целой точке, т. е. в точке $x = 10$. Следовательно, на первый объект нужно направить 10 рабочих, на второй объект — 18 рабочих, суточные расходы при этом составят

$$a(10) = 8\cdot 10^2 - 167\cdot 10 + 2436 = 1566 \text{ д. е.}$$

Ответ. На первый объект нужно направить 10 рабочих, на второй объект — 18 рабочих; суточные затраты составят 1566 д. е.

Замечание. Решение последней задачи без учёта накладных расходов дало бы два оптимальных распределения: уже найденное $(10+18)$ и второе $(11+17)$. Учёт дополнительных затрат позволил выбрать оптимальное распределение. Заметим, что если бы дополнительные суточные расходы на одного рабочего во втором городе оказались не меньше на 1 д. е., а больше на 1 д. е. по сравнению с такими же расходами на одного рабочего в первом городе, то оптимальным оказался бы уже другой выбор: 11 человек — на строительство первого дома, 17 — на строительство второго дома.

В заключение обзора методов решения задач оптимизации рассмотрим задачу, в которой точка минимума (максимума) нелинейной целевой функции находится с помощью производной и не является целым неотрицательным числом. В отличие от исследования квадратичной функции, в подобных задачах приходится вычислять значения целевой функции в обеих целых точках, между которыми заключена точка её минимума (максимума).

Пример 26. Евлампия является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $25t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, и если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно $9t^3$ часов в неделю, то они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Евлампия платит рабочему 100 д. е. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 15 изделий. Какую наименьшую сумму (в д. е.) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

Решение. Пусть на заводе, расположенном в первом городе, рабочие трудятся $25x^3$ часов, а на заводе, расположенном во втором городе, $9y^3$ часов. Тогда за неделю будет произведено $x+y$ единиц изделий, а затраты на оплату труда составят $100(25x^3+9y^3)$ д. е. Обозначим $100(25x^3+9y^3)$ через a, т. е. введём параметр (целевую функцию). Таким образом, нужно найти наименьшее значение функции $a=100(25x^3+9y^3)$ при условии $x+y=15$, откуда $y=15-x$. Тогда $a=100(25x^3+9(15-x)^3)$. Требуется найти наименьшее возможное значение функции $a=100(25x^3+9(15-x)^3)$, где $0 \leqslant x \leqslant 15$. Найдём производную функции:

$a' = 100(25\cdot 3x^2 - 9\cdot 3\cdot(15-x)^2)$, откуда $a' = 300(25x^2-9(15-x)^2)$.

Производная обращается в нуль, если $25x^2-9(15-x)^2=0$, т. е. если

$$\left[\begin{array}{l} 5x = 3(15-x), \\ 5x = -3(15-x), \end{array}\right. \quad \text{т. е.} \quad \left[\begin{array}{l} x = 5\frac{5}{8}, \\ x = -22{,}5. \end{array}\right.$$

Условию $0 \leqslant x \leqslant 15$ удовлетворяет только $x=5\frac{5}{8}$. Если $x \in \left(0; 5\frac{5}{8}\right)$, то $a'<0$; если $x \in \left(5\frac{5}{8}; 15\right)$, то $a'>0$. Значит, $x=5\frac{5}{8}$ — точка минимума, и, поскольку это единственная точка экстремума на рассматриваемом промежутке, наименьшее значение функции

$$a = 100(25x^3+9(15-x)^3)$$

достигается в этой точке. Но $x=5\frac{5}{8}$ не является целым числом. Поэтому для вычисления наименьшего значения данной целевой функции на множестве целых чисел нужно найти её значения в двух целых точках, между которыми заключена её точка минимума, т. е. в точках 5 и 6. Сделаем это:

$$a(5) = 100(25\cdot 5^3 + 9(15-5)^3) = 1\,212\,500;$$

$$a(6) = 100(25\cdot 6^3 + 9(15-6)^3) = 1\,196\,100.$$

Меньшим из двух найденных чисел является $a(6)$.

Ответ. 1 196 100.

Как видим, решения однотипных по внешнему виду задач оптимизации отличаются друг от друга, причём иногда довольно существенно. Поэтому для успешной подготовки по данной теме рекомендуется решить все упражнения этого параграфа (хотя бы по одному из каждого номера).

Упражнения к § 5

1. а) У фермера есть два поля, каждое площадью 4 гектара. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 370 ц/га, а на втором — 450 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 500 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 5000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 6000 руб. за центнер. Какой наибольший доход (в млн рублей) может получить фермер?

б) У фермера есть два поля, каждое площадью 8 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 350 ц/га, а на втором — 420 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 270 ц/га, а на втором — 450 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 4000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 5000 руб. за центнер. Какой наибольший доход (в млн рублей) может получить фермер?

2. а) У фермера есть два поля, каждое площадью 5 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель, морковь и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 390 ц/га, а на втором — 420 ц/га. Урожайность моркови на первом поле составляет 360 ц/га, а на втором — 440 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 310 ц/га, а на втором — 480 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 2500 руб. за центнер, морковь — по цене 3500 руб. за центнер, а свёклу — по цене 4000 руб. за центнер. Какой наибольший доход (в млн рублей) может получить фермер?

б) У фермера есть два поля, каждое площадью 6 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель, морковь и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 410 ц/га и на втором тоже 410 ц/га. Урожайность моркови на первом поле составляет 370 ц/га, а на втором — 430 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 320 ц/га, а на втором — 460 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 3000 руб. за центнер, морковь — по цене 3500 руб. за центнер, а свёклу — по цене 4000 руб. за центнер. Какой наибольший доход (в млн рублей) может получить фермер?

3. а) В двух шахтах добывают алюминий и никель. На первой шахте имеется 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться 6 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 3 кг никеля. На второй шахте имеется 180 рабочих, каждый из которых готов трудиться 6 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 2 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

б) В двух шахтах добывают алюминий и никель. На первой шахте имеется 60 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 3 кг никеля. На второй шахте имеется 260 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 2 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

4. а) В 1-е классы поступает 45 человек: 20 мальчиков и 25 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, а в другом — 23. После распределения посчитали процент девочек в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

б) В 1-е классы поступает 43 человека: 23 мальчика и 20 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, а в другом — 21. После распределения посчитали процент мальчиков в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

5. а) Фабрика, производящая пищевые полуфабрикаты, выпускает блинчики со следующими видами начинки: ягодная и творожная. В данной ниже таблице приведены себестоимость и отпускная цена, а также производственные возможности фабрики по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта.

Вид начинки	Себестоимость (за 1 тонну)	Отпускная цена (за 1 тонну)	Производственные возможности
ягоды	70 тыс. руб.	100 тыс. руб.	90 (тонн в мес.)
творог	100 тыс. руб.	135 тыс. руб.	75 (тонн в мес.)

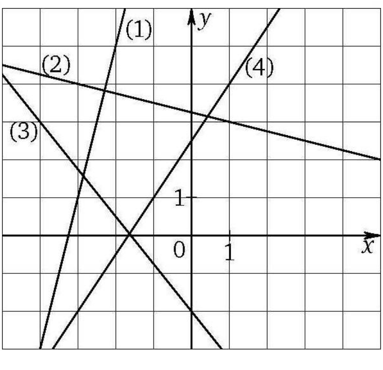
Для выполнения условий ассортимента, которые предъявляются торговыми сетями, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 15 тонн. Предполагая, что вся продукция фабрики находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль, которую может получить фабрика от производства блинчиков за 1 месяц (прибылью называется разница между отпускной стоимостью всей продукции и её себестоимостью).

б) Завод выпускает фруктовые компоты в двух видах тары — стеклянной и жестяной. Производственные мощности завода позволяют выпускать в день 90 центнеров компотов в стеклянной таре или 80 центнеров в жестяной таре. Для выполнения условий ассортимента, которые предъявляются торговыми сетями, продукции в каждом из видов тары должно быть выпущено не менее 20 центнеров. В таблице приведены себестоимость и отпускная цена завода за 1 центнер продукции для обоих видов тары.

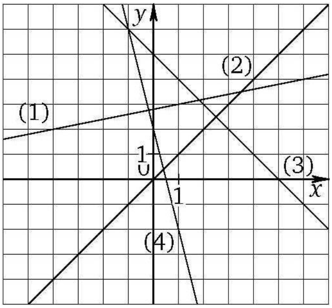
Вид тары	Себестоимость 1 ц	Отпускная цена 1 ц
стеклянная	1500 руб.	2100 руб.
жестяная	1100 руб.	1750 руб.

Предполагая, что вся продукция завода находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль завода за один день (прибылью называется разница между отпускной стоимостью всей продукции и её себестоимостью).

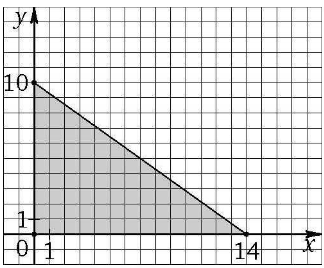
6. а) Найдите угловые коэффициенты прямых, изображённых на рисунке.



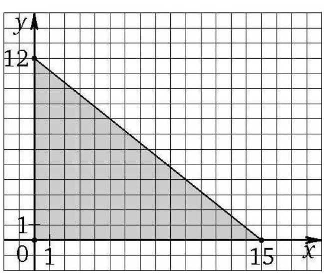
б) Найдите угловые коэффициенты прямых, изображённых на рисунке.



7. а) Найдите наибольшее возможное значение b, при котором прямая l имеет хотя бы одну общую точку с областью, ограниченной изображённым на рисунке прямоугольным треугольником (включая стороны треугольника), если l задана уравнением: 1) $y=-\frac{6}{7}x+b$; 2) $y=-\frac{4}{7}x+b$.

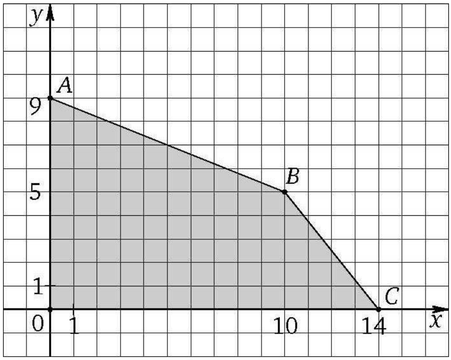


б) Найдите наибольшее возможное значение b, при котором прямая l имеет хотя бы одну общую точку с областью, ограниченной изображённым на рисунке прямоугольным треугольником (включая стороны треугольника), если l задана уравнением: 1) $y=-1{,}2x+b$; 2) $y=-0{,}6x+b$.



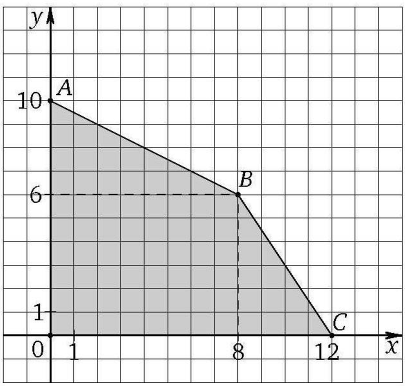
8. а) Найдите наибольшее возможное значение b, при котором прямая l имеет хотя бы одну общую точку с областью, ограниченной изображённым на рисунке четырёхугольником $OABC$ (включая стороны четырёхугольника), если l задана уравнением:

1) $y=-1{,}5x+b$; 2) $y=-0{,}6x+b$; 3) $y=-0{,}3x+b$.



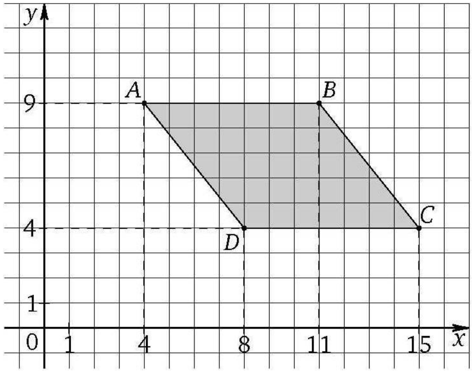
б) Найдите наибольшее возможное значение b, при котором прямая l имеет хотя бы одну общую точку с областью, ограниченной изображённым на рисунке четырёхугольником $OABC$ (включая стороны четырёхугольника), если l задана уравнением:

1) $y=-2{,}5x+b$; 2) $y=-0{,}75x+b$; 3) $y=-0{,}6x+b$.



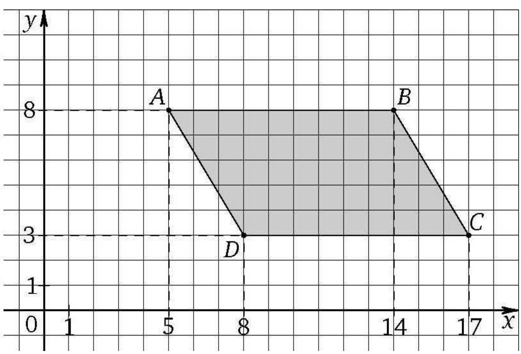
9. а) Найдите наибольшее и наименьшее возможные значения b, при которых прямая l имеет хотя бы одну общую точку с областью, ограниченной изображённым на рисунке четырёхугольником $ABCD$ (включая стороны четырёхугольника), если l задана уравнением:

1) $y = b - x$; 2) $y = b - 2x$.



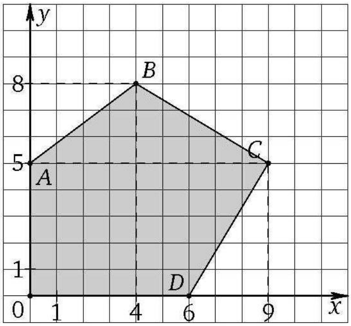
б) Найдите наибольшее и наименьшее возможные значения b, при которых прямая l имеет хотя бы одну общую точку с областью, ограниченной изображённым на рисунке четырёхугольником $ABCD$ (включая стороны четырёхугольника), если l задана уравнением:

1) $y = b - 0{,}5x$; 2) $y = b - 3x$.



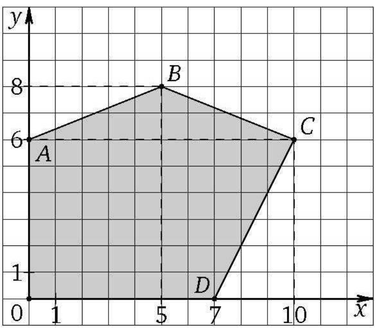
10. а) Найдите наибольшее возможное значение b, при котором прямая l имеет хотя бы одну общую точку с областью, ограниченной изображённым на рисунке пятиугольником $OABCD$ (включая стороны пятиугольника), если l задана уравнением:

1) $y=-5x+b$; 2) $y=-0{,}2x+b$; 3) $y=-\frac{2}{3}x+b$.



б) Найдите наибольшее возможное значение b, при котором прямая l имеет хотя бы одну общую точку с областью, ограниченной изображённым на рисунке пятиугольником $OABCD$ (включая стороны пятиугольника), если l задана уравнением:

1) $y=-6x+b$; 2) $y=-0{,}1x+b$; 3) $y=-\frac{4}{7}x+b$.



11. а) Найдите наибольшее и наименьшее возможные значения выражения $5x+12y$, если известно, что $x+4y\geqslant 27$, $3x+2y\geqslant 31$, $2x+3y\leqslant 39$.

б) Найдите наибольшее и наименьшее возможные значения выражения $3x+10y$, если известно, что $5x+3y\geqslant 34$, $2x+9y\geqslant 37$, $7x+12y\leqslant 110$.

12. а) Предприятие непрерывного цикла занимается испытанием готовых изделий двух типов. Ежемесячно предприятие получает для испытаний не более 600 изделий первого типа и не более 300 изделий второго типа. Качество каждого изделия проверяется на двух стендах А и Б (стенды могут использоваться для испытания каждого изделия в любой последовательности). Для проверки одного изделия первого типа требуется 20 минут испытаний на стенде А и 6 минут испытаний на стенде Б; для проверки одного изделия второго типа требуется 24 минуты испытаний на стенде А и 20 минут испытаний на стенде Б. По техническим причинам стенд А может работать не более 240 часов в месяц, а стенд Б — не более 120 часов в месяц. Проверка одного изделия первого типа приносит предприятию 50 д. е. прибыли, а проверка одного изделия второго типа — 90 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует ежемесячно проверять для получения этой прибыли.

б) Предприятие непрерывного цикла занимается испытанием готовых изделий двух типов. Ежемесячно предприятие получает для испытаний не более 300 изделий первого типа и не более 600 изделий второго типа. Качество каждого изделия проверяется на двух стендах А и Б (стенды могут использоваться для испытания каждого изделия в любой последовательности). Для проверки одного изделия первого типа требуется 36 минут испытаний на стенде А и 30 минут испытаний на стенде Б; для проверки одного изделия второго типа требуется 30 минут испытаний на стенде А и 9 минут испытаний на стенде Б. По техническим причинам стенд А может работать не более 360 часов в месяц, а стенд Б — не более 180 часов в месяц. Проверка одного изделия первого типа приносит предприятию 135 д. е. прибыли, а проверка одного изделия второго типа — 75 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует ежемесячно проверять для получения этой прибыли.

13. а) Предприятие непрерывного цикла выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется 15 часов работы цеха А и 10 часов работы цеха Б, а для изготовления изделия второго типа требуется 5 часов работы цеха А и 20 часов работы цеха Б (цеха могут работать над изделием в любой последовательности). По техническим причинам цех А может работать не более 150 часов в неделю, а цех Б — не более 100 часов в неделю. Каждое изделие первого типа приносит предприятию 5000 д. е. прибыли, а каждое изделие второго типа — 4000 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную еженедельную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует еженедельно выпускать для получения этой прибыли.

б) Предприятие непрерывного цикла выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется 30 часов работы цеха А и 20 часов работы цеха Б, а для изготовления изделия второго типа требуется 10 часов работы цеха А и 40 часов работы цеха Б (цеха могут работать над изделием в любой последовательности). По техническим причинам цех А может работать не более 600 часов в месяц, а цех Б — не более 400 часов в месяц. Каждое изделие первого типа приносит предприятию 15 000 д. е. прибыли, а каждое изделие второго типа — 12 000 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует ежемесячно выпускать для получения этой прибыли.

14. а) Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 30 квадратных метров и номера «люкс» площадью 40 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 940 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 4000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 5000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму (в рублях) сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

б) Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 квадратных метров и номера «люкс» площадью 45 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 квадратный метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму (в рублях) сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

15. а) Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть номера категории Б площадью 20 квадратных метров и номера категории А площадью 25 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1015 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Номер категории Б будет приносить отелю 3000 рублей в сутки, а номер категории А — 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму (в рублях) сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель? Сколько номеров категории Б и сколько номеров категории А будет в таком отеле?

б) Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть номера категории Б площадью 15 квадратных метров и номера категории А площадью 18 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 732 квадратных метра. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Номер категории Б будет приносить отелю 4000 рублей в сутки, а номер категории А — 5000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму (в рублях) сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель? Сколько номеров категории Б и сколько номеров категории А будет в таком отеле?

16. а) Баржу грузоподъёмностью 134 тонны используют для перевозки контейнеров типов A и B. По условиям договора количество перевозимых контейнеров типа A должно составлять не более 80 % количества перевозимых контейнеров типа B. Вес и стоимость одного контейнера типа A составляет 2 тонны и 5 млн руб., контейнера типа B — 5 тонн и 7 млн руб. соответственно. Найдите наибольшую возможную суммарную стоимость (в млн руб.) всех контейнеров, которые можно перевезти при данных условиях. Укажите число контейнеров типа A и число контейнеров типа B, которые нужно перевезти для получения наибольшей возможной суммарной стоимости.

б) Баржу грузоподъёмностью 180 тонн используют для перевозки контейнеров типов A и B. По условиям договора количество перевозимых контейнеров типа A должно составлять не более 75 % количества перевозимых контейнеров типа B. Вес и стоимость одного контейнера типа A составляет 3 тонны и 3 млн руб., контейнера типа B — 7 тонн и 5 млн руб. соответственно. Найдите наибольшую возможную суммарную стоимость (в млн руб.) всех контейнеров, которые можно перевезти при данных условиях. Укажите число контейнеров типа A и число контейнеров типа B, которые нужно перевезти для получения наибольшей возможной суммарной стоимости.

17. а) Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть номера категории Б площадью 25 квадратных метров и номера категории А площадью 30 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1520 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Номер категории Б будет приносить отелю 4800 рублей в сутки, а номер категории А — 5600 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму (в рублях) сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель? Сколько номеров категории Б и сколько номеров категории А будет в таком отеле?

б) Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть номера категории Б площадью 20 квадратных метров и номера категории А площадью 25 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1115 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Номер категории Б будет приносить отелю 3500 рублей в сутки, а номер категории А — 4200 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму (в рублях) сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель? Сколько номеров категории Б и сколько номеров категории А будет в таком отеле?

18. а) Малое предприятие выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется 5 часов работы станка А и 7 часов работы станка Б. Для изготовления изделия второго типа требуется 9 часов работы станка А и 3 часа работы станка Б (станки могут работать в любой последовательности). По техническим причинам станок А может работать не более 162 часов в месяц, а станок Б — не более 136 часов в месяц. Каждое изделие первого типа приносит предприятию 9000 д. е. прибыли, а каждое изделие второго типа — 6000 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует выпускать для получения этой прибыли.

б) Малое предприятие выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется 5 часов работы станка А и 9 часов работы станка Б. Для изготовления изделия второго типа требуется 8 часов работы станка А и 4 часа работы станка Б (станки могут работать в любой последовательности). По техническим причинам станок А может работать не более 208 часов в месяц, а станок Б — не более 144 часов в месяц. Каждое изделие первого типа приносит предприятию 15 000 д. е. прибыли, а каждое изделие второго типа — 12 000 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует выпускать для получения этой прибыли.

19. а) Найдите наименьшее значение выражения

$$16x^2+25y^2, \quad \text{если } 4x+5y=40.$$

б) Найдите наименьшее значение выражения

$$25x^2+16y^2, \quad \text{если } 5x+4y=30.$$

20. а) Найдите наименьшее значение выражения

$$49x^2+36y^2, \quad \text{если } 7x+6y=10.$$

б) Найдите наименьшее значение выражения

$$36x^2+49y^2, \quad \text{если } 6x+7y=60.$$

21. а) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$$3x+4y, \quad \text{если } 9x^2+16y^2=98.$$

б) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$$5x+3y, \quad \text{если } 25x^2+9y^2=72.$$

22. а) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$$2x+7y, \quad \text{если } 4x^2+49y^2=32.$$

б) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$$4x+9y, \quad \text{если } 16x^2+81y^2=18.$$

23. а) Найдите наибольшее значение выражения

$$5\sqrt{6t+5}+12\sqrt{59-6t}.$$

б) Найдите наибольшее значение выражения

$$8\sqrt{5t+6}+15\sqrt{43-5t}.$$

24. а) Найдите наибольшее значение выражения

$$7\sqrt{3t+7}+24\sqrt{29-3t}.$$

б) Найдите наибольшее значение выражения

$$20\sqrt{2t+9}+21\sqrt{27-2t}.$$

25. а) Сергей является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара, а если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $12t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Сергей платит рабочему

400 рублей. Сергей готов выделять 608 400 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

б) Искра является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $6t$ единиц товара, а если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $8t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Искра платит рабочему 300 рублей. Искра готова выделять 1 920 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

26. а) Зинаида является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $8t$ единиц товара, а если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $15t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Зинаида платит рабочему 600 рублей. Зинаиде нужно каждую неделю производить 578 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

б) Иван является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара, а если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Иван платит рабочему 400 рублей. Ивану нужно каждую неделю производить 225 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

27. а) Производство x тыс. единиц продукции обходится в

$$q = 0{,}5x^2 + x + 9 \text{ млн рублей в год.}$$

При цене p тыс. рублей за единицу продукции годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. Завод выпускает продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p через два года суммарная прибыль составит не менее 46 млн рублей?

б) Производство x тыс. единиц продукции обходится в

$$q = 0{,}5x^2 + 2x + 5 \text{ млн рублей в год.}$$

При цене p тыс. рублей за единицу продукции годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. Завод выпускает продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p через четыре года суммарная прибыль составит не менее 52 млн рублей?

28. а) Феврония является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производится абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Феврония платит рабочему 300 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 200 рублей. Феврония готова выделять 30 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

б) Пётр является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производится абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Пётр платит рабочему 400 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 300 рублей. Пётр готов выделять 84 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

29. а) В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,3 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно за сутки суммарно добыть в двух областях?

б) В двух областях есть по 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

30. а) Фёдор является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $25t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, и если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, то они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Фёдор платит рабочему 360 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 30 изделий. Какую наименьшую сумму (в млн рублей) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

б) Василий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $16t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, и если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, то они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Василий платит рабочему 250 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 20 изделий. Какую наименьшую сумму (в млн рублей) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

31. а) В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 25 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ д. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 д. е. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько д. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

б) В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 22 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ д. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 д. е. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько д. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

32. а) В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

б) На каждом из двух комбинатов работает по 100 человек. На первом комбинате один рабочий изготавливает за смену 3 детали А или 1 деталь В. На втором комбинате для изготовления t деталей (и А, и В) требуется t^2 человеко-смен. Оба эти комбината поставляют детали на комбинат, где собирают изделие, причём для его изготовления нужна 1 деталь А и 3 детали В. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать комбинат за смену?

33. а) Артём является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $9t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, и если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно $4t^3$ часов в неделю, то они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Артём платит рабочему 500 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 50 изделий. Какую наименьшую сумму (в млн рублей) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

б) Александр является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $16t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, и если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно $9t^3$ часов в неделю, то они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Александр платит рабочему 400 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 70 изделий. Какую наименьшую сумму (в млн рублей) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

34. а) В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 22 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ д. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $2t^2$ д. е. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько д. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

б) В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 18 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ д. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ д. е. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько д. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

35. а) Первый сервер после обработки полученных на входе t^2 Гбайт информации выдаёт на выходе $20t$ Гбайт информации, а второй сервер после обработки полученных на входе t^2 Гбайт информации выдаёт на выходе $21t$ Гбайт информации. Какой наибольший объём (в Гбайтах) информации могут после обработки выдать на выходе оба сервера, если известно, что суммарный объём полученной ими на входе информации равен 3364 Гбайт и $25 < t < 55$? Укажите, сколько Гбайт информации при этом получено на входе каждым сервером.

б) Первый сервер после обработки полученных на входе t^2 Гбайт информации выдаёт на выходе $9t$ Гбайт информации, а второй сервер после обработки полученных на входе t^2 Гбайт информации выдаёт на выходе $40t$ Гбайт информации. Какой наибольший объём (в Гбайтах) информации могут после обработки выдать на выходе оба сервера, если известно, что суммарный объём полученной ими на входе информации равен 6724 Гбайт и $15 < t < 85$? Укажите, сколько Гбайт информации при этом получено на входе каждым сервером.

36. а) В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 30 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ д. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 д. е. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими (укажите все возможные варианты)? Сколько д. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

б) В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 21 человека. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $5t^2$ д. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 д. е. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими (укажите все возможные варианты)? Сколько д. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

37. а) Анастасия является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $4t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, и если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, то они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Анастасия платит рабочему 500 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 15 изделий. Какую наименьшую сумму (в рублях) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

б) Ирина является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $9t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, а если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, то они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Ирина платит рабочему 400 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 18 изделий. Какую наименьшую сумму (в рублях) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

38. а) В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 26 человек. Их нужно распределить на строительство двух частных домов, находящихся в разных городах. Если на строительстве первого дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ д. е. Если на строительстве второго дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ д. е. Дополнительные суточные накладные расходы (транспорт, питание и т. п.) обходятся в 4 д. е. в расчёте на одного рабочего при строительстве первого дома и в 3 д. е. при строительстве второго дома. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы все выплаты на их суточное содержание (т. е. суточная зарплата и суточные накладные расходы) оказались наименьшими? Сколько д. е. в сумме при таком распределении составят все суточные затраты (на зарплату и накладные расходы)?

б) В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 24 человек. Их нужно распределить на строительство двух частных домов, находящихся в разных городах. Если на строительстве первого дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ д. е. Если на строительстве второго дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $2t^2$ д. е. Дополнительные суточные накладные расходы (транспорт, питание и т. п.) обходятся в 2 д. е. в расчёте на одного рабочего при строительстве первого дома и в 4 д. е. при строительстве второго дома. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы все выплаты на их суточное содержание (т. е. суточная зарплата и суточные накладные расходы) оказались наименьшими? Сколько д. е. в сумме при таком распределении составят все суточные затраты (на зарплату и накладные расходы)?

39. а) Аделаида является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $9t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, и если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно $4t^3$ часов в неделю, то они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Аделаида платит рабочему 600 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 13 изделий. Какую наименьшую сумму (в рублях) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

б) Валерия является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $16t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, и если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно $4t^3$ часов в неделю, то они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Валерия платит рабочему 200 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 14 изделий. Какую наименьшую сумму (в рублях) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

40. а) В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 14 человек. Их нужно распределить на строительство двух частных домов, находящихся в разных городах. Если на строительстве первого дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $6t^2$ д. е. Если на строительстве второго дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $2t^2$ д. е. Дополнительные суточные накладные расходы (транспорт, питание и т. п.) обходятся в 3 д. е. в расчёте на одного рабочего при строительстве первого дома и в 2 д. е. при строительстве второго дома. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы все выплаты на их суточное содержание (т. е. суточная зарплата и суточные накладные расходы) оказались наименьшими? Сколько д. е. в сумме при таком распределении составят все суточные затраты (на зарплату и накладные расходы)?

б) В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 12 человек. Их нужно распределить на строительство двух частных домов, находящихся в разных городах. Если на строительстве первого дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $5t^2$ д. е. Если на строительстве второго дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ д. е. Дополнительные суточные накладные расходы (транспорт, питание и т. п.) обходятся в 5 д. е. в расчёте на одного рабочего при строительстве первого дома и в 3 д. е. при строительстве второго дома. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы все выплаты на их суточное содержание (т. е. суточная зарплата и суточные накладные расходы) оказались наименьшими? Сколько д. е. в сумме при таком распределении составят все суточные затраты (на зарплату и накладные расходы)?

41. а) Анатолий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $8t$ единиц товара, а если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $15t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Анатолий платит рабочему 200 рублей. Анатолий готов выделять 924 800 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

б) Александра является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $7t$ единиц товара, а если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $24t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Александра платит рабочему 300 рублей. Александра готова выделять 1 687 500 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

42. а) В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 21 человека. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $5t^2$ д. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ д. е. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько д. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

б) В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 14 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $6t^2$ д. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $5t^2$ д. е. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько д. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

43. а) Марфа является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара, а если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Марфа платит рабочему 300 рублей. Марфе нужно каждую неделю производить 900 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

б) Виктор является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $6t$ единиц товара, а если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $8t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Виктор платит рабочему 200 рублей. Виктору нужно каждую неделю производить 1600 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

44. а) Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0{,}5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?

б) Строительство нового завода стоит 140 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}4x^2 + x + 5$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0{,}4x^2 + x + 5)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 4 года?

45. а) В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 18 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $6t^2$ д. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $2t^2$ д. е.

1. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими (укажите все возможные варианты)?

2. Сколько д. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

3. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы суточные выплаты на их зарплату и накладные расходы (транспорт, питание) оказались наименьшими, если дополнительно известно, что суточные накладные расходы на одного человека в первом городе на 2 д. е. больше, чем во втором?

б) В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 15 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $7t^2$ д. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ д. е.

1. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими (укажите все возможные варианты)?

2. Сколько д. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

3. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы суточные выплаты на их зарплату и накладные расходы (транспорт, питание) оказались наименьшими, если дополнительно известно, что суточные накладные расходы на одного человека в первом городе на 3 д. е. меньше, чем во втором?

46. а) Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь нарастить сумму налоговых поступлений, увеличило налог вдвое (до $2t_0$ рублей за единицу товара), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после такого увеличения, чтобы добиться максимальных налоговых поступлений, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства составляет $10\,000 - 2t$ единиц и это число положительно?

б) Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь нарастить сумму налоговых поступлений за счёт увеличения производства товара, уменьшило налог вдвое (до $\frac{t_0}{2}$ рублей за единицу товара), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после такого уменьшения, чтобы добиться максимальных налоговых поступлений, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства составляет $10\,000 - 2t$ единиц и это число положительно?

47. а) В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 26 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $6t^2$ д. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 д. е. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько д. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

б) В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 35 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $5t^2$ д. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 д. е. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько д. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

48. а) Вячеслав является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вячеслав платит рабочему 180 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 120 рублей. Вячеслав готов выделять 6 480 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

б) Фёкла является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Фёкла платит рабочему 240 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 160 рублей. Фёкла готова выделять 15 360 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

49. а) В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 36 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $7t^2$ д. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 д. е. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими (укажите все возможные варианты)? Сколько д. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

б) В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 45 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $9t^2$ д. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 д. е. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими (укажите все возможные варианты)? Сколько д. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

50. а) Олег является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые станки, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $4t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t станков, и если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, то они производят t станков. За каждый час работы (на каждом из заводов) Олег платит рабочему 300 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 30 станков. Какую наименьшую сумму (в млн рублей) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

б) Иннокентий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые станки, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $9t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t станков, и если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, то они производят t станков. За каждый час работы (на каждом из заводов) Иннокентий платит рабочему 400 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 20 станков. Какую наименьшую сумму (в млн рублей) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

Диагностическая работа 5

Вариант 1

1. В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 23 человек. Их нужно распределить на строительство двух частных домов, находящихся в разных городах. Если на строительстве первого дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $2t^2$ д. е. Если на строительстве второго дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ д. е. Дополнительные суточные накладные расходы (транспорт, питание и т. п.) обходятся в 4 д. е. в расчёте на одного рабочего при строительстве первого дома и в 2 д. е. при строительстве второго дома. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы все выплаты на их суточное содержание (т. е. суточная зарплата и суточные накладные расходы) оказались наименьшими? Сколько д. е. в сумме при таком распределении составят все суточные затраты (на зарплату и накладные расходы)?

2. Дмитрий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $25t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, и если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно $16t^3$ часов в неделю, то они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Дмитрий платит рабочему 300 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 90 изделий. Какую наименьшую сумму (в млн рублей) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

3. В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 25 человек. Их нужно распределить на строительство двух частных домов, находящихся в разных городах. Если на строительстве первого дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $7t^2$ д. е. Если на строительстве второго дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ д. е. Дополнительные суточные накладные расходы (транспорт, питание и т. п.) обходятся в 3 д. е. в расчёте на одного рабочего при строительстве первого дома и в 4 д. е. при строительстве второго дома. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы все выплаты на их суточное содержание (т. е.

суточная зарплата и суточные накладные расходы) оказались наименьшими? Сколько д. е. в сумме при таком распределении составят все суточные затраты (на зарплату и накладные расходы)?

4. Ксения является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $16t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, и если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, то они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Ксения платит рабочему 200 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 16 изделий. Какую наименьшую сумму (в рублях) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

5. В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 20 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $5t^2$ д. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ д. е.

1. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими (укажите все возможные варианты)?

2. Сколько д. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

3. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы суточные выплаты на их зарплату и накладные расходы (транспорт, питание) оказались наименьшими, если дополнительно известно, что суточные накладные расходы на одного человека в первом городе на 1 д. е. больше, чем во втором?

6. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть номера категории Б площадью 18 квадратных метров и номера категории А площадью 24 квадратных метра. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1221 квадратный метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Номер категории Б будет приносить отелю 4000 рублей в сутки, а номер категории А — 6000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму (в рублях) сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель? Сколько номеров категории Б и сколько номеров категории А будет в таком отеле?

7. Серафима является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $16t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, и если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно $9t^3$ часов в неделю, то они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Серафима платит рабочему 300 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 11 изделий. Какую наименьшую сумму (в рублях) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

8. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть номера категории Б площадью 24 квадратных метра и номера категории А площадью 36 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 736 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Номер категории Б будет приносить отелю 6000 рублей в сутки, а номер категории А — 8000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму (в рублях) сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель? Сколько номеров категории Б и сколько номеров категории А будет в таком отеле?

Вариант 2

1. В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 25 человек. Их нужно распределить на строительство двух частных домов, находящихся в разных городах. Если на строительстве первого дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ д. е. Если на строительстве второго дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ д. е. Дополнительные суточные накладные расходы (транспорт, питание и т. п.) обходятся в 3 д. е. в расчёте на одного рабочего при строительстве первого дома и в 4 д. е. при строительстве второго дома. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы все выплаты на их суточное содержание (т. е. суточная зарплата и суточные накладные расходы) оказались наименьшими? Сколько д. е. в сумме при таком распределении составят все суточные затраты (на зарплату и накладные расходы)?

2. Евгений является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $36t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, и если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно $25t^3$ часов в неделю, то они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Евгений платит рабочему 200 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 110 изделий. Какую наименьшую сумму (в млн рублей) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

3. В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 28 человек. Их нужно распределить на строительство двух частных домов, находящихся в разных городах. Если на строительстве первого дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $5t^2$ д. е. Если на строительстве второго дома работает t человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ д. е. Дополнительные суточные накладные расходы (транспорт, питание и т. п.) обходятся в 3 д. е. в расчёте на одного рабочего при строительстве первого дома и в 5 д. е. при строительстве второго дома. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы все выплаты на их суточное содержание (т. е. суточная зарплата и суточные накладные расходы) оказались наименьшими? Сколько д. е. в сумме при таком распределении составят все суточные затраты (на зарплату и накладные расходы)?

4. Алевтина является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $25t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, и если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, то они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Алевтина платит рабочему 300 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 14 изделий. Какую наименьшую сумму (в рублях) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

5. В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 22 человек. Их нужно распределить на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $6t^2$ д. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $2t^2$ д. е.

1. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими (укажите все возможные варианты)?

2. Сколько д. е. при таком распределении придётся выплатить рабочим?

3. Как нужно распределить на эти объекты рабочих бригады, чтобы суточные выплаты на их зарплату и накладные расходы (транспорт, питание) оказались наименьшими, если дополнительно известно, что суточные накладные расходы на одного человека в первом городе на 4 д. е. меньше, чем во втором?

6. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть номера категории Б площадью 24 квадратных метра и номера категории А площадью 28 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 860 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Номер категории Б будет приносить отелю 5000 рублей в сутки, а номер категории А — 6000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму (в рублях) сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель? Сколько номеров категории Б и сколько номеров категории А будет в таком отеле?

7. Елена является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $25t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, и если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно $4t^3$ часов в неделю, то они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Елена платит рабочему 300 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 10 изделий. Какую наименьшую сумму (в рублях) придётся тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

8. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть номера категории Б площадью 12 квадратных метров и номера категории А площадью 16 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 490 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Номер категории Б будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер категории А — 2500 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму (в рублях) сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель? Сколько номеров категории Б и сколько номеров категории А будет в таком отеле?

Ответы

Упражнения к § 1

1. а) 15 150; б) 17 400. **2.** а) 8; б) 9. **3.** а) 20; б) 50. **4.** а) 20 000; б) 6000.
5. а) 12; б) 20. **6.** а) 3200; б) 4200. **7.** а) 9000; б) 6000.
8. а) 2431; б) 2314. **9.** а) 2413; б) 2314. **10.** а) 4; б) 2. **11.** а) 12; б) 134.
12. а) 14; б) 2. **13.** а) 1; б) 3. **14.** а) 34; б) 12. **15.** а) 15; б) 10.
16. а) 14; б) 13. **17.** а) 10; б) 3. **18.** а) 12; 256; б) 246; 25.
19. а) 356; б) 45. **20.** а) 126; 346; б) 146; 236. **21.** а) 136; б) 245.
22. а) 3780; б) 3590. **23.** а) 418; б) 672. **24.** а) 38 400; б) 47 970.
25. а) 217 000; б) 105 000. **26.** а) 0,48; б) 22. **27.** а) 202 500; б) 211 700.
28. а) 135; б) 130. **29.** а) 390; б) 1020. **30.** а) 318; б) 393.

Диагностическая работа 1

Вариант 1. **1.** 6000. **2.** 2400. **3.** 12 000. **4.** 4321. **5.** 23. **6.** 4132. **7.** 5400. **8.** 877,5.

Вариант 2. **1.** 7000. **2.** 4800. **3.** 12 000. **4.** 3241. **5.** 12. **6.** 1342. **7.** 5984. **8.** 910.

Упражнения к § 2

1. а) 808; б) 356. **2.** а) 91; б) 58. **3.** а) 7; б) 11. **4.** а) 5; б) 7.
5. а) 7; б) 6. **6.** а) 6; б) 4. **7.** а) 11; б) 10. **8.** а) 655,2; б) 672,6.
9. а) 211,2; б) 231. **10.** а) 7; б) 8. **11.** а) 119; б) 117. **12.** а) 44; б) 47.
13. а) 10; б) 8. **14.** а) 10; б) 8. **15.** а) 20; б) 15. **16.** а) 9; б) 5.
17. а) 6; б) 5. **18.** а) 7; б) 4. **19.** а) 6; б) 8. **20.** а) 9; б) 7.
21. а) 2000; б) 3000. **22.** а) 165 000; б) 191 400. **23.** а) 208; б) 134.
24. а) 125; б) 238. **25.** а) 24 300; б) 21 780. **26.** а) 23; б) 24.
27. а) 30; б) 12. **28.** а) 9,2; б) 18,4. **29.** а) 1855; б) 2350. **30.** а) 11; б) 21.
31. а) 38; б) 9. **32.** а) 15; б) 11. **33.** а) 17; б) 17. **34.** а) 6; б) 11.
35. а) 4; б) 4. **36.** а) 96 000; б) 238 000. **37.** а) 440; б) 825.
38. а) 109 200; б) 270 060. **39.** а) 2480; б) 2115. **40.** а) 760; б) 860.
41. а) 13 250; б) 9400. **42.** а) 46 200; б) 39 150.

Диагностическая работа 2

Вариант 1. **1.** 212. **2.** 6. **3.** 10. **4.** 478,8. **5.** 96. **6.** 25 344. **7.** 176 160. **8.** 26. **9.** 14 360. **10.** 107 625.

Вариант 2. **1.** 266. **2.** 7. **3.** 8. **4.** 511. **5.** 190. **6.** 23 520. **7.** 134 400. **8.** 18. **9.** 9600. **10.** 138 600.

Упражнения к § 3

1. а) 21; б) 288. **2.** а) 25 850; б) 29 900. **3.** а) 8; б) 24. **4.** а) 800; б) 600.
5. а) 1160; б) 76. **6.** а) 75; б) 224. **7.** а) 12 180; б) 18 270.

8. а) 30 000; б) 6000. **9.** а) 3000; б) 420. **10.** а) 1280; б) 1300.
11. а) 12 000; б) 13 500. **12.** а) 20; б) 5. **13.** а) 10; б) 20. **14.** а) 48; б) 42.
15. а) 84; б) 90. **16.** а) 578; б) 320. **17.** а) 69 748; б) 7820.
18. а) 200; б) 300. **19.** а) 400; б) 200. **20.** а) 5; б) 9. **21.** а) 11; б) 23.
22. а) 3680; б) 4180. **23.** а) 8160; б) 24 000. **24.** а) 60; б) 45.
25. а) 20; б) 150. **26.** а) 60; б) 20. **27.** а) 20; б) 75. **28.** а) 20; б) 20.
29. а) 36; б) 55. **30.** а) 20; б) 20. **31.** а) 38; б) 32. **32.** а) 80; б) 75.
33. а) 70; б) 44. **34.** а) 8; б) 6. **35.** а) 11; б) 5. **36.** а) 3000; б) 3000.
37. а) 30; б) 70. **38.** а) 30 000; б) 90 000. **39.** а) 156 000; б) 6300.
40. а) 112; б) 195. **41.** а) 64 800; б) 12 800. **42.** а) 140; б) 150.
43. а) 1296; б) 456. **44.** а) 9; б) 11. **45.** а) 420; б) 320. **46.** а) 360; б) 216.
47. а) 2300; б) 5200. **48.** а) 4; б) 12. **49.** а) 47 088; б) 34 026.
50. а) 264; б) 132. **51.** а) 1584; б) 3300. **52.** а) 11; б) 16. **53.** а) 11; б) 12.
54. а) 46; б) 42. **55.** а) 27; б) 27. **56.** а) 140; б) 150. **57.** а) 10; б) 15.
58. а) 40; б) 30. **59.** а) 530 000; б) 265 000. **60.** а) 11; б) 13.
61. а) 64; б) 31. **62.** а) 32; б) 44. **63.** а) 42,5; б) 16,5.

Диагностическая работа 3

Вариант 1. **1.** 0,235. **2.** 1680. **3.** 28. **4.** 13 000. **5.** 25 000. **6.** 20. **7.** 44. **8.** 198. **9.** 60. **10.** 65.

Вариант 2. **1.** 0,157. **2.** 1190. **3.** 24. **4.** 12 000. **5.** 15 000. **6.** 15. **7.** 28. **8.** 99. **9.** 70. **10.** 40.

Упражнения к § 4

1. а) Первый; б) первый. **2.** а) В течение восьмого года; б) в течение шестого года. **3.** а) 8; б) 10. **4.** а) 19; б) 9. **5.** а) 26; б) 13. **6.** а) 4 и 1; б) 7 и 4. **7.** а) 80; б) 136. **8.** а) 2,045; б) 2,26. **9.** а) 2; б) 3. **10.** а) 4; б) 9.
11. 80,5; б) 20,25. **12.** а) 6; б) 6. **13.** а) 2 622 050; б) 2 296 350.
14. а) 10; б) 20. **15.** а) 200; б) 400. **16.** а) 9; б) 7. **17.** а) 143; б) 36.
18. а) 11; б) 13. **19.** а) 1925; б) 1050. **20.** а) 7; б) 3.
21. а) 6 409 000; б) 3 993 000. **22.** а) 806 400; б) 506 250.
23. а) 3 110 400; б) 2 928 200. **24.** а) 1 900 800; б) 1 016 400.
25. а) 993 000; б) 536 800. **26.** а) 15; б) 18. **27.** а) 10; б) 20. **28.** а) 5; б) 4.
29. а) 800 000; б) 800 000. **30.** а) 326 400; б) 78 980.
31. а) 278 980; б) 526 400. **32.** а) 6; б) 11. **33.** а) 2; б) 20.
34. а) 12,5; б) 125. **35.** а) 5; б) 6.

Диагностическая работа 4

Вариант 1. **1.** а) 136 000; б) 101 000; в) 1000; г) 4 266 000; д) 1 422 000; е) 648 000. **2.** а) 3 480 000; б) 3 000 000. **3.** 3. **4.** 20. **5.** 345 600. **6.** 6.

Вариант 2. **1.** а) 37 000; б) 25 500; в) 500; г) 750 000; д) 339 000; е) 36 000. **2.** а) 392 000; б) 350 000. **3.** 1. **4.** 10. **5.** 544 000. **6.** 9.

Упражнения к § 5

1. а) 19,4; б) 29,2. **2.** а) 15,9; б) 18,81. **3.** а) 3300; б) 4500.
4. а) В одном классе — 22 девочки, в другом — 3 девочки и 20 мальчиков. б) В одном классе — 21 мальчик, в другом — 20 девочек и 2 мальчика.
5. а) 2,685 млн рублей; б) 53 500 руб.
6. а) 1) 4; 2) −0,25; 3) −1,25; 4) 1,5; б) 1) 0,2; 2) 1; 3) −1; 4) −4.
7. а) 1) 12; 2) 10; б) 1) 18; 2) 12.
8. а) 1) 21; 2) 11; 3) 9; б) 1) 30; 2) 12; 3) 10,8.
9. а) 1) $b_{\max}=20$; $b_{\min}=12$; 2) $b_{\max}=34$; $b_{\min}=17$.
б) 1) $b_{\max}=15$; $b_{\min}=7$; 2) $b_{\max}=54$; $b_{\min}=23$.
10. а) 1) 50; 2) 8,8; 3) 11. б) 1) 66; 2) 8,5; 3) $11\frac{5}{7}$.
11. а) $\max(5x+12y)=147$; $\min(5x+12y)=95$;
б) $\max(3x+10y)=86$; $\min(3x+10y)=45$.
12. а) 450 изделий первого типа; 225 изделий второго типа; максимальная прибыль равна 42 750 д. е.;
б) 225 изделий первого типа; 450 изделий второго типа; максимальная прибыль равна 64 125 д. е.
13. а) 10 изделий первого типа; 0 изделий второго типа; максимальная прибыль равна 50 000 д. е.;
б) 20 изделий первого типа; 0 изделий второго типа; максимальная прибыль равна 300 000 д. е.
14. а) 125 000; б) 86 000.
15. а) 162 000 рублей; номеров категории А — 39, номеров категории Б — 2;
б) 203 000 рублей; номеров категории А — 39, номеров категории Б — 2.
16. а) 220; 16 контейнеров типа A; 20 контейнеров типа B;
б) 139; 13 контейнеров типа A; 20 контейнеров типа B.
17. а) 291 200 рублей; номеров категории А — 4, номеров категории Б — 56;
б) 194 600 рублей; номеров категории А — 3, номеров категории Б — 52.
18. а) 16 изделий первого типа; 8 изделий второго типа; максимальная прибыль равна 192 000 д. е.;
б) 6 изделий первого типа; 22 изделия второго типа; максимальная прибыль равна 354 000 д. е.
19. а) 800; б) 450. **20.** а) 50; б) 1800.
21. а) $\min(3x+4y)=-14$, $\max(3x+4y)=14$;
б) $\min(5x+3y)=-12$, $\max(5x+3y)=12$.
22. а) $\min(2x+7y)=-8$, $\max(2x+7y)=8$;
б) $\min(4x+9y)=-6$, $\max(4x+9y)=6$.
23. а) 104; б) 119. **24.** а) 150; б) 174. **25.** а) 507; б) 800.
26. а) 693 600 рублей; б) 810 000 рублей. **27.** а) 9; б) 8. **28.** а) 500; б) 700.
29. а) 280; б) 200. **30.** а) 6,75; б) 1,28.
31. а) На первый объект нужно направить 6 рабочих, на второй объект — 19 рабочих, зарплата составит 469 д. е.;
б) на первый объект нужно направить 4 рабочих, на второй объект — 18 рабочих, зарплата составит 388 д. е.

32. а) 40; б) 33. **33.** а) 90; б) 403,2.
34. а) На первый объект нужно направить 9 рабочих, на второй объект — 13 рабочих, зарплата составит 581 д. е.;
б) на первый объект нужно направить 8 рабочих, на второй объект — 10 рабочих, зарплата составит 556 д. е.
35. а) Отдано 1682 Гбайт, получено первым сервером 1600 Гбайт, вторым сервером — 1764 Гбайт;
б) отдано 3362 Гбайт, получено первым сервером 324 Гбайт, вторым сервером — 6400 Гбайт.
36. а) На первый объект нужно направить 7 рабочих, на второй объект — 23 рабочих, либо на первый объект нужно направить 8 рабочих, на второй объект — 22 рабочих; зарплата составит 676 д. е.;
б) на первый объект нужно направить 3 рабочих, на второй объект — 18 рабочих, либо на первый объект нужно направить 4 рабочих, на второй объект — 17 рабочих; зарплата составит 369 д. е.
37. а) 750 000; б) 1 328 000.
38. а) На первый объект нужно направить 15 рабочих, на второй объект — 11 рабочих; суточные расходы составят 1252 д. е.;
б) на первый объект нужно направить 8 рабочих, на второй объект — 16 рабочих; суточные расходы составят 848 д. е.
39. а) 1 903 800; б) 983 200.
40. а) На первый объект нужно направить 3 рабочих, на второй объект — 11 рабочих; суточные расходы составят 327 д. е.;
б) на первый объект нужно направить 4 рабочих, на второй объект — 8 рабочих; суточные расходы составят 316 д. е.
41. а) 1156; б) 1875.
42. а) На первый объект нужно направить 9 рабочих, на второй объект — 12 рабочих, зарплата составит 981 д. е.;
б) на первый объект нужно направить 6 рабочих, на второй объект — 8 рабочих, зарплата составит 536 д. е.
43. а) 9,72 млн рублей; б) 5,12 млн рублей. **44.** а) 10; б) 9.
45. а) 1) На первый объект нужно направить 4 рабочих, на второй объект — 14 рабочих, либо на первый объект нужно направить 5 рабочих, на второй объект — 13 рабочих; 2) 488 д. е.; 3) на первый объект нужно направить 4 рабочих, на второй объект — 14 рабочих;
б) 1) на первый объект нужно направить 4 рабочих, на второй объект — 11 рабочих, либо на первый объект нужно направить 5 рабочих, на второй объект — 10 рабочих; 2) 475 д. е.; 3) на первый объект нужно направить 5 рабочих, на второй объект — 10 рабочих.
46. а) Уменьшить на 25 %; б) увеличить на 50 %.
47. а) На первый объект нужно направить 4 рабочих, на второй объект — 22 рабочих, зарплата составит 580 д. е.;
б) на первый объект нужно направить 6 рабочих, на второй объект — 29 рабочих, зарплата составит 1021 д. е.

48. а) 300; б) 400.
49. а) На первый объект нужно направить 4 рабочих, на второй объект — 32 рабочих, либо на первый объект нужно направить 5 рабочих, на второй объект — 31 рабочего; зарплата составит 1136 д. е.;
б) на первый объект нужно направить 4 рабочих, на второй объект — 41 рабочего, либо на первый объект нужно направить 5 рабочих, на второй объект — 40 рабочих; зарплата составит 1825 д. е.
50. а) 3,6; б) 1,8.

Диагностическая работа 5

Вариант 1. 1. На первый объект нужно направить 15 рабочих, на второй объект — 8 рабочих; суточные расходы составят 782 д. е.
2. 1080.
3. На первый объект нужно направить 8 рабочих, на второй объект — 17 рабочих; суточные расходы составят 1407 д. е.
4. 525 800.
5. 1) На первый объект нужно направить 7 рабочих, на второй объект — 13 рабочих, либо на первый объект нужно направить 8 рабочих, на второй объект — 12 рабочих; 2) 752 д. е.; 3) на первый объект нужно направить 7 рабочих, на второй объект — 13 рабочих.
6. 304 000 рублей; номеров категории А — 50, номеров категории Б — 1.
7. 1 183 200.
8. 182 000 рублей; номеров категории А — 1, номеров категории Б — 29.

Вариант 2. 1. На первый объект нужно направить 11 рабочих, на второй объект — 14 рабочих; суточные расходы составят 1161 д. е.
2. 1980.
3. На первый объект нужно направить 11 рабочих, на второй объект — 17 рабочих; суточные расходы составят 1590 д. е.
4. 578 400.
5. 1) На первый объект нужно направить 5 рабочих, на второй объект — 17 рабочих, либо на первый объект нужно направить 6 рабочих, на второй объект — 16 рабочих; 2) 728 д. е.; 3) на первый объект нужно направить 6 рабочих, на второй объект — 16 рабочих.
6. 184 000 рублей; номеров категории А — 29, номеров категории Б — 2.
7. 614 100.
8. 81 000 рублей; номеров категории А — 2, номеров категории Б — 38.

Содержание