12

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ 2020

ЕГЭ 2020

Под редакцией
И. В. Ященко

С. А. Шестаков

Производная и первообразная. Исследование функций

Рабочая тетрадь

12
Профильный

ФГОС

МАТЕМАТИКА

С. А. Шестаков

ЕГЭ 2020. Математика

Производная и первообразная. Исследование функций

Задача 12 (профильный уровень)

Рабочая тетрадь

Под редакцией И. В. Ященко

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС)

Москва
Издательство МЦНМО
2020

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Ш51

Шестаков С. А.

Ш51 ЕГЭ 2020. Математика. Производная и первообразная. Исследование функций. Задача 12 (профильный уровень). Рабочая тетрадь / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2020. — 96 с.

ISBN 978-5-4439-1412-1

Рабочая тетрадь по математике серии «ЕГЭ 2020. Математика» ориентирована на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче Единого государственного экзамена по математике в 2020 году по теме «Производная и первообразная. Исследование функций» (профильный уровень).

По сравнению с предыдущим изданием настоящее существенно переработано.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль знаний по темам «Производная и ее применение к исследованию функций» и «Первообразная». Рабочая тетрадь ориентирована на один учебный год, однако при необходимости позволит в кратчайшие сроки восполнить пробелы в знаниях выпускника.

Тетрадь предназначена для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

12+

Учебно-методическое пособие

Сергей Алексеевич Шестаков

ЕГЭ 2020. Математика. Производная и первообразная. Исследование функций. Задача 12 (профильный уровень). Рабочая тетрадь

Под редакцией И. В. Ященко

Подписано в печать 07.07.2019 г. Формат 70 × 90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 6. Тираж 2000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89. E-mail: mittelpress@mail.ru

ISBN 978-5-4439-1412-1

От редактора серии

Прежде чем вы начнёте работать с тетрадями, дадим некоторые пояснения и советы.

Планируется, что в 2020 году у вас будет возможность выбрать уровень экзамена по математике — базовый или профильный. Вариант базового уровня будет состоять из 20 задач, проверяющих освоение Федерального государственного образовательного стандарта на базовом уровне.

Вариант ЕГЭ профильного уровня состоит из двух частей. Первая часть содержит 8 заданий базового уровня сложности по основным темам школьной программы, включая практико-ориентированные задания с кратким ответом. Вторая часть состоит из 11 более сложных заданий по курсу математики средней школы; из них четыре с кратким ответом (задания 9—12) и семь с развёрнутым ответом (задания 13—19).

Рабочие тетради организованы в соответствии со структурой экзамена и позволят вам подготовиться к выполнению всех заданий с кратким ответом, выявить и устранить пробелы в своих знаниях.

Профильный уровень предназначен в первую очередь для тех, кому математика требуется при поступлении в вуз. Если вы ориентируетесь на этот уровень, то понимаете, что нужно уметь решать все задания с кратким ответом — ведь на решение такой задачи и вписывание ответа в лист на экзамене уйдёт меньше времени, чем на задание с развёрнутым решением; обидно терять баллы из-за ошибок в относительно простых задачах.

Кроме того, тренировка на простых задачах позволит вам избежать технических ошибок и при решении задач с полным решением.

Работу с каждым параграфом следует начать с выполнения диагностической работы. Затем рекомендуется прочитать решения задач и сравнить свои решения с решениями, приведёнными в книге. Если какая-то задача или тема вызывает затруднения, следует после повторения материала выполнить тематические тренинги.

Для завершающего контроля готовности к выполнению соответствующих заданий служат диагностические работы, размещённые в конце параграфа.

Работа с серией рабочих тетрадей для подготовки к ЕГЭ по математике позволит выявить и в кратчайшие сроки ликвидировать пробелы в знаниях, но не может заменить систематического изучения математики.

Желаем успеха!

Введение

Это пособие предназначено для подготовки к решению задач по темам «Применение производной к исследованию функций» и «Первообразная», в частности задачи 12 Единого государственного экзамена по математике (профильный уровень). Эта задача представляет собой традиционное для школьных учебников задание на исследование функций. Функция в таких задачах задана формулой, а сами задачи можно условно разделить на две группы: в задачах первой группы нужно найти точки экстремума данной функции или сами экстремумы, задачи второй группы — задачи на вычисление наибольшего или наименьшего значения функции на отрезке. Кроме того, поскольку в открытом банке ЕГЭ по математике профильного уровня содержатся задания по теме «Первообразная», для отработки навыков решения задач по этой теме предназначен § 2.

Для того чтобы сделать подготовку к ЕГЭ максимально эффективной, в пособие включены задания на исследование функций, соответствующие всем шести функционально-числовым линиям школьного курса:

- целые рациональные функции (многочлены),
- дробно-рациональные функции,
- иррациональные функции,
- тригонометрические функции,
- показательная функция,
- логарифмическая функция.

Здесь под иррациональными функциями понимаются функции, заданные формулой, в которой переменная находится под знаком корня n-й степени или имеет дробную степень.

Такое построение пособия позволит, с одной стороны, выявить существующие пробелы и проблемные зоны в подготовке с целью их устранения и выработки устойчивых навыков решения задач базового уровня и несколько более сложных задач на исследование функций, а с другой — использовать комплексный подход при организации и проведении обобщающего повторения.

Пособие состоит из двух параграфов: «Вычисление производных. Исследование функций с применением производной» и «Первообразная». Первый параграф содержит 6 диагностических и 18 тренировочных работ в двух вариантах каждая, второй параграф — 3 диагностические и 6 тренировочных работ. В оба параграфа включены комментированный разбор задач начальной диагностической работы, а также небольшой раздел, в котором приводятся основные понятия, факты, формулы и краткие методические рекомендации. Каждая диагностическая работа содержит 12 заданий (по два на каждую из шести функционально-числовых линий школьного курса в соответствии с указанным выше порядком). Каждая тренировочная работа содержит 10 задач для выработки или закрепления навыков решения задач определённого типа.

Приступая к работе с любым из параграфов пособия целесообразно выполнить начальную диагностическую работу, определить, какие задачи вызывают затруднения, и при необходимости обратиться к разбору задач. После этого нужно потренироваться в решении задач каждого типа, выполнив тренировочные работы. Для завершения подготовки следует обратиться к диагностическим работам в конце параграфа и постараться решить их без ошибок. Желательно, чтобы время решения любой из диагностических и тренировочных работ не превышало одного часа.

Подчеркнём, что в пособии рассматриваются задания, в значительной части отвечающие по типам и уровню сложности заданию 12 ЕГЭ по математике профильного уровня. Умение решать такие задачи является базовым: без него невозможно продвинуться в решении более сложных задач. Тем не менее часть включённых в пособие задач несколько сложнее задачи 12 демоверсии: их решение позволит нарастить определённую «математическую мускулатуру» и чувствовать себя на экзамене застрахованным от неприятных неожиданностей.

При подготовке к решению задач с кратким ответом Единого государственного экзамена нужно помнить следующее. Проверка ответов осуществляется компьютером после сканирования бланка ответов и сопоставления результатов сканирования с правильными ответами. Поэтому цифры в бланке ответов следует писать разборчиво и строго в соответствии с инструкцией по заполнению бланка (с тем чтобы, например, 1 и 7 или 8 и В распознавались корректно). К сожалению, ошибки сканирования полностью исключить нельзя, поэтому, если есть уверенность в задаче, за которую получен минус, нужно идти на апелляцию. Ответом к задаче может быть только целое число или конечная десятичная дробь. Ответ, зафиксированный в иной форме, будет распознан как неправильный. В этом смысле задание 12 не является исключением: если результатом вычислений явилась обыкновенная дробь, например $\frac{3}{4}$, перед записью ответа в бланк её нужно обратить в десятичную, т. е. в ответе написать 0,75. Каждый символ (в том числе запятая и знак «минус») записывается в отдельную клеточку, как это показано на полях пособия.

Автор признателен и благодарен О. А. Васильевой за предложения, замечания, советы, значительно способствовавшие улучшению рукописи.

§1. Вычисление производных. Исследование функций с применением производной

Основные понятия, факты, формулы

Понятие производной и правила вычисления производных

Напомним, что касательная к графику функции определяется как предельное положение секущей этого графика. См. книгу «ЕГЭ 2020. Математика. Функции, заданные графиками, и их производные. Задача 7 (профильный уровень). Задача 14 (базовый уровень)» (М.: МЦНМО, 2020). При таком определении на графике гладкой функции $y=f(x)$ выбираются две точки A и B и рассматривается секущая AB. Если перемещать точку B по графику функции в направлении точки A (абсциссу точки A обозначим x_0), то секущая будет поворачиваться вокруг точки A; её предельное положение и называется касательной к графику функции в точке x_0 (рис. 1).

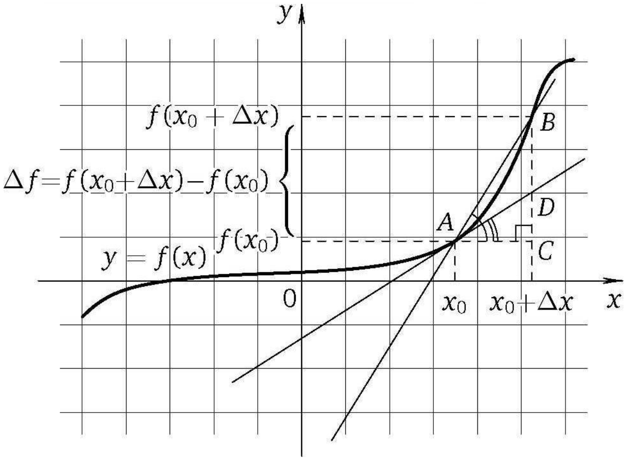


Рис. 1

Обозначим теперь разность абсцисс точек B и A символом Δx (единый символ, который читается «дельта икс» и называется приращением аргумента). Тогда абсцисса точки B будет равна $x_0+\Delta x$, а ординаты точек B и A будут равны соответственно $f(x_0+\Delta x)$ и $f(x_0)$. Их разность теперь естественно обозначить Δf, считая, что $\Delta f = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, и назвать её приращением функции. Для данного графика угловой коэффициент секущей AB есть не что иное, как

$$\operatorname{tg}\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{\Delta f}{\Delta x},$$

а угловой коэффициент k касательной получается как предельное значение этого тангенса при приближении точки B к точке A, т. е. при уменьшении Δx, или, как говорят математики, при стремлении Δx к нулю. Итак, точка A является предельным положением для точки B, нуль является предельным значением для Δx, k является предельным значением для $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Для записи понятия «предельное значение» используют символ lim (от латинского слова *limes* — предел), под этим символом указывают, при каком условии достигается предельное значение. Чтобы не загромождать запись, вместо символа lim часто используют обычную стрелку «→», которая заменяет слово «стремится» и производные этого слова. В нашем случае следует писать

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} \to k \quad \text{при } \Delta x \to 0,$$

поскольку касательная является предельным положением секущей, а последнее достигается при $\Delta x \to 0$ (читается: при дельта икс, стремящемся к нулю). Таким образом, угловой коэффициент касательной есть не что иное, как предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю. Именно этот предел математики и называют производной функции $y = f(x)$ в точке x_0. Такое определение производной является более общим, оно, вообще говоря, не требует обращения к понятию касательной, ведь можно просто ограничиться составлением отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ и нахождением его предельного значения, что обычно и делается для функций, заданных формулами, и, в свою очередь, позволяет получить формулы для вычисления производных этих функций — без необходимости обращаться к построению их графиков, которое часто является сложной и трудоёмкой задачей. Таким образом, по определению $f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Числитель и знаменатель отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, предельным значением которого является производная, представляют собой разности двух величин каждой, а разность на латыни — это *differentia*, отсюда возник часто использующийся термин: операция вычисления производной называется дифференцированием, а функция, для которой такая операция возможна, — дифференцируемой. Само отношение при этом часто также называют разностным.

То, что производная функции в данной точке равна угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику функции в этой точке (в этом утверждении состоит так называемый *геометрический смысл производной*), является, вообще говоря, следствием этого более общего определения, ещё одной — и не последней — ипостасью производной.

Покажем, как можно найти формулу для производной функции, выбрав в качестве примера функцию $f(x) = x^2$. Для того чтобы найти производную этой функции при любом значении переменной, составим для какого-то из этих значений, которое обозначим x_0, разностное отношение и упростим его:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} =$$
$$= \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$$

Предельным значением полученной суммы при $\Delta x \to 0$ будет число $2x_0$, поскольку Δx стремится к нулю, а число $2x_0$ остаётся неизменным. Тем самым производная функции $f(x)=x^2$ в любой точке x_0 будет равна $2x_0$. Этот факт можно записать так: $(x^2)'=2x$.

Конечно, приведённый пример ни в коей мере не претендует на строгость, он служит довольно грубой иллюстрацией того, что для функции, заданной формулой, можно найти формулу производной. Сделать это во многих случаях не слишком просто, поэтому ограничимся только сводкой производных основных элементарных функций, которую называют таблицей производных:

1) $(c)'=0$, здесь c — произвольное число;
2) $(x)'=1$;
3) $(x^2)'=2x$;
4) $(x^3)'=3x^2$;
5) $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;
6) $(x^a)'=ax^{a-1}$;
7) $(\sin x)'=\cos x$;
8) $(\cos x)'=-\sin x$;
9) $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$;
10) $(a^x)'=a^x \ln a$, здесь $a>0$, $a \neq 1$;
11) $(e^x)'=e^x$;
12) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x \ln a}$, здесь $a>0$, $a \neq 1$;
13) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

Разумеется, формулы 2—5 являются частными случаями формулы 6, они приведены здесь только в силу частого использования.

Действия с производными выполняются по следующим правилам (они называются правилами дифференцирования):

1) $(f(x) \pm g(x))'=f'(x) \pm g'(x)$;
2) $(c \cdot f(x))'=c \cdot f'(x)$, здесь c — произвольное число;
3) $(f(x) \cdot g(x))'=f'(x) \cdot g(x)+g'(x) \cdot f(x)$;
4) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x) \cdot g(x)-g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$.

Для вычисления производных функций вида $f(ax+b)$ нужно число a умножить на взятое из таблицы выражение для производной функции $f(x)$, заменив в этом выражении x на $ax+b$. Пояснить эту формулу можно примерно так.

Значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику функции в этой точке. Пусть, например, $a>1$. Тогда график функции $y=f(ax)$ получается из графика функции $y=f(x)$ с помощью сжатия в a раз вдоль оси абсцисс. Если представить, что к графику функции $y=f(x)$ проведена касательная в некоторой точке x_0, то при сжатии абсцисса этой точки уменьшится в a раз, а ордината не изменится. Если в прямоугольном треугольнике противолежащий некоторому углу катет оставить без изменения, а прилежащий уменьшить в a раз, то тангенс этого угла увеличится в a раз. Поэтому угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(ax)$ будет в a раз больше углового коэффициента соответственной касательной к графику функции $y = f(x)$. Остальные возможности для a рассматриваются аналогично. Параллельный же перенос графика вдоль оси абсцисс приведёт и к параллельному переносу касательной, но её угловой коэффициент при этом не изменится. Ну а график функции $y = f(ax+b)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью последовательного выполнения сжатия (растяжения) вдоль оси абсцисс и параллельного переноса (если $a < 0$, добавится ещё и симметрия относительно оси ординат, приводящая к изменению углового коэффициента на противоположный, что опять-таки будет учтено при умножении производной на a). Разумеется, это объяснение не является строгим и содержит много натяжек, но позволяет хоть как-то обосновать правило вычисления производной для функции $f(ax+b)$.

Применение производной к исследованию функций

Для успешного решения задач на исследование функций с помощью производной необходимо уверенное владение навыками вычисления производных и решения неравенств. Исследование дифференцируемой функции на возрастание (убывание) сводится к определению промежутков знакопостоянства её производной. Приведём соответствующие утверждения.

Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала, то функция $y = f(x)$ возрастает на этом интервале (достаточный признак возрастания функции). Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала, то функция $y = f(x)$ убывает на этом интервале (достаточный признак убывания функции).

Решение задач на нахождение точек максимума и минимума (точек экстремума) функции основывается на следующих утверждениях.

Признак максимума. *Если функция f непрерывна в точке x_0, $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; a)$, то x_0 — точка максимума функции f (упрощённая формулировка: если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 — точка максимума).*

Признак минимума. *Если функция f непрерывна в точке x_0, $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; a)$, то x_0 — точка минимума функции f (упрощённая формулировка: если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума).*

Условие непрерывности функции в точке x_0 является существенным. Если это условие не выполнено, точка x_0 может не являться точкой максимума (минимума), даже если функция f определена в ней и производная меняет знак при переходе через x_0.

В самом деле, рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Хотя эта функция определена в точке $x = 0$ и в этой точке производная $f'(x) = 2x$ меняет знак с минуса на плюс, эта точка не является точкой минимума.

Подчеркнём, что точками максимума и минимума являются лишь точки области определения функции и «ординат» эти точки иметь, разумеется, не могут. Тем не менее очень часто называют, например, точку минимума функции $y = x^2 + 3$ не «точка 0», а «точка $(0; 3)$», подразумевая точку графика функции. Такое утверждение является ошибочным.

Значение функции в точке минимума называется *минимумом* функции, а значение в точке максимума — *максимумом* функции.

Далее, если функция возрастает (убывает) на каждом из двух промежутков, то на их объединении она далеко не всегда является возрастающей (убывающей). Например, о функции $y = \operatorname{tg} x$ очень часто приводятся следующие ошибочные утверждения: «функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на всей области определения», «функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на объединении промежутков вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$». Если бы эти утверждения были верны, то из неравенства $2 > 1$ следовало бы, что $\operatorname{tg} 2 > \operatorname{tg} 1$, а это не так. Аналогично обстоит дело с функцией $y = \frac{1}{x}$: вывод о том, что она убывает на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, является математической ошибкой. В самом деле, из того что $2 > -3$, отнюдь не следует, что $\frac{1}{2} < \frac{1}{-3}$, и, следовательно, функция $y = \frac{1}{x}$ не является убывающей на объединении промежутков $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Перечислять промежутки возрастания лучше, используя точку с запятой или союз «и», а не знак объединения множеств. Впрочем, это, скорее, совет на будущее, на случай, если задача на исследование функций когда-нибудь попадёт во вторую часть ЕГЭ по математике и будет требовать полного решения.

Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке, нужно вычислить её значения в точках экстремума, принадлежащих отрезку, и значения на концах отрезка. Наибольшее (наименьшее) из вычисленных значений и будет наибольшим (соответственно наименьшим) значением функции на отрезке. Для функции, непрерывной на интервале, аналогичное утверждение справедливо далеко не всегда. В качестве примера рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $(0; 1)$. На этом интервале функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений. Действительно, если предположить, что в точке x_0 функция достигает, например, наибольшего значения, то это наибольшее значение равно $y(x_0) = x_0$. Но тогда очевидно, что в любой точке $x_1 \in (x_0; 1)$ значение функции окажется больше, чем x_0, поскольку функция $y = \operatorname{tg} x$ является возрастающей.

Наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ обычно обозначаются символами $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ и $\min\limits_{[a;b]} f(x)$ соответственно.

Из теоремы о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции следует, что если наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке равны числам m и M соответственно, то множеством значений функции на данном отрезке является отрезок $[m; M]$. Поэтому к решению задачи на отыскание множества значений функции, непрерывной на отрезке, также применим алгоритм вычисления наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции.

Рассмотрим ещё одну типичную ситуацию. При исследовании на монотонность непрерывной и дифференцируемой на $\mathbb{R}$ функции $y = 3x^4 - 4x^3$ в ответе нужно указать только два промежутка монотонности: $(-\infty; 1]$, на котором функция убывает, и $[1; +\infty)$ — промежуток возрастания. Точка 0, хотя и является критической, не будет концом промежутка монотонности, так как производная в этой точке не меняет знак. Напротив, при исследовании функции $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}$ в ответе должны быть указаны три промежутка монотонности: $(-\infty; 0)$ и $[1; +\infty)$ — промежутки возрастания, $(0; 1]$ — промежуток убывания.

Значение функции в точке минимума, принадлежащей отрезку, вовсе не обязательно является наименьшим значением функции на этом отрезке. Например, для функции $y = x^3 - 3x$ наименьшим значением на отрезке $[-5; 2]$ является вовсе не $y(1) = -2$ (значение в точке минимума), а $y(-5) = -110$. Разумеется, аналогичное замечание справедливо и для точек максимума.

Для решения задач может оказаться полезным следующее свойство непрерывных функций: «если функция $y = f(x)$ имеет на промежутке I единственную точку экстремума x_0 и эта точка является точкой минимума, то в ней достигается наименьшее значение функции на данном промежутке». Аналогичное утверждение справедливо для точки максимума и наибольшего значения функции. Например, если функция $y = f(x)$, непрерывная на отрезке $[a; b]$, имеет на промежутке $(a; b)$ единственную точку экстремума x_0 и эта точка является точкой максимума функции, то наибольшее значение функции на отрезке $[a; b]$ равно $f(x_0)$.

Иногда при решении задач на исследование функций оказывается, что на данном промежутке точек экстремума нет. Такой ситуации не надо пугаться: она означает, что на этом промежутке производная принимает значения одного знака, т. е. функция является монотонной на нём. Остаётся заметить, что если функция возрастает на отрезке, то наибольшее значение на нём достигается в правом конце отрезка, а наименьшее — в левом; если функция убывает на отрезке, то наибольшее значение на нём достигается в левом конце отрезка, а наименьшее — в правом.

Заметим ещё и следующее: алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке (как, впрочем, и любой другой алгоритм) не является единственным способом решения предложенной задачи. Можно, например, исследовать функцию на монотонность на данном отрезке и исходя из этого исследования найти наибольшее и наименьшее значения. Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения линейной или квадратичной функции на отрезке, вовсе не обязательно применять производную, а достаточно ограничиться известными свойствами линейной и квадратичной функций. Например, для функции $y=-7x+3$ наибольшим и наименьшим значениями на отрезке $[-1; 2]$ будут соответственно числа $y(-1)=10$ и $y(2)=-11$, так как функция убывает на данном отрезке.

При вычислении наибольшего и наименьшего значений функции $y=x^2-2x-5$ на отрезке $[0; 7]$ можно поступить следующим образом. Поскольку абсцисса $x_0=1$ вершины параболы, являющейся графиком квадратичной функции $y=x^2-2x-5$, принадлежит отрезку $[0; 7]$, наименьшего значения эта функция достигает в точке $x_0=1$ (это значение: $y(1)=-6$), а наибольшего — в том из концов отрезка $[0; 7]$, который наиболее удалён от x_0, то есть при $x=7$ (это значение легко вычислить: $y(7)=30$).

В некоторых более сложных случаях наибольшее и наименьшее значения функции также можно вычислять без использования производной. Найдём, например, наибольшее и наименьшее значения функции $y=\cos 2x+\sin x$ на отрезке $[0; \pi]$. Воспользовавшись формулой двойного аргумента, получим, что $y=-2\sin^2 x+\sin x+1$. Пусть $\sin x=t$. Поскольку по условию $x\in[0; \pi]$, получаем, что $t\in[0; 1]$. Таким образом, задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений квадратичной функции $y=-2t^2+t+1$ на отрезке $[0; 1]$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Абсцисса вершины параболы — $t_0=\dfrac{1}{4}\in[0; 1]$. Поэтому наибольшее значение достигается в точке t_0, а наименьшее — в том из концов отрезка $[0; 1]$, который наиболее удалён от точки t_0, то есть $\max\limits_{[0;1]} y(t)=y\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{9}{8}$, $\min\limits_{[0;1]} y(t)=y(1)=0$. Соответствующие значения x находятся из уравнений $\sin x=\dfrac{1}{4}$ и $\sin x=1$ при условии $x\in[0; \pi]$.

Аналогично нахождение множества значений функции $y=5\cos^2 x-3\cos x+1$ сводится к нахождению множества значений функции $f(t)=5t^2-3t+1$ на отрезке $[-1; 1]$. Наибольшее и наименьшее значения функции $f(t)$ достигаются в точках $t=-1$ и $t=0{,}3$ соответственно и равны $f(-1)=9$ и $f(0{,}3)=0{,}55$. Таким образом, множеством значений функции $y=5\cos^2 x-3\cos x+1$ является отрезок $[0{,}55; 9]$.

Перейдём к задачам на исследование функций для каждой функционально-алгебраической линии школьного курса математики, предварив тренировочные работы для каждой линии задачами на вычисление производных.

Ответы:

Диагностическая работа 1

Вариант 1

1. Найдите точку максимума функции
$$y = x^3 - 48x + 17.$$

2. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x^3 - 27x \quad \text{на отрезке } [0; 4].$$

3. Найдите точку минимума функции
$$y = \frac{25}{x} + x + 25.$$

4. Найдите наибольшее значение функции
$$y = x + \frac{9}{x} \quad \text{на отрезке } [-4; -1].$$

5. Найдите точку максимума функции
$$y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}.$$

6. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1 \quad \text{на отрезке } [1; 9].$$

7. Найдите точку минимума функции
$$y = (0{,}5 - x)\cos x + \sin x,$$
принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

8. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 4\sqrt{2}\cos x + 4x - \pi + 4 \quad \text{на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

9. Найдите точку максимума функции
$$y = (x^2 - 17x - 17)e^{7-x}.$$

10. Найдите наименьшее значение функции
$$y = (x - 13)e^{x-12} \quad \text{на отрезке } [11; 13].$$

11. Найдите точку минимума функции
$$y = x - 5\ln x.$$

12. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 5 - 7x + 7\ln(x + 3) \quad \text{на отрезке } [-2{,}5; 0].$$

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вариант 2

1. Найдите точку максимума функции
$$y = x^3 - 147x + 14.$$

2. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x^3 - 12x + 14 \quad \text{на отрезке } [0;\,3].$$

3. Найдите точку минимума функции
$$y = \frac{121}{x} + x + 10.$$

4. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 2x + \frac{2}{x} + 14 \quad \text{на отрезке } [-7;\,-0{,}5].$$

5. Найдите точку максимума функции
$$y = 3 + 3x - 2x^{\frac{3}{2}}.$$

6. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x^{\frac{3}{2}} - 15x + 18 \quad \text{на отрезке } [2;\,408].$$

7. Найдите точку минимума функции
$$y = (3 - 2x)\cos x + 2\sin x + 1,$$
принадлежащую промежутку $\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)$.

8. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 6\sqrt{2}\cos x + 6x - \frac{3\pi}{2} + 15 \quad \text{на отрезке } \left[0;\,\frac{\pi}{2}\right].$$

9. Найдите точку максимума функции
$$y = (3x^2 - 21x + 21)e^{15-x}.$$

10. Найдите наименьшее значение функции
$$y = (x - 8)e^{x-7} \quad \text{на отрезке } [6;\,8].$$

11. Найдите точку минимума функции
$$y = 2x - \ln(x + 5) + 2.$$

12. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 10\ln(x + 9) - 10x - 17 \quad \text{на отрезке } [-8{,}5;\,0].$$

Целые рациональные функции. Решения задач 1 и 2 варианта 1 диагностической работы 1

1. Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 - 48x + 17.$$

Решение. Найдём производную данной функции:

$$y' = 3x^2 - 48.$$

Определим промежутки знакопостоянства производной, разложив полученное выражение на множители:

$$3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x+4)(x-4).$$

В точке $x = -4$ производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, эта точка и является единственной точкой максимума.

$y'(x)$	$+$	max	$-$	min	$+$	
$y(x)$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	4	$\nearrow$	x

Ответ: -4.

2. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^3 - 27x$$

на отрезке $[0; 4]$.

Решение. Найдём производную функции

$$y = x^3 - 27x$$

и воспользуемся формулой разности квадратов:

$$y' = 3x^2 - 27, \quad y' = 3(x-3)(x+3).$$

Производная меняет знак в точках $x = -3$ и $x = 3$. Отрезку $[0; 4]$ принадлежит только точка $x = 3$, в которой производная меняет знак с минуса на плюс. Таким образом, точка $x = 3$ является точкой минимума и единственной точкой экстремума на данном отрезке. Значит, своего наименьшего значения на данном отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдём наименьшее значение:

$$y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54.$$

Ответ: -54.

Ответы:

Тренировочная работа 1

Вариант 1

1

1. Найдите $f'(0)$, если
$$f(x)=3x^4-15x^2-4x+16.$$

2

2. Найдите $f'(-1)$, если
$$f(x)=x^5+x^7+x^{12}.$$

3

3. Найдите $f'(1)$, если
$$f(x)=x^3x^4x^7.$$

4

4. Найдите $f'(4)$, если
$$f(x)=(x-5)^{14}.$$

5

5. Найдите $f'(-3)$, если
$$f(x)=3(x+4)^5.$$

6

6. Найдите $f'(4)$, если
$$f(x)=(3x-11)^8.$$

7

7. Найдите $f'(-5)$, если
$$f(x)=(x+4)^6+(x+6)^4.$$

8

8. Найдите $f'(-4)$, если
$$f(x)=(x-5)(x+5)^4.$$

9

9. Найдите $y'(-4)$, если
$$y=(x+3)^7(x+7)^3.$$

10

10. Найдите $f'(-3)$, если
$$f(x)=(x+1)(x+2)(x+3).$$

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Вариант 2

1. Найдите $f'(0)$, если
$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 5x + 18.$$

1

2. Найдите $f'(-1)$, если
$$f(x) = x^3 + x^{11} + x^{14}.$$

2

3. Найдите $f'(1)$, если
$$f(x) = x^2x^6x^8.$$

3

4. Найдите $f'(3)$, если
$$f(x) = (x-4)^{15}.$$

4

5. Найдите $f'(-4)$, если
$$f(x) = 6(x+5)^4.$$

5

6. Найдите $f'(5)$, если
$$f(x) = (4x-19)^7.$$

6

7. Найдите $f'(-9)$, если
$$f(x) = (x+10)^8 + (x+8)^{10}.$$

7

8. Найдите $f'(-6)$, если
$$f(x) = (x-7)(x+7)^6.$$

8

9. Найдите $y'(-3)$, если
$$y(x) = (x+4)^5(x+5)^4.$$

9

10. Найдите $f'(2)$, если
$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1234567890–,

Тренировочная работа 2

Вариант 1

1. Найдите точку минимума функции
$$y = x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

2. Найдите точку максимума функции
$$y = 9 - 4x + 4x^2 - x^3.$$

3. Найдите точку минимума функции
$$y = x^3 - 3{,}5x^2 + 2x - 3.$$

4. Найдите точку максимума функции
$$y = x^3 + x^2 - 8x - 7.$$

5. Найдите точку минимума функции
$$y = x^3 - 4x^2 - 3x - 12.$$

6. Найдите точку максимума функции
$$y = x^3 + 8x^2 + 16x + 3.$$

7. Найдите точку минимума функции
$$y = x^3 + x^2 - 16x + 5.$$

8. Найдите точку максимума функции
$$y = x^3 + 4x^2 + 4x + 4.$$

9. Найдите точку минимума функции
$$y = x^3 - 4x^2 - 16x + 8.$$

10. Найдите точку максимума функции
$$y = x^3 + 5x^2 + 3x + 2.$$

Ответы:

Вариант 2

1. Найдите точку максимума функции

$$y = \frac{x^3}{3} - 64x + 19.$$

1

2. Найдите точку минимума функции

$$y = x^3 - 6x^2 + 11.$$

2

3. Найдите точку максимума функции

$$y = 3x^2 - x^3 + 17.$$

3

4. Найдите точку минимума функции

$$y = 14 + 36x - \frac{x^3}{3}.$$

4

5. Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 + 15x^2 + 11.$$

5

6. Найдите точку минимума функции

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 23.$$

6

7. Найдите точку максимума функции

$$y = 5 + 12x - x^3.$$

7

8. Найдите точку минимума функции

$$y = x^3 - 9x^2 - 81x + 23.$$

8

9. Найдите точку максимума функции

$$y = (x+1)^2(x-10).$$

9

10. Найдите точку минимума функции

$$y = 12x^2 - x^3 + 3.$$

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 3

Вариант 1

1

1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3x^2 - 2x^3 + 1 \quad \text{на отрезке } [-4; 0].$$

2

2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 4x^2 - 4x - x^3 \quad \text{на отрезке } [1; 3].$$

3

3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^3 - 2x^2 + x + 5 \quad \text{на отрезке } [1; 4].$$

4

4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = x^3 + x^2 - 8x - 8 \quad \text{на отрезке } [-3; 0].$$

5

5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^3 - 4x^2 - 3x - 11 \quad \text{на отрезке } [0; 6].$$

6

6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = -(x+6)(x^2 - 36) \quad \text{на отрезке } [-4; 3].$$

7

7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x-3)(x+3)^2 \quad \text{на отрезке } [-2; 2].$$

8

8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2\frac{23}{27} + (x-2)^2 + (x-2)^3 \quad \text{на отрезке } [1; 2].$$

9

9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (1-x)(x-4)^2 \quad \text{на отрезке } [0; 3].$$

10

10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (x-10)(x^2 - 11x + 10) \quad \text{на отрезке } [-1; 7].$$

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Вариант 2

1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 9x^2 - x^3 + 11 \quad \text{на отрезке } [-4; 4].$$

2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{x^3}{3} - 9x - 8 \quad \text{на отрезке } [-5; -2].$$

3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 4 + 36x - \frac{x^3}{3} \quad \text{на отрезке } [-8; -5].$$

4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 11 + 27x - x^3 \quad \text{на отрезке } [-3; 3].$$

5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 7 \quad \text{на отрезке } [2; 11].$$

6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = x^3 - 18x^2 + 81x + 69 \quad \text{на отрезке } [0; 7].$$

7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^3 - 2x^2 - 4x - 8 \quad \text{на отрезке } [0; 8].$$

8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = x^5 + 15x^3 - 50x \quad \text{на отрезке } [-6; 0].$$

9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x - 10)^2(x + 5) - 7 \quad \text{на отрезке } [3; 20].$$

10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (x + 4)^2(x - 7) - 5 \quad \text{на отрезке } [-10; 2].$$

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Дробно-рациональные функции. Решения задач 3 и 4 варианта 1 диагностической работы 1

3. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{25}{x} + x + 25.$$

Решение. Найдём производную данной функции:

$$y' = -\frac{25}{x^2} + 1.$$

Определим промежутки знакопостоянства производной, приведя полученное выражение к общему знаменателю и разложив числитель на множители:

$$\frac{x^2 - 25}{x^2} = \frac{(x-5)(x+5)}{x^2}.$$

В точке $x = 5$ производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно, эта точка и является единственной точкой минимума.

Ответ: 5.

4. Найдите наибольшее значение функции $y = x + \frac{9}{x}$ на отрезке $[-4; -1]$.

Решение. Найдём производную данной функции:

$$y' = 1 - \frac{9}{x^2}.$$

Приведём полученное выражение к общему знаменателю и разложим числитель на множители:

$$\frac{x^2 - 9}{x^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2}.$$

Отрезку $[-4; -1]$ принадлежит только точка $x = -3$, в которой производная меняет знак с плюса на минус. Таким образом, точка $x = -3$ является точкой максимума и единственной точкой экстремума на данном отрезке. Значит, своего наибольшего значения на данном отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдём наибольшее значение:

$$y(-3) = -3 + \frac{9}{-3} = -6.$$

Ответ: -6.

Тренировочная работа 4

Вариант 1

1. Найдите $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$, если

$$f(x) = 3x^{-2}.$$

2. Найдите $y'(1)$, если

$$y(x) = \frac{7}{x^3}.$$

3. Найдите $f'\left(\frac{3}{4}\right)$, если

$$f(x) = 5x + 9x^{-1} + 8.$$

4. Найдите $g'(-1)$, если

$$g(x) = \frac{4x^2 + 3x + 7}{x}.$$

5. Найдите $y'(-10)$, если

$$y = 8(x+9)^{-10}.$$

6. Найдите $g'(7)$, если

$$g(x) = \frac{7}{(x-6)^5}.$$

7. Найдите $f'(-4{,}5)$, если

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2-16}.$$

8. Найдите $y'(2)$, если

$$y(x) = \frac{5}{(4x-9)^3}.$$

9. Найдите $g'(2)$, если

$$g(x) = \frac{5}{4x^2-15}.$$

10. Найдите $y'(-3)$, если

$$y = \frac{7x+2}{2x+7}.$$

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Вариант 2

1. Найдите $f'\left(\frac{1}{3}\right)$, если

$$f(x) = 2x^{-3}.$$

2. Найдите $y'(1)$, если

$$y(x) = \frac{4}{x^5}.$$

3. Найдите $f'\left(\frac{4}{3}\right)$, если

$$f(x) = 3x + 16x^{-1} + 7.$$

4. Найдите $g'(-1)$, если

$$g(x) = \frac{5x^2 + 2x + 9}{x}.$$

5. Найдите $y'(-8)$, если

$$y(x) = 6(x+7)^{-8}.$$

6. Найдите $g'(9)$, если

$$g(x) = \frac{9}{(x-8)^7}.$$

7. Найдите $f'(-5{,}5)$, если

$$f(x) = \frac{x-5}{x^2-25}.$$

8. Найдите $y'(4)$, если

$$y(x) = \frac{4}{(3x-13)^3}.$$

9. Найдите $g'(3)$, если

$$g(x) = \frac{4}{3x^2-26}.$$

10. Найдите $y'(-1)$, если

$$y(x) = \frac{5x+3}{3x+5}.$$

Тренировочная работа 5

Вариант 1

1. Найдите точку минимума функции
$$y = 16 - \frac{16}{x} - x.$$

2. Найдите точку максимума функции
$$y = -\frac{x^2 + 36}{x}.$$

3. Найдите точку минимума функции
$$y = \frac{x^2 + 64}{x}.$$

4. Найдите точку максимума функции
$$y = 7 - 0{,}5x - \frac{2}{x^2}.$$

5. Найдите точку минимума функции
$$y = \frac{4}{x^2} + x + 4.$$

6. Найдите точку максимума функции
$$y = \frac{27}{x} - 0{,}5x^2 + 6.$$

7. Найдите точку минимума функции
$$y = 0{,}5x^2 + \frac{1}{x} + 1{,}5.$$

8. Найдите точку максимума функции
$$y = \frac{16}{x} - x^2 + 9.$$

9. Найдите точку минимума функции
$$y = x^2 - \frac{54}{x} + 45.$$

10. Найдите точку максимума функции
$$y = \frac{128}{x} - x^2 + 100.$$

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Вариант 2

1

1. Найдите точку минимума функции

$$y = 36 - \frac{36}{x} - x.$$

2

2. Найдите точку максимума функции

$$y = -\frac{x^2+256}{x}.$$

3

3. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{200}{x} + 2x + 15.$$

4

4. Найдите точку максимума функции

$$y = \frac{288}{x} + 2x + 16.$$

5

5. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{x^2+1}{x}.$$

6

6. Найдите точку максимума функции

$$y = -\frac{x}{x^2+9}.$$

7

7. Найдите точку минимума функции

$$y = -\frac{x}{x^2+900}.$$

8

8. Найдите точку минимума функции

$$y = -\frac{x^2+49}{x}.$$

9

9. Найдите точку максимума функции

$$y = \frac{54}{x} - x^2 + 11.$$

10

10. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{32}{x^2} + x + 7.$$

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Тренировочная работа 6

Ответы:

Вариант 1

1. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\frac{x^2+16}{x} \quad \text{на отрезке } [2;\,8].$$

1

2. Найдите наибольшее значение функции

$$y=\frac{x^2+7x+49}{x} \quad \text{на отрезке } [-14;\,-1].$$

2

3. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\frac{x^2-6x+36}{x} \quad \text{на отрезке } [3;\,9].$$

3

4. Найдите наибольшее значение функции

$$y=\frac{x^2-8x+64}{x} \quad \text{на отрезке } [-16;\,-4].$$

4

5. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\frac{x^2+10x+100}{x} \quad \text{на отрезке } [1;\,20].$$

5

6. Найдите наибольшее значение функции

$$y=\frac{x^3+x^2+9}{x}-x^2 \quad \text{на отрезке } [-9;\,-1].$$

6

7. Найдите наименьшее значение функции

$$y=x^2+\frac{25+x^2-x^3}{x} \quad \text{на отрезке } [1;\,10].$$

7

8. Найдите наибольшее значение функции

$$y=\frac{16-x^3}{x} \quad \text{на отрезке } [-4;\,-1].$$

8

9. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\frac{x^3-54}{x} \quad \text{на отрезке } [-6;\,-1].$$

9

10. Найдите наибольшее значение функции

$$y=\frac{250+50x-x^3}{x} \quad \text{на отрезке } [-10;\,-1].$$

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вариант 2

1. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{x^2 + 784}{x} \quad \text{на отрезке } [-35; -3].$$

2. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^2 + 625}{x} \quad \text{на отрезке } [2; 34].$$

3. Найдите наибольшее значение функции

$$y = x + \frac{361}{x} + 14 \quad \text{на отрезке } [-26; -0{,}5].$$

4. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x + \frac{49}{x} + 8 \quad \text{на отрезке } [0{,}5; 19].$$

5. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{x^2 - 21x + 441}{x} \quad \text{на отрезке } [-32; -2].$$

6. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^2 + 11x + 121}{x} \quad \text{на отрезке } [1; 20].$$

7. Найдите наибольшее значение функции

$$y = x^2 + \frac{900 + x^2 - x^3}{x} \quad \text{на отрезке } [-40; -3].$$

8. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^3 - 128}{x} \quad \text{на отрезке } [-10; -2].$$

9. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{2 - x^3}{x} \quad \text{на отрезке } [-5; -0{,}5].$$

10. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{128 + 16x - x^3}{x} \quad \text{на отрезке } [-8; -2].$$

Иррациональные функции. Решения задач 5 и 6 варианта 1 диагностической работы 1

5. Найдите точку максимума функции

$$y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}.$$

Решение. Найдём производную данной функции:

$$y' = 6 - 3x^{\frac{1}{2}}, \quad y' = 3\left(2 - \sqrt{x}\right).$$

Производная обращается в нуль, если $\sqrt{x} = 2$, т. е. $x = 4$. В точке $x = 4$ производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, эта точка и является единственной точкой максимума.

Ответ: 4.

6. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$$

на отрезке $[1; 9]$.

Решение. Найдём производную данной функции:

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3, \quad y' = \frac{3}{2}\left(\sqrt{x} - 2\right).$$

Производная обращается в нуль, если $\sqrt{x} = 2$, т. е. $x = 4$. В точке $x = 4$ производная меняет знак с минуса на плюс, эта точка является единственной точкой минимума на данном отрезке, и наименьшего значения на этом отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдём наименьшее значение:

$$y(4) = 4^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 4 + 1 = -3.$$

Ответ: -3.

Ответы:

Тренировочная работа 7

Вариант 1

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

1. Найдите $f'(9)$, если
$$f(x) = 18\sqrt{x}.$$

2. Найдите $g'(8)$, если
$$g(x) = 20\sqrt{x+17}.$$

3. Найдите $f'(2)$, если
$$f(x) = \sqrt{4x-7}.$$

4. Найдите $y'(5)$, если
$$y(x) = 7\sqrt{6x+19}.$$

5. Найдите $y'(1)$, если
$$y(x) = 49x^{\frac{5}{7}}.$$

6. Найдите $g'(18)$, если
$$g(x) = x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{8}{9}} \cdot x^{\frac{17}{18}}.$$

7. Найдите $g'(1)$, если
$$g(x) = 48\sqrt[8]{x}\sqrt[12]{x}.$$

8. Найдите $f'(1)$, если
$$f(x) = 15\sqrt[5]{x} + 34\sqrt[17]{x}.$$

9. Найдите $g'(1)$, если
$$g(x) = \frac{x^{7,2} + x^{2,7}}{x^{4,5}}.$$

10. Найдите $y'(1)$, если
$$y = \frac{x^{2,6} - 9}{x^{1,3} - 3}.$$

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 7

Вариант 2

1. Найдите $f'(4)$, если
$$f(x)=16\sqrt{x}.$$

2. Найдите $g'(9)$, если
$$g(x)=30\sqrt{x+16}.$$

3. Найдите $f'(3)$, если
$$f(x)=\sqrt{3x-8}.$$

4. Найдите $y'(8)$, если
$$y(x)=16\sqrt{5x+24}.$$

5. Найдите $y'(1)$, если
$$y(x)=36x^{\frac{7}{9}}.$$

6. Найдите $g'(17)$, если
$$g(x)=x^{\frac{7}{10}}\cdot x^{\frac{8}{15}}\cdot x^{\frac{23}{30}}.$$

7. Найдите $g'(1)$, если
$$g(x)=54\sqrt[6]{x}\,\sqrt[9]{x}.$$

8. Найдите $f'(1)$, если
$$f(x)=14\sqrt[7]{x}+45\sqrt[15]{x}.$$

9. Найдите $g'(1)$, если
$$g(x)=\frac{x^{9,7}+x^{7,9}}{x^{8,8}}.$$

10. Найдите $y'(1)$, если
$$y(x)=\frac{x^{3,4}-16}{x^{1,7}-4}.$$

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Тренировочная работа 8

Вариант 1

1

1. Найдите точку минимума функции
$$y = \frac{4}{3}x\sqrt{x} - 6x + 1.$$

2

2. Найдите точку максимума функции
$$y = 2 + 3x - x\sqrt{x}.$$

3

3. Найдите точку минимума функции
$$y = x\sqrt{x} - 1{,}5x + 2.$$

4

4. Найдите точку максимума функции
$$y = 7 + 8x - \frac{4}{3}x\sqrt{x}.$$

5

5. Найдите точку минимума функции
$$y = (x-9)\sqrt{x}.$$

6

6. Найдите точку максимума функции
$$y = (6-x)\sqrt{x}.$$

7

7. Найдите точку минимума функции
$$y = (x-12)\sqrt{x}.$$

8

8. Найдите точку максимума функции
$$y = (15-x)\sqrt{x}.$$

9

9. Найдите точку минимума функции
$$y = x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 2.$$

10

10. Найдите точку максимума функции
$$y = 11 + 6\sqrt{x} - 2x\sqrt{x}.$$

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Вариант 2

1. Найдите точку минимума функции
$$y = x^{\frac{3}{2}} - 6x + 17.$$

2. Найдите точку максимума функции
$$y = -\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 9x + 8.$$

3. Найдите точку минимума функции
$$y = x\sqrt{x} - 24x + 1.$$

4. Найдите точку максимума функции
$$y = -\frac{1}{3}x\sqrt{x} + 7x + 15.$$

5. Найдите точку минимума функции
$$y = \frac{1}{3}x\sqrt{x} - 6x + 33.$$

6. Найдите точку максимума функции
$$y = 4 + 9x - x\sqrt{x}.$$

7. Найдите точку минимума функции
$$y = (x - 18)\sqrt{x}.$$

8. Найдите точку максимума функции
$$y = (21 - x)\sqrt{x}.$$

9. Найдите точку минимума функции
$$y = \sqrt{x^2 - 12x + 50}.$$

10. Найдите точку максимума функции
$$y = \sqrt{-7 - 8x - x^2}.$$

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Тренировочная работа 9

Вариант 1

1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x-12)\sqrt{x} \quad \text{на отрезке } [1;\, 9].$$

2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 7 - 6\sqrt{x} - 5x^3 \quad \text{на отрезке } [1;\, 4].$$

3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^3 + 5\sqrt{x} + 7 \quad \text{на отрезке } [4;\, 16].$$

4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (7-x)\sqrt{x+5} \quad \text{на отрезке } [-4;\, 4].$$

5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x-11)\sqrt{x+1} \quad \text{на отрезке } [0;\, 8].$$

6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (10-x)\sqrt{x+2} \quad \text{на отрезке } [-1;\, 7].$$

7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x-15)\sqrt{x+12} + 6 \quad \text{на отрезке } [-8;\, 4].$$

8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (8-x)\sqrt{x+4} + 1 \quad \text{на отрезке } [-3;\, 5].$$

9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 2(x-20)\sqrt{x+7} + 5 \quad \text{на отрезке } [-6;\, 2].$$

10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5 - (x-14)\sqrt{x+13} \quad \text{на отрезке } [-9;\, 3].$$

Ответы:

Вариант 2

1. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 17 + 15x - 2x^{\frac{3}{2}} \quad \text{на отрезке } [2; 79].$$

1

2. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^{\frac{3}{2}} - 6x + 1 \quad \text{на отрезке } [2; 405].$$

2

3. Найдите наибольшее значение функции

$$y = -\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x + 6 \quad \text{на отрезке } [0; 6{,}25].$$

3

4. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x\sqrt{x} - 3x + 9 \quad \text{на отрезке } [3; 4].$$

4

5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 3x + 12 \quad \text{на отрезке } [6; 18].$$

5

6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 12x + 8 \quad \text{на отрезке } [142; 151].$$

6

7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 + 8x + 25}.$$

7

8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{17 - 16x - x^2}.$$

8

9. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (9 - x)\sqrt{x + 3} \quad \text{на отрезке } [-2; 7].$$

9

10. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x - 4)\sqrt{x + 8} + 7 \quad \text{на отрезке } [-7; 4].$$

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тригонометрические функции. Решения задач 7 и 8 варианта 1 диагностической работы 1

7. Найдите точку минимума функции
$$y = (0{,}5 - x)\cos x + \sin x,$$
принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Сначала найдём производную данной функции, применив правило для вычисления производной произведения двух функций:
$$y' = (0{,}5 - x)'\cos x + (0{,}5 - x)(\sin x)' + (\cos x)',$$
т. е. $y' = -\cos x - (0{,}5 - x)\sin x + \cos x$, и, следовательно, $y' = -(0{,}5 - x)\sin x$, или $y' = (x - 0{,}5)\sin x$. На промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ производная обращается в нуль только при $x = 0{,}5$, поскольку $\sin x > 0$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. В точке $x = 0{,}5$ производная меняет знак с минуса на плюс, и эта точка является единственной точкой минимума на данном промежутке.

Ответ: 0,5.

8. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 4\sqrt{2}\cos x + 4x - \pi + 4$$
на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Найдём производную данной функции:
$$y' = -4\sqrt{2}\sin x + 4.$$
Производная обращается в нуль, если
$$4\sqrt{2}\sin x = 4, \quad \text{т. е. } \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
Отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежит единственный корень $x = \frac{\pi}{4}$ полученного уравнения. В точке $x = \frac{\pi}{4}$ производная меняет знак с плюса на минус, эта точка является единственной точкой максимума на данном отрезке, и наибольшего значения на этом отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдём наибольшее значение:
$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + 4\cdot\frac{\pi}{4} - \pi + 4, \quad \text{т. е. } y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8.$$

Ответ: 8.

Тренировочная работа 10

Вариант 1

1. Найдите $f'\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$, если
$$f(x) = 2\sin x + 7\cos x.$$

2. Найдите $y'\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, если
$$y(x) = 9\sqrt{2}\sin x - 7\operatorname{tg} x.$$

3. Найдите $g'\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, если
$$g(x) = 9\operatorname{tg} x - 8\cos x.$$

4. Найдите $y'\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$, если
$$y = 3\cos 7x.$$

5. Найдите $f'\left(\frac{1}{13}\right)$, если
$$f(x) = \frac{3}{\pi}\sin(13\pi x).$$

6. Найдите $y'\left(\frac{11\pi}{4}\right)$, если
$$y = 22\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{11}\right).$$

7. Найдите $g'\left(\frac{4\pi}{3}\right)$, если
$$g(x) = \frac{12}{\sin x}.$$

8. Найдите $f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, если
$$f(x) = \frac{18}{\cos x}.$$

9. Найдите $y'\left(\frac{\pi}{28}\right)$, если
$$y(x) = \sin^2 7x - \cos^2 7x.$$

10. Найдите $g'\left(\frac{\pi}{36}\right)$, если
$$g(x) = \frac{\sin 24x}{\cos 12x}.$$

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Тренировочная работа 10

Вариант 2

1. Найдите

$$f'\left(-\frac{5\pi}{2}\right), \quad \text{если } f(x) = 7\sin x - 2\cos x.$$

2. Найдите

$$y'\left(\frac{7\pi}{4}\right), \quad \text{если } y(x) = 5\operatorname{tg} x + 7\sqrt{2}\cos x.$$

3. Найдите

$$g'\left(\frac{4\pi}{3}\right), \quad \text{если } g(x) = 12\sin x - 5\operatorname{tg} x.$$

4. Найдите

$$y'\left(-\frac{5\pi}{18}\right), \quad \text{если } y(x) = 4\cos 9x.$$

5. Найдите

$$f'\left(\frac{3}{11}\right), \quad \text{если } f(x) = \frac{5}{\pi}\sin(11\pi x).$$

6. Найдите

$$y'\left(\frac{13\pi}{4}\right), \quad \text{если } y(x) = 39\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{13}\right).$$

7. Найдите

$$g'\left(\frac{2\pi}{3}\right), \quad \text{если } g(x) = -\frac{24}{\sin x}.$$

8. Найдите

$$f'\left(-\frac{\pi}{6}\right), \quad \text{если } f(x) = \frac{30}{\cos x}.$$

9. Найдите

$$y'\left(\frac{\pi}{36}\right), \quad \text{если } y(x) = \sin^2 9x - \cos^2 9x.$$

10. Найдите

$$g'\left(-\frac{\pi}{42}\right), \quad \text{если } g(x) = \frac{\sin 28x}{\cos 14x}.$$

Ответы:

Тренировочная работа 11

Вариант 1

1. Найдите точку максимума функции

$$y = x\sin x + \cos x - 3\sin x + 1,$$

принадлежащую промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

2. Найдите точку минимума функции

$$y = (x - 1{,}5)\sin x + \cos x,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Найдите точку максимума функции

$$y = (6 - 5x)\sin x - 5\cos x + 6,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Найдите точку минимума функции

$$y = 2\cos x - (1 - 2x)\sin x + 1,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

5. Найдите точку максимума функции

$$y = 2\cos x - (5 - 2x)\sin x + 4,$$

принадлежащую промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

6. Найдите точку минимума функции

$$y = x\sin x + \cos x - \frac{3}{4}\sin x,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

7. Найдите точку максимума функции

$$y = \sin x - 4\cos x - 4x\sin x + 5,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

1

2

3

4

5

6

7

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

8

8. Найдите точку минимума функции

$$y = 3(x-1{,}25)\sin x + 3\cos x + 2,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

9

9. Найдите точку максимума функции

$$y = (2-5x)\sin x - 5\cos x + 3,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

10

10. Найдите точку минимума функции

$$y = 4\sin x + 2(5-2x)\cos x - 7,$$

принадлежащую промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вариант 2

Ответы:

1. Найдите точку максимума функции

$$y = x\sin x + \cos x - 4\sin x + 5,$$

принадлежащую промежутку $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

1

2. Найдите точку минимума функции

$$y = (x+1)\sin x + \cos x,$$

принадлежащую промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

2

3. Найдите точку максимума функции

$$y = (5-4x)\sin x - 4\cos x + 12,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

3

4. Найдите точку минимума функции

$$y = 4\cos x - (3-4x)\sin x + 7,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

4

5. Найдите точку максимума функции

$$y = \cos x - (3-x)\sin x + 9,$$

принадлежащую промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

5

6. Найдите точку минимума функции

$$y = x\sin x + \cos x - \frac{5}{8}\sin x,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

6

7. Найдите точку максимума функции

$$y = (5x-6)\cos x - 5\sin x + 4$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

7

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

8

9

10

8. Найдите точку минимума функции

$$y = (1-2x)\cos x + 2\sin x + 6$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

9. Найдите точку максимума функции

$$y = 5x\cos x - 5\sin x - 3\cos x + 11$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

10. Найдите точку минимума функции

$$y = 5\sin x - 5x\cos x + 2\cos x + 14$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 12

Вариант 1

1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 9 + \sqrt{3}\pi - 3\sqrt{3}x - 6\cos x \quad \text{на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 6\sin x - \frac{36}{\pi}x + 7 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right].$$

3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 5\cos x - \frac{24}{\pi}x + 9 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right].$$

4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 9\,\mathrm{tg}\,x - 8x + 7 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right].$$

5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 4x - 5\,\mathrm{tg}\,x - 5\pi + 4 \quad \text{на отрезке } \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right].$$

6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5\,\mathrm{tg}\,x - 4x + \pi + 9 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$$

7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - 2\cos x - \sqrt{3}x - 5 \quad \text{на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2\sin x - \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + 7 \quad \text{на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 7\sin x + 8\cos x - 17x - 18 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right].$$

10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 4\sin x - 5\cos x + 11x - 13 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right].$$

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 12

Вариант 2

1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3 + \frac{5\pi}{4} - 5x - 5\sqrt{2}\cos x \quad \text{на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 15x - 3\sin x + 5 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right].$$

3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 5\sin x + \frac{24}{\pi}x + 6 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right].$$

4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 10\sin x - \frac{36}{\pi}x + 7 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right].$$

5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 5\,\mathrm{tg}\,x - 5x + 6 \quad \text{на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 16\,\mathrm{tg}\,x - 16x + 4\pi - 5 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$$

7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 4x - 4\,\mathrm{tg}\,x + 12 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right].$$

8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 14x - 7\,\mathrm{tg}\,x - 3{,}5\pi + 11 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right].$$

9. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 7\cos x + 16x - 2 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right].$$

10. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 13x - 9\sin x + 9 \quad \text{на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Показательная функция. Решения задач 9 и 10 варианта 1 диагностической работы 1

9. Найдите точку максимума функции

$$y = (x^2 - 17x - 17)e^{7-x}.$$

Решение. Сначала найдём производную данной функции, применив правило для вычисления производной произведения двух функций:

$$y' = (x^2 - 17x - 17)' e^{7-x} + (x^2 - 17x - 17)\left(e^{7-x}\right)',$$

т. е.

$$y' = (2x - 17)e^{7-x} + (x^2 - 17x - 17)\left(-e^{7-x}\right),$$

и, следовательно,

$$y' = -(x^2 - 19x)e^{7-x}, \quad \text{или} \quad y' = -x(x-19)e^{7-x}.$$

Производная обращается в нуль при $x = 0$ и $x = 19$, причём меняет знак с плюса на минус в точке $x = 19$. Эта точка и является единственной точкой максимума.

Ответ: 19.

10. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x - 13)e^{x-12}$$

на отрезке $[11; 13]$.

Решение. Сначала найдём производную данной функции, применив правило для вычисления производной произведения двух функций:

$$y' = (x - 13)' e^{x-12} + (x - 13)(e^{x-12})',$$

т. е.

$$y' = e^{x-12} + (x - 13)e^{x-12},$$

и, следовательно, $y' = (x - 12)e^{x-12}$. В точке $x = 12$ производная меняет знак с минуса на плюс, эта точка является единственной точкой минимума на данном отрезке, и наименьшего значения на этом отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдём наименьшее значение:

$$y(12) = (12 - 13)e^{12-12} = -1.$$

Ответ: -1.

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 13

Вариант 1

1. Найдите $f'(2)$, если

$$f(x) = \frac{7^x}{\ln 7}.$$

2. Найдите $y'(-2)$, если

$$y = \frac{2^x \cdot 5^x}{\ln 10}.$$

3. Найдите $f'(-6)$, если

$$f(x) = \frac{6^{x+8}}{\ln 6}.$$

4. Найдите $y'(-2)$, если

$$y = \frac{9^{-x}}{\ln 9}.$$

5. Найдите $f'(14)$, если

$$f(x) = \frac{7 \cdot 6^{\frac{x}{7}}}{\ln 6}.$$

6. Найдите $y'(-2{,}5)$, если

$$y = e^{2x+5}.$$

7. Найдите $f'(-18)$, если

$$f(x) = (x+8)e^{x+18}.$$

8. Найдите $f'(4)$, если

$$f(x) = \frac{x+3}{e^{x-4}}.$$

9. Найдите $y'(2)$, если

$$y = \frac{7^{3x-5}}{\ln 7}.$$

10. Найдите $y'(5)$, если

$$y = \frac{15\sqrt[5]{15^x}}{\ln 15}.$$

Ответы:

Вариант 2

1. Найдите $f'(3)$, если

$$f(x) = \frac{3^x}{\ln 3}.$$

1

2. Найдите $y'(-1)$, если

$$y(x) = \frac{4^x \cdot 25^x}{\ln 100}.$$

2

3. Найдите $f'(-7)$, если

$$f(x) = \frac{7^{x+9}}{\ln 7}.$$

3

4. Найдите $y'(-3)$, если

$$y(x) = \frac{4^{-x}}{\ln 4}.$$

4

5. Найдите $f'(18)$, если

$$f(x) = \frac{9 \cdot 8^{\frac{x}{9}}}{\ln 8}.$$

5

6. Найдите $y'(-0{,}4)$, если

$$y(x) = e^{5x+2}.$$

6

7. Найдите $f'(-16)$, если

$$f(x) = (x+6)e^{x+16}.$$

7

8. Найдите $f'(6)$, если

$$f(x) = \frac{x+5}{e^{x-6}}.$$

8

9. Найдите $y'(3)$, если

$$y(x) = \frac{5^{4x-9}}{\ln 5}.$$

9

10. Найдите $y'(7)$, если

$$y(x) = \frac{21\sqrt[7]{21^x}}{\ln 21}.$$

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Тренировочная работа 14

Вариант 1

1. Найдите точку минимума функции
$$y = (x^2 - 5x + 5)e^{x-5}.$$

2. Найдите точку максимума функции
$$y = (x^2 - 8x + 8)e^{x-8}.$$

3. Найдите точку минимума функции
$$y = (x^2 - 15x + 15)e^{x-15}.$$

4. Найдите точку максимума функции
$$y = (x + 3)^2 e^{3-x}.$$

5. Найдите точку минимума функции
$$y = -(x - 4)^2 e^{x-4}.$$

6. Найдите точку максимума функции
$$y = (x - 6)^2 e^{x-6}.$$

7. Найдите точку минимума функции
$$y = (4 - x)e^{5-x}.$$

8. Найдите точку максимума функции
$$y = (x - 6)e^{7-x}.$$

9. Найдите точку минимума функции
$$y = (x^2 - 3)e^{x-3}.$$

10. Найдите точку максимума функции
$$y = (x^2 + 2x + 1)e^{x+4}.$$

Ответы:

Вариант 2

1. Найдите точку максимума функции

$$y = (48 - x)e^{x+48}.$$

1

2. Найдите точку минимума функции

$$y = (63 - x)e^{63-x}.$$

2

3. Найдите точку максимума функции

$$y = (x^2 - 8x + 8)e^{x+5}.$$

3

4. Найдите точку минимума функции

$$y = (2x^2 - 38x + 38)e^{25-x}.$$

4

5. Найдите точку максимума функции

$$y = (x - 7)^2 e^{x-37}.$$

5

6. Найдите точку минимума функции

$$y = (x + 10)^2 e^{x-11}.$$

6

7. Найдите точку максимума функции

$$y = (x - 19)^2 e^{1-x}.$$

7

8. Найдите точку минимума функции

$$y = (x + 11)^2 e^{17-x}.$$

8

9. Найдите точку максимума функции

$$y = 3^{15+6x-x^2}.$$

9

10. Найдите точку минимума функции

$$y = 9^{x^2+28x+219}.$$

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 15

Вариант 1

1. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 8 + (x-7)e^{x-6} \quad \text{на отрезке } [3; 9].$$

2. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (x-11)e^{12-x} + 13 \quad \text{на отрезке } [5; 15].$$

3. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 5 - (x-3)e^{4-x} \quad \text{на отрезке } [0; 7].$$

4. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (x-4)^2e^{x-2} \quad \text{на отрезке } [1; 3].$$

5. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 2 - (x-3)^2e^{5-x} \quad \text{на отрезке } [4; 6].$$

6. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 6 + (x-7)^2e^{x-5} \quad \text{на отрезке } [4; 6].$$

7. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 4 - (x-4)^2e^{x-2} \quad \text{на отрезке } [1; 3].$$

8. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (x-6)^2e^{8-x} \quad \text{на отрезке } [7; 9].$$

9. Найдите наименьшее значение функции
$$y = (x^2-5x+5)e^{x-3} \quad \text{на отрезке } [1; 5].$$

10. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (3-x^2)e^{x-1} \quad \text{на отрезке } [0; 2].$$

Ответы:

Вариант 2

1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (28 - x)e^{29-x} \quad \text{на отрезке } [24; 38].$$

2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (x - 9)^2 e^{x-7} \quad \text{на отрезке } [2; 8].$$

3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x + 41)^2 e^{-41-x} \quad \text{на отрезке } [-44; -40].$$

4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (x + 9)^2 e^{-7-x} \quad \text{на отрезке } [-8{,}5; -6].$$

5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x^2 - 23x + 23)e^{x-21} \quad \text{на отрезке } [0{,}5; 26].$$

6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (2x^2 - 38x + 38)e^{x} \quad \text{на отрезке } [-4; 4].$$

7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x^2 + 19x - 19)e^{-19-x} \quad \text{на отрезке } [-23; -15].$$

8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (x^2 + 7x - 7)e^{2-x} \quad \text{на отрезке } [1; 5].$$

9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 5^{x^2+12x+35}.$$

10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 4^{-23-10x-x^2}.$$

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Логарифмическая функция. Решения задач 11 и 12 варианта 1 диагностической работы 1

11. Найдите точку минимума функции

$$y = x - 5\ln x.$$

Решение. Функция определена на $(0; +\infty)$. Найдём производную данной функции:

$$y' = 1 - \frac{5}{x}, \quad \text{т. е. } y' = \frac{x-5}{x}.$$

Производная меняет знак в единственной точке $x = 5$, причём знак производной в этой точке меняется с минуса на плюс. Следовательно, эта точка и является единственной точкой минимума данной функции.

Ответ: 5.

12. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5 - 7x + 7\ln(x+3)$$

на отрезке $[-2{,}5; 0]$.

Решение. Найдём производную данной функции:

$$y' = -7 + \frac{7}{x+3},$$

т. е.

$$y' = -7\frac{x+2}{x+3}.$$

Производная меняет знак в единственной точке $x = -2$, причём знак производной в этой точке меняется с плюса на минус. Эта точка является единственной точкой максимума на данном отрезке, и наибольшего значения на этом отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдём наибольшее значение:

$$y(-2) = 5 - 7\cdot(-2) + 7\ln(-2+3) = 19.$$

Ответ: 19.

Тренировочная работа 16

Вариант 1

1. Найдите $f'(7)$, если
$$f(x) = 28\ln x.$$

2. Найдите $y'(-7)$, если
$$y = 15\ln(x+10).$$

3. Найдите $f'(5)$, если
$$f(x) = \ln(6x-5).$$

4. Найдите $y'(5)$, если
$$y = \ln\frac{x-4}{x+5}.$$

5. Найдите $f'(-4)$, если
$$f(x) = 5x + 4\ln(x+6).$$

6. Найдите $y'(5)$, если
$$y = 3x\ln(x-4).$$

7. Найдите $f'(-2)$, если
$$f(x) = 4x^2\ln(x+3).$$

8. Найдите $f'(2)$, если
$$f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x+2}.$$

9. Найдите $y'(3)$, если
$$y = 6x + \log_5(x+5) - \frac{x^2}{48\ln 5}.$$

10. Найдите $y'(6)$, если
$$y = 5x^2 + \frac{x}{\ln 7} - 6\log_7 x.$$

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вариант 2

1. Найдите $f'(6)$, если
$$f(x) = 24\ln x.$$

2. Найдите $y'(-8)$, если
$$y(x) = 16\ln(x+12).$$

3. Найдите $f'(2)$, если
$$f(x) = \ln(5x-6).$$

4. Найдите $y'(-13)$, если
$$y(x) = \ln\frac{x-7}{x+8}.$$

5. Найдите $f'(-6)$, если
$$f(x) = 7x + 6\ln(x+8).$$

6. Найдите $y'(7)$, если
$$y(x) = 5x\ln(x-6).$$

7. Найдите $f'(-4)$, если
$$f(x) = 6x^2\ln(x+5).$$

8. Найдите $f'(5)$, если
$$f(x) = \frac{\ln(x-4)}{x+5}.$$

9. Найдите $y'(4)$, если
$$y(x) = 7x + \log_6(x+6) - \frac{x^2}{80\ln 6}.$$

10. Найдите $y'(4)$, если
$$y(x) = 3x^2 + \frac{x}{\ln 5} - 4\log_5 x.$$

Тренировочная работа 17

Ответы:

Вариант 1

1. Найдите точку максимума функции
$$y = 2\ln x - 5x + 7.$$

2. Найдите точку максимума функции
$$y = \ln(x-8) - x + 5.$$

3. Найдите точку минимума функции
$$y = x - \ln(x-7) + 7.$$

4. Найдите точку максимума функции
$$y = 4\ln(x-3) - 2x + 3.$$

5. Найдите точку минимума функции
$$y = 2x - 5\ln(x-7).$$

6. Найдите точку максимума функции
$$y = 18\ln x - x^2.$$

7. Найдите точку минимума функции
$$y = 2x - 7\ln(x-8) + 5.$$

8. Найдите точку максимума функции
$$y = \ln(x+5) - 5x + 5.$$

9. Найдите точку минимума функции
$$y = (x-3)^2 - 8\ln x.$$

10. Найдите точку максимума функции
$$y = 6\ln x - (x-2)^2.$$

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Вариант 2

1

1. Найдите точку минимума функции

$$y = 4x - \ln(x+9) + 6.$$

2

2. Найдите точку максимума функции

$$y = \ln(x-8) - 2x + 9.$$

3

3. Найдите точку минимума функции

$$y = 5x - 5\ln(x+7) + 7.$$

4

4. Найдите точку максимума функции

$$y = 4\ln(x+6) - 4x + 5.$$

5

5. Найдите точку минимума функции

$$y = x^2 - 28x + 96\ln x - 1.$$

6

6. Найдите точку максимума функции

$$y = x^2 - 22x + 48\ln x - 9.$$

7

7. Найдите точку минимума функции

$$y = 4x - \ln(x+9)^4 + 6.$$

8

8. Найдите точку максимума функции

$$y = \ln(x+8)^{11} - 11x + 2.$$

9

9. Найдите точку минимума функции

$$y = \log_7(x^2 - 10x + 39) + 5.$$

10

10. Найдите точку максимума функции

$$y = \log_4(7 - 2x - x^2) + 6.$$

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Тренировочная работа 18

Вариант 1

1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 5x - \ln(x+5)^5 \quad \text{на отрезке } [-4{,}5;\, 1].$$

2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 3\ln(x+2) - 3x + 10 \quad \text{на отрезке } [-1{,}5;\, 0].$$

3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = -x^2 + 20x - 18\ln x \quad \text{на отрезке } [0{,}1;\, 8{,}1].$$

4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 7 - 7x + \ln(7x) \quad \text{на отрезке } \left[\frac{1}{13};\, \frac{1}{3}\right].$$

5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^2 - 2\ln x + 1 \quad \text{на отрезке } [0{,}3;\, 3{,}3].$$

6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \ln(13x) - 13x + 13 \quad \text{на отрезке } \left[\frac{1}{15};\, \frac{1}{11}\right].$$

7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3x^2 - 11x + 5\ln x + 7 \quad \text{на отрезке } \left[\frac{11}{12};\, \frac{13}{12}\right].$$

8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 7 - \ln x + 5x - 2x^2 \quad \text{на отрезке } \left[\frac{1}{2};\, \frac{7}{6}\right].$$

9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3x^2 - 10x + 4\ln x \quad \text{на отрезке } [0{,}8;\, 1{,}2].$$

10. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3 - x^2 + 7x - 5\ln x \quad \text{на отрезке } \left[\frac{1}{8};\, \frac{9}{8}\right].$$

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Вариант 2

1. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 11x - \ln(x+5)^{11} \quad \text{на отрезке } [-4{,}5; 0].$$

2. Найдите наибольшее значение функции
$$y = \ln(x+13)^{12} - 12x \quad \text{на отрезке } [-12{,}5; 0].$$

3. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 5x - 5\ln(x+7) + 11 \quad \text{на отрезке } [-6{,}5; 0].$$

4. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 12\ln(x+4) - 12x + 9 \quad \text{на отрезке } [-3{,}5; 0].$$

5. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 3x - \ln(3x) + 13 \quad \text{на отрезке } \left[\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right].$$

6. Найдите наибольшее значение функции
$$y = \ln(18x) - 18x + 11 \quad \text{на отрезке } \left[\frac{1}{36}; \frac{5}{36}\right].$$

7. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 3x^2 - 9x + 3\ln x - 3 \quad \text{на отрезке } [0{,}9; 1{,}1].$$

8. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 2x^2 - 11x + 7\ln x - 13 \quad \text{на отрезке } \left[\frac{11}{12}; \frac{13}{12}\right].$$

9. Найдите наименьшее значение функции
$$y = \log_7(x^2 - 10x + 74) - 4.$$

10. Найдите наибольшее значение функции
$$y = \log_2(48 + 8x - x^2) + 4.$$

Диагностическая работа 2

Вариант 1

1. Найдите точку минимума функции
$$y = 7 + 12x - x^3.$$

2. Найдите наибольшее значение функции
$$y = x^3 - 3x + 4 \quad \text{на отрезке } [-2; 0].$$

3. Найдите точку максимума функции
$$y = \frac{16}{x} + x + 3.$$

4. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x + \frac{36}{x} \quad \text{на отрезке } [1; 9].$$

5. Найдите точку минимума функции
$$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + 1.$$

6. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 3x - 2x^{\frac{3}{2}} \quad \text{на отрезке } [0; 4].$$

7. Найдите точку максимума функции
$$y = (2x - 3)\cos x - 2\sin x + 5,$$
принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

8. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 6\sin x - 9x + 5 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right].$$

9. Найдите точку минимума функции
$$y = (x - 7)e^{x+7}.$$

10. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (x - 9)e^{10-x} \quad \text{на отрезке } [-11; 11].$$

11. Найдите точку максимума функции
$$y = \ln x - 2x.$$

12. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 4x - 4\ln x + 5 \quad \text{на отрезке } [0{,}5; 5{,}5].$$

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Диагностическая работа 2

Вариант 2

1. Найдите точку минимума функции
$$y = 11 + 27x - x^3.$$

2. Найдите наибольшее значение функции
$$y = x^3 - 48x + 11 \quad \text{на отрезке } [-5; 0].$$

3. Найдите точку максимума функции
$$y = \frac{722}{x} + 2x + 12.$$

4. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 2x + \frac{128}{x} + 16 \quad \text{на отрезке } [0{,}5; 19].$$

5. Найдите точку минимума функции
$$y = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1.$$

6. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 9x - 2x^{\frac{3}{2}} \quad \text{на отрезке } [4; 30].$$

7. Найдите точку максимума функции
$$y = (4x - 2)\cos x - 4\sin x + 3,$$
принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

8. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 18\sin x - 21x + 23 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right].$$

9. Найдите точку минимума функции
$$y = (x + 51)e^{x-51}.$$

10. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (x - 27)e^{28-x} \quad \text{на отрезке } [23; 40].$$

11. Найдите точку максимума функции
$$y = \ln(x - 9) - 2x + 13.$$

12. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 2x - \ln(2x) + 8 \quad \text{на отрезке } [0{,}25; 1{,}25].$$

Диагностическая работа 3

Ответы:

Вариант 1

1. Найдите точку максимума функции
$$y = 5 + 4x - \frac{x^3}{3}.$$

2. Найдите наибольшее значение функции
$$y = x^3 - 6x^2 \quad \text{на отрезке } [-3; 3].$$

3. Найдите точку минимума функции
$$y = \frac{49}{x} + x + 49.$$

4. Найдите наибольшее значение функции
$$y = x + \frac{4}{x} + 4 \quad \text{на отрезке } [-4; -1].$$

5. Найдите точку максимума функции
$$y = 5 + 18x - 4x^{\frac{3}{2}}.$$

6. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 6x - x\sqrt{x} + 1 \quad \text{на отрезке } [9; 25].$$

7. Найдите точку минимума функции
$$y = 5\sin x - 5(x-1)\cos x + 4,$$
принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

8. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 12\cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6 \quad \text{на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

9. Найдите точку максимума функции
$$y = (x^2 - 17x + 17)e^{7-x}.$$

10. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 4 + (x-5)e^{6-x} \quad \text{на отрезке } [1; 8].$$

11. Найдите точку минимума функции
$$y = x - 7\ln x + 6.$$

12. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 5\ln x - 5x + 7 \quad \text{на отрезке } [0{,}7; 1{,}7].$$

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вариант 2

1. Найдите точку максимума функции
$$y = 14 + 9x - \frac{x^3}{3}.$$

2. Найдите наибольшее значение функции
$$y = x^3 - 18x^2 + 19 \quad \text{на отрезке } [-3; 3].$$

3. Найдите точку минимума функции
$$y = \frac{196}{x} + x + 7.$$

4. Найдите наибольшее значение функции
$$y = x + \frac{484}{x} + 17 \quad \text{на отрезке } [-28; -0{,}5].$$

5. Найдите точку максимума функции
$$y = 15 + 33x - 2x^{\frac{3}{2}}.$$

6. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 12 + 18x - 2x\sqrt{x} \quad \text{на отрезке } [35; 37].$$

7. Найдите точку минимума функции
$$y = 4\sin x - 4(x - 1{,}5)\cos x + 8,$$
принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

8. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 3\sqrt{2}\cos x + 3x - \frac{3\pi}{4} + 12 \quad \text{на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

9. Найдите точку максимума функции
$$y = (2x^2 - 18x + 18)e^{17-x}.$$

10. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (x - 19)e^{20-x} \quad \text{на отрезке } [13; 24].$$

11. Найдите точку минимума функции
$$y = 2x - \ln(x + 11) + 3.$$

12. Найдите наибольшее значение функции
$$y = \ln(11x) - 11x + 3 \quad \text{на отрезке } \left[\frac{1}{22}; \frac{5}{22}\right].$$

Диагностическая работа 4

Ответы:

Вариант 1

1. Найдите точку минимума функции
$$y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7.$$

1

2. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 9x^2 - x^3 \quad \text{на отрезке } [1;\, 10].$$

2

3. Найдите точку максимума функции
$$y = \frac{9}{x} + x + 9.$$

3

4. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x + \frac{64}{x} + 8 \quad \text{на отрезке } [4;\, 16].$$

4

5. Найдите точку максимума функции
$$y = 2 + 5x - \frac{2}{3}x\sqrt{x}.$$

5

6. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x\sqrt{x} - 12x + 11 \quad \text{на отрезке } [36;\, 81].$$

6

7. Найдите точку минимума функции
$$y = 2\cos x + \sin x - x\cos x,$$
принадлежащую промежутку $\left(\frac{\pi}{2};\, \pi\right)$.

7

8. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 11x - 5\cos x + 2 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{\pi}{2};\, 0\right].$$

8

9. Найдите точку максимума функции
$$y = (x+8)e^{8-x}.$$

9

10. Найдите наименьшее значение функции
$$y = (x+4)e^{x+5} \quad \text{на отрезке } [-9;\, 9].$$

10

11. Найдите точку минимума функции
$$y = 2x - 5\ln x + 3.$$

11

12. Найдите наибольшее значение функции
$$y = \ln(x+3)^3 - 3x \quad \text{на отрезке } [-2{,}5;\, 2{,}5].$$

12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вариант 2

1. Найдите точку минимума функции
$$y = \frac{x^3}{3} - 16x + 14.$$

2. Найдите наибольшее значение функции
$$y = -3x^2 - x^3 + 20 \quad \text{на отрезке } [-1; 7].$$

3. Найдите точку максимума функции
$$y = \frac{72}{x} + 2x + 19.$$

4. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x + \frac{900}{x} + 9 \quad \text{на отрезке } [0{,}5; 35].$$

5. Найдите точку максимума функции
$$y = -\frac{4}{3}x\sqrt{x} + 5x + 14.$$

6. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x\sqrt{x} - 15x + 17 \quad \text{на отрезке } [81; 121].$$

7. Найдите точку минимума функции
$$y = \cos x + 2\sin x - 2x\cos x + 4,$$
принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

8. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 12\cos x - \frac{42}{\pi}x + 10 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right].$$

9. Найдите точку максимума функции
$$y = (x + 76)e^{76-x}.$$

10. Найдите наименьшее значение функции
$$y = (x - 41)e^{x-40} \quad \text{на отрезке } [39; 41].$$

11. Найдите точку минимума функции
$$y = 8x - 8\ln(x + 6) + 7.$$

12. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 12x - \ln(x + 4)^{12} \quad \text{на отрезке } [-3{,}5; 0].$$

Диагностическая работа 5

Ответы:

Вариант 1

1. Найдите точку максимума функции
$$y = x^3 - 5x^2 + 7x - 5.$$

2. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x^3 - 3x^2 + 2 \quad \text{на отрезке } [1; 4].$$

3. Найдите точку максимума функции
$$y = \frac{x^2 + 225}{x}.$$

4. Найдите наибольшее значение функции
$$y = \frac{x^2 + 25}{x} \quad \text{на отрезке } [-10; -1].$$

5. Найдите точку минимума функции
$$y = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3x + 5.$$

6. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (27 - x)\sqrt{x} \quad \text{на отрезке } [1; 16].$$

7. Найдите точку максимума функции
$$y = 3 - 4\sin x - (5 - 4x)\cos x,$$
принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

8. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 2\sin x + 7x - 11 \quad \text{на отрезке } [0; 3\pi].$$

9. Найдите точку минимума функции
$$y = (x + 5)e^{x-5}.$$

10. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (8 - x)e^{x-7} \quad \text{на отрезке } [3; 10].$$

11. Найдите точку максимума функции
$$y = \ln(x + 2) - x + 3.$$

12. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 2x - 2\ln(x + 3) + 3 \quad \text{на отрезке } [-2{,}5; 1].$$

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Диагностическая работа 5

Вариант 2

1. Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 + 13x^2 + 16x + 25.$$

2. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^3 - 15x^2 + 15 \quad \text{на отрезке } [5; 15].$$

3. Найдите точку максимума функции

$$y = \frac{x^2 + 529}{x}.$$

4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{x^2 + 841}{x} \quad \text{на отрезке } [-41; -3].$$

5. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - 8x + 12.$$

6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (12 - x)\sqrt{x} \quad \text{на отрезке } [2; 12].$$

7. Найдите точку максимума функции

$$y = (6x - 9)\cos x - 6\sin x + 5,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

8. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 5\sin x + 9x - 13 \quad \text{на отрезке } [0; 3\pi].$$

9. Найдите точку минимума функции

$$y = (x + 65)e^{x-65}.$$

10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (3 - x)e^{x-2} \quad \text{на отрезке } [0{,}5; 12].$$

11. Найдите точку максимума функции

$$y = 6\ln(x + 9) - 6x + 4.$$

12. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 10x - 10\ln(x + 4) + 23 \quad \text{на отрезке } [-3{,}5; 0].$$

Диагностическая работа 6

Вариант 1

1. Найдите точку минимума функции
$$y=(x-5)^2(x+3)-2.$$

2. Найдите наибольшее значение функции
$$y=3x^5-5x^3+18 \quad \text{на отрезке } [-2;0].$$

3. Найдите точку максимума функции
$$y=-\frac{x}{x^2+16}.$$

4. Найдите наименьшее значение функции
$$y=2x+\frac{800}{x}+11 \quad \text{на отрезке } [0{,}5;30].$$

5. Найдите точку минимума функции
$$y=x\sqrt{x}-30x+26.$$

6. Найдите наибольшее значение функции
$$y=-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+6x+7 \quad \text{на отрезке } [5;10].$$

7. Найдите точку максимума функции
$$y=(4x-6)\cos x-4\sin x+1,$$
принадлежащую промежутку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

8. Найдите наименьшее значение функции
$$y=-4x+2\operatorname{tg}x+\pi+1 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right].$$

9. Найдите точку минимума функции
$$y=(x^2-48x+48)e^{x-48}.$$

10. Найдите наименьшее значение функции
$$y=e^{2x}-4e^x+6 \quad \text{на отрезке } [0;3].$$

11. Найдите точку максимума функции
$$y=\ln x-10x.$$

12. Найдите наименьшее значение функции
$$y=4x^2-12x+4\ln x-10 \quad \text{на отрезке } \left[\frac{12}{13};\frac{14}{13}\right].$$

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Диагностическая работа 6

Вариант 2

1. Найдите точку минимума функции
$$y = (x-8)^2(x-5)+5.$$

2. Найдите наибольшее значение функции
$$3x^5 - 20x^3 - 3 \quad \text{на отрезке } [-6;0].$$

3. Найдите точку максимума функции
$$y = -\frac{x}{x^2+81}.$$

4. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 2x + \frac{72}{x} + 13 \quad \text{на отрезке } [0{,}5;\, 12].$$

5. Найдите точку минимума функции
$$y = x\sqrt{x} - 21x + 15.$$

6. Найдите наибольшее значение функции
$$y = -\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x \quad \text{на отрезке } [35;39].$$

7. Найдите точку максимума функции
$$y = (2x-1)\cos x - 2\sin x + 11,$$
принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

8. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 12\,\mathrm{tg}\, x - 12x - 3\pi - 2 \quad \text{на отрезке } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$$

9. Найдите точку минимума функции
$$y = (2x^2 - 26x + 26)e^{x-17}.$$

10. Найдите наименьшее значение функции
$$e^{2x} - 8e^x - 3 \quad \text{на отрезке } [-1;2].$$

11. Найдите точку максимума функции
$$y = \ln(x-12) - 10x + 11.$$

12. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 2x^2 - 5x + \ln x - 5 \quad \text{на отрезке } \left[\frac{5}{6}; \frac{7}{6}\right].$$

§ 2. Первообразная

Основные понятия, факты, формулы

Понятие первообразной и правила вычисления первообразных

Этот параграф посвящен повторению темы «Первообразная». Напомним, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на некотором промежутке, то существует такая функция $F(x)$, что для всех значений переменной из этого промежутка $F'(x) = f(x)$. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $y = f(x)$ на данном промежутке. Иногда предлог «для» опускают и пишут или говорят, что $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$.

В курсе школьной математики рассматриваются только функции, которые непрерывны в любой точке своей области определения. Значит, для каждой из них существует первообразная, но нужно понимать, что если область определения функции состоит, например, из двух промежутков (на каждом из которых функция непрерывна), то первообразные на этих промежутках могут иметь различный вид.

Из свойств производной следует, что если $F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$ и C — произвольное действительное число, то $F(x) + C$ также будет первообразной для функции $y = f(x)$, поскольку

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x).$$

Более того, в курсе математического анализа доказывается, что если $F(x)$ и $G(x)$ — две различные первообразные для функции $y = f(x)$, то

$$G(x) = F(x) + C,$$

где C — некоторое действительное число, т. е. что любая первообразная для функции $y = f(x)$ имеет вид $F(x) + C$. Это, в частности, означает, что график любой первообразной для данной функции может быть получен из графика любой другой ее первообразной параллельным переносом вдоль оси ординат. Для того чтобы найти конкретную первообразную, обычно задают дополнительное условие, например значение первообразной в некоторой точке или точку, через которую проходит график первообразной (что по сути то же самое, отличие только в формулировке).

Можно выделить два основных типа задач на первообразную. К первому относятся задачи, связанные с непосредственным вычислением первообразных. Ко второму — задачи, связанные с исследованием первообразной с помощью данной функции: ведь она является производной для любой своей первообразной, и значит, позволяет находить промежутки монотонности и точки экстремума первообразной, ее наименьшее и наибольшее значение на отрезке. Вычисление самой первообразной при этом иногда даже не предполагается (и не требуется условием задачи), а порой бывает попросту невозможно: не для каждой непрерывной на промежутке функции возможно в явном виде написать первообразную.

Приведем таблицу первообразных для некоторых функций (C — произвольное действительное число).

Обратим внимание на то, что первообразные для функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$ имеют различный вид в зависимости от промежутка, на котором рассматривается функция. Так, на промежутке $(0;+\infty)$ первообразная для функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$ имеет вид $F(x)=\ln x+C$, а на промежутке $(-\infty;0)$ задается формулой

$$F(x)=\ln(-x)+C$$

(C — произвольное действительное число). В тех случаях, когда функция $y=f(x)$ определена не на всей числовой прямой, а на каком-то ее промежутке, этот промежуток часто не указывается, а как бы считается «заданным по умолчанию»: так, областью определения функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ является промежуток $(0;+\infty)$, на котором она непрерывна, поэтому ее первообразная $F(x)=2\sqrt{x}+C$ (C — произвольное действительное число) рассматривается именно на этом промежутке.

При вычислении первообразных иррациональных функций следует помнить о том, что корень нечетной степени $\sqrt[2n+1]{x}$ и степень с дробным показателем $x^{\frac{1}{2n+1}}$ имеют разные области определения (а значит, и непрерывности): первый определен при любых действительных значениях переменной, вторая — только при неотрицательных. Для вычисления первообразных запись в виде степени, конечно же, более удобна, но результат этого вычисления должен быть приведен в виде корня (как и промежуточные выкладки, если речь идет о задаче с полным решением; впрочем, эти выкладки можно оставить в черновике). Именно поэтому в таблице наряду с табличными указаны первообразные для наиболее часто встречающихся иррациональных функций.

Напомним теперь основные правила вычисления первообразных. Пусть функции $F(x)$ и $G(x)$ являются на некотором промежутке первообразными для функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, и пусть k, b и C — произвольные действительные числа. Тогда на рассматриваемом промежутке:

1) $F(x)+G(x)$ и $F(x)-G(x)$ являются соответственно первообразными для функций $f(x)+g(x)$ и $f(x)-g(x)$ (краткая формулировка: первообразная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) первообразных этих функций);

2) $kF(x)$ является первообразной для функции $kf(x)$ (краткая формулировка: первообразная произведения функции на число равна произведению первообразной этой функций на то же число);

3) $\dfrac{1}{k}F(kx+b)$ является первообразной для функции $f(kx+b)$ (здесь, разумеется, $k\neq 0$).

Так, для функции $f(x)=3x^2-4x+7$ первообразная имеет вид

$$F(x)=x^3-2x^2+7x+C;$$

$y=f(x)$	$F(x)$
$f(x)=k,\quad k$ — произвольное действительное число	$F(x)=kx+C$
$f(x)=x^p,\quad p\neq -1$	$F(x)=\dfrac{x^{p+1}}{p+1}+C$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert+C$
$f(x)=\sqrt{x}$	$F(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+C$
$f(x)=\sqrt[3]{x}$	$F(x)=\dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$	$F(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x+C$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x+C$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+C$
$f(x)=a^x,\quad a>0,\quad a\neq 1$	$F(x)=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x)=\arcsin x+C$
$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$	$F(x)=\operatorname{arctg} x+C$

для функции $f(x)=\cos(4x+5)$ первообразной является

$$F(x)=\frac{1}{4}\sin(4x+5)+C.$$

Формул для вычисления первообразной произведения или частного двух функций (в отличие от формул для вычисления производной произведения или частного двух функций) не существует. Поэтому если требуется найти производную произведения или частного функций, то сначала следует сделать необходимые алгебраические преобразования. Так, функцию $f(x)=x^2x^3(x+1)$ нужно привести к виду $f(x)=x^6+x^5$ (первообразной будет функция $F(x)=\dfrac{x^7}{7}+\dfrac{x^6}{6}+C$), а функцию $f(x)=\dfrac{3x^5+2x^4+x}{x^2}$ — к виду $f(x)=3x^3+2x^2+\dfrac{1}{x}$ (первообразной будет функция $F(x)=x^4+x^3+\ln\lvert x\rvert+C$); здесь C — произвольное действительное число. Перейдем к примерам, разобрав задания диагностической работы — по два на каждую из шести функционально-числовых линий школьного курса математики.

Ответы:

1

2

3

4

5

6

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Диагностическая работа 1

1. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{3x+2}{5},$$

если $F(4)=5$. В ответе укажите значение $F(1)$.

2. Наименьшее значение первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

на отрезке $[0;6]$ равно -9. Найдите наибольшее значение первообразной на этом отрезке.

3. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{3x^3+2}{x^3}$$

на промежутке $(0;+\infty)$, если $F(1)=2$. В ответе укажите значение $F(0{,}5)$.

4. График первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = -\frac{6}{x^2}$$

на промежутке $(-\infty;0)$ проходит через точку $(-2;-3)$. Решите уравнение $F(x)=f(x)$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший корень.

5. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{11}{\sqrt{x}} + 2$$

на промежутке $(0;+\infty)$, если $F(4)=-15$. В ответе укажите значение $F(9)$.

6. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

на промежутке $(0;+\infty)$, если график первообразной пересекает прямую $y=2x-3$ в точке с абсциссой 1. В ответе укажите значение $F(8)$.

Ответы:

7. График первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = 3\sin x - 2\cos x$$

проходит через точку $(-\pi; 0)$. В какой точке график первообразной пересекает ось ординат? В ответе укажите ординату этой точки.

8. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 2 + \sin 4x,$$

если $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3\pi$. В ответе укажите значение $F\left(\frac{7\pi}{4}\right)$.

9. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = e^x + 4x + 3,$$

если $F(1) = e$. В ответе укажите значение $F(0)$.

10. Наибольшее значение первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = e^x + 2x + 1$$

на отрезке $[0; 2]$ равно e^2. Найдите наименьшее значение первообразной на этом отрезке.

11. В какой точке отрезка $[12; 22]$ первообразная $F(x)$ для функции

$$f(x) = -1 - \ln^2(x-2)$$

достигает своего наименьшего значения на этом отрезке?

12. В какой точке отрезка $\left[\frac{4}{3}; \frac{14}{3}\right]$ первообразная $F(x)$ для функции

$$f(x) = (x-5)\ln(x-1)$$

достигает своего наибольшего значения на этом отрезке?

7

8

9

10

11

12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Целые рациональные функции. Решения задач 1 и 2 диагностической работы 1

1. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=\dfrac{3x+2}{5}$, если $F(4)=5$. В ответе укажите значение $F(1)$.

Решение. Найдем первообразную, воспользовавшись таблицей первообразных и их свойствами:

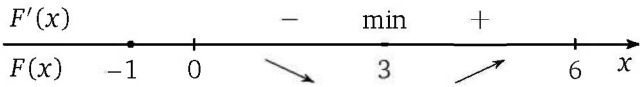
$$F(x) = 0{,}3x^2+0{,}4x+C.$$

По условию $F(4)=5$, значит, $0{,}3\cdot 4^2+0{,}4\cdot 4+C=5$, откуда $C=-1{,}4$ и $F(1)=0{,}3+0{,}4-1{,}4=-0{,}7$.

Ответ: $F(x)=0{,}3x^2+0{,}4x-1{,}4$; $F(1)=-0{,}7$.

2. Наименьшее значение первообразной $F(x)$ для функции $f(x)=x^2-2x-3$ на отрезке $[0;6]$ равно -9. Найдите наибольшее значение первообразной на этом отрезке.

Решение. Из определения первообразной и условия получаем, что $F'(x)=f(x)=x^2-2x-3$. Корнями квадратного трехчлена x^2-2x-3 являются числа -1 и 3. Поэтому $F'(x)=(x+1)(x-3)$. Исследуем $F(x)$ на данном отрезке с помощью производной.



Значит, $\min\limits_{[0;6]} F(x)=F(3)=-9$, а наибольшее значение $F(x)$ принимает на одном из концов отрезка $[0;6]$. Теперь найдем первообразную, воспользовавшись таблицей первообразных и их свойствами: $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+C$. Следовательно,

$$F(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3-3^2-3\cdot 3+C=-9+C.$$

Поэтому $-9+C=-9$, откуда $C=0$ и $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x$. Найдем значения $F(x)$ на концах отрезка $[0;6]$:

$$F(0)=0,\quad F(6)=\frac{1}{3}\cdot 6^3-6^2-3\cdot 6=18.$$

Таким образом, $\max\limits_{[0;6]} F(x)=F(6)=18$.

Ответ: 18.

Ответы:

Тренировочная работа 1

1. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=\frac{4x+3}{2}$, если $F(3)=2$. В ответе укажите значение $F(0)$.

1

2. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=x^2(4x+3)$, если известно, что график первообразной проходит через точку $(2;\,34)$. В ответе укажите значение $F(-1)$.

2

3. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x)=x(2x-1)^2,$$

если $F(0)=-\frac{1}{6}$. В ответе укажите значение $F(1)$.

3

4. Один из двух нулей первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x)=5x-1$$

равен -3. Найдите второй нуль.

4

5. График первообразной $F(x)$ для функции $f(x)=4x+6$ пересекает ось абсцисс в точках, расстояние между которыми равно 2. В какой точке график первообразной пересекает ось ординат? В ответе укажите ординату этой точки.

5

6. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=4x+2$, если множеством значений первообразной является луч $[-4;\,+\infty)$. В ответе укажите значение $F(-2)$.

6

7. В какой точке отрезка $[0;\,8]$ первообразная $F(x)$ для функции $f(x)=x^2-3x-4$ достигает своего наименьшего на этом отрезке значения?

7

8. В какой точке отрезка $[-7;\,13]$ первообразная $F(x)$ для функции $f(x)=7x-x^2-13$ достигает своего наибольшего на этом отрезке значения?

8

9. Наибольшее значение первообразной $F(x)$ для функции $f(x)=3x^2-14x+11$ на отрезке $[0;\,2]$ равно 1. Найдите наименьшее значение первообразной на этом отрезке.

9

10. Наименьшее значение первообразной $F(x)$ для функции $f(x)=x^2-2x+18$ на отрезке $[3;\,6]$ равно 64. Найдите наибольшее значение первообразной на этом отрезке.

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Дробно-рациональные функции.
Решения задач 3 и 4 диагностической работы 1

3. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{3x^3+2}{x^3}$$

на промежутке $(0; +\infty)$, если $F(1) = 2$. В ответе укажите значение $F(0{,}5)$.

Решение. Разделив почленно числитель на знаменатель, получим, что $f(x) = 3 + 2 \cdot x^{-3}$. Найдем первообразную, воспользовавшись таблицей первообразных и их свойствами: $F(x) = 3x - x^{-2} + C$. По условию $F(1) = 2$, значит, $2 + C = 2$, откуда $C = 0$ и $F(x) = 3x - \frac{1}{x^2}$. Поэтому

$$F(0{,}5) = 3 \cdot 0{,}5 - \frac{1}{0{,}5^2} = 1{,}5 - 1 : \frac{1}{4} = -2{,}5.$$

Ответ: $F(x) = 3x - \frac{1}{x^2}$; $F(0{,}5) = -2{,}5$.

4. График первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = -\frac{6}{x^2}$$

на промежутке $(-\infty; 0)$ проходит через точку $(-2; -3)$. Решите уравнение $F(x) = f(x)$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший корень.

Решение. Запишем данную функцию в виде $f(x) = -6x^{-2}$ и найдем первообразную, воспользовавшись таблицей первообразных и их свойствами: $F(x) = 6x^{-1} + C$, или $F(x) = \frac{6}{x} + C$. Из условия следует, что $F(-2) = -3$, откуда $\frac{6}{-2} + C = -3$ и, следовательно, $C = 0$. Составим уравнение по условию задачи: $\frac{6}{x} = -\frac{6}{x^2}$. Поскольку $x \neq 0$, домножив обе части уравнения на $\frac{x^2}{6}$, найдем $x = -1$.

Ответ: -1.

Ответы:

Тренировочная работа 2

1. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=\frac{3}{x}$ на промежутке $(0;+\infty)$, если $F(2)=3\ln 2+1$. В ответе укажите значение $F(1)$.

1

2. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=\frac{4}{x}$ на промежутке $(-\infty;0)$, если $F(-3)=4\ln 3-2$. В ответе укажите значение $F(-1)$.

2

3. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=\frac{4}{x-5}$ на промежутке $(5;+\infty)$, если $F(9)=4\ln 4+4$. В ответе укажите значение $F(6)$.

3

4. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=\frac{3}{x-4}$ на промежутке $(-\infty;4)$, если $F(-3)=3\ln 7+9$. В ответе укажите значение $F(3)$.

4

5. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=\frac{8}{4x+3}$ на промежутке $\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$, если $F(0)=2\ln 3-5$. В ответе укажите значение $F(-0{,}5)$.

5

6. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=\frac{3}{2x^2}$ на промежутке $(0;+\infty)$, если график первообразной проходит через точку $(0{,}5;\,5)$. В ответе укажите значение $F(3)$.

6

7. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=\frac{4x^2-3}{x^2}$ на промежутке $(0;+\infty)$, если $F(0{,}25)=-11$. В ответе укажите значение $F(0{,}5)$.

7

8. График первообразной $F(x)$ для функции $f(x)=\frac{15}{x^2}$, заданной на промежутке $(0;+\infty)$, проходит через точку $\left(\frac{1}{3};0\right)$. Решите уравнение $F(x)=5f(x)+39$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший корень.

8

9. В какой точке отрезка $[-3;12]$ первообразная $F(x)$ для функции $f(x)=\frac{x^2-16}{x^2+16}$ достигает своего наименьшего значения на этом отрезке?

9

10. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x)=\cfrac{10x}{10x+\cfrac{1}{10x-\cfrac{1}{10x}}}$$

на промежутке $(0{,}1;+\infty)$, если график первообразной проходит через точку $(1;\,1)$. В ответе укажите значение $F(0{,}5)$.

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Иррациональные функции. Решения задач 5 и 6 диагностической работы 1

5. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{11}{\sqrt{x}} + 2$$

на промежутке $(0; +\infty)$, если $F(4) = -15$. В ответе укажите значение $F(9)$.

Решение. Найдем первообразную, воспользовавшись таблицей первообразных и их свойствами:

$$F(x) = 2x + 22\sqrt{x} + C.$$

По условию $F(4) = -15$, значит, $8 + 44 + C = -15$, откуда $C = -67$ и $F(9) = 18 + 66 - 67 = 17$.

Ответ: $F(x) = 2x + 22\sqrt{x} - 67$; $F(9) = 17$.

6. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

на промежутке $(0; +\infty)$, если график первообразной пересекает прямую $y = 2x - 3$ в точке с абсциссой 1. В ответе укажите значение $F(8)$.

Решение. Найдем первообразную, воспользовавшись таблицей первообразных и их свойствами:

$$F(x) = \sqrt[3]{x^2} + C.$$

Из условия следует, что график первообразной проходит через точку с абсциссой 1, лежащую на прямой $y = 2x - 3$, т. е. через точку $(1; -1)$. Значит, $F(1) = -1$, откуда $1 + C = -1$ и, следовательно, $C = -2$. Поэтому

$$F(8) = \sqrt[3]{8^2} - 2 = 2.$$

Ответ: $F(x) = \sqrt[3]{x^2} - 2$; $F(8) = 2$.

Ответы:

Тренировочная работа 3

1. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=6\sqrt{x}+5$ на промежутке $(0;+\infty)$, если $F(1)=9$. В ответе укажите значение $F(4)$.

1

2. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}+1$ на промежутке $(0;+\infty)$, если $F(4)=13$. В ответе укажите значение $F(1)$.

2

3. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=4-\dfrac{11}{\sqrt{x}}$ на промежутке $(0;+\infty)$, если $F(25)=12$. В ответе укажите значение $F(4)$.

3

4. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=4\sqrt[3]{x}+5$, если известно, что график первообразной проходит через точку $(8;94)$. В ответе укажите значение $F(-1)$.

4

5. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=23\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[5]{x}$, если $F(-1)=-3$. В ответе укажите значение $F(1)$.

5

6. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x)=3\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}+5 \quad \text{на промежутке } (0;+\infty),$$

если $F(8)=32\sqrt{2}+92$. В ответе укажите значение $F(1)$.

6

7. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=21x^3\cdot\sqrt[5]{x}$, если график первообразной пересекает график функции $y=21x^5\cdot\sqrt[3]{x}$ в точке с абсциссой 1. В ответе укажите значение $F(-1)$.

7

8. Найдите наименьшее значение на отрезке $[1;8]$ первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x)=8\sqrt[3]{x}+7,$$

если ее наибольшее значение на этом отрезке равно 96.

8

9. В какой точке отрезка $[-9;9]$ первообразная $F(x)$ для функции $f(x)=\dfrac{x^2-11x+10}{4\sqrt[3]{x^2}+5}$ достигает своего наибольшего на этом отрезке значения?

9

10. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=21x\sqrt[3]{x}$, если график первообразной пересекает график производной этой функции $f(x)$ в точке с абсциссой -1. В ответе укажите значение $F(1)$.

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тригонометрические функции. Решения задач 7 и 8 диагностической работы 1

7. График первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = 3\sin x - 2\cos x$$

проходит через точку $(-\pi; 0)$. В какой точке график первообразной пересекает ось ординат? В ответе укажите ординату этой точки.

Решение. Найдем первообразную, воспользовавшись таблицей первообразных и их свойствами:

$$F(x) = -3\cos x - 2\sin x + C.$$

По условию $F(-\pi) = 0$, значит, $3 + C = 0$, откуда $C = -3$ и $F(0) = -3 - 3 = -6$.

Ответ: -6.

8. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 2 + \sin 4x,$$

если $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3\pi$. В ответе укажите значение $F\left(\frac{7\pi}{4}\right)$.

Решение. Найдем первообразную, воспользовавшись таблицей первообразных и их свойствами:

$$F(x) = 2x - \frac{1}{4}\cos 4x + C.$$

По условию $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3\pi$, значит, $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} + C = -3\pi$, откуда

$$C = -\frac{7\pi}{2} - \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad F\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{2} + \frac{1}{4} - \frac{7\pi}{2} - \frac{1}{4} = 0.$$

Ответ: $F(x) = 2x - \frac{1}{4}\cos 4x - \frac{7\pi}{2} - \frac{1}{4}$; $F\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 0$.

Тренировочная работа 4

Ответы:

1. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=2\cos x$, если $F\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-5$. В ответе укажите значение $F(\pi)$.

2. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=-3\sin x$, если $F(-\pi)=7$. В ответе укажите значение $F\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=-8\cos 4x$, если $F\left(\frac{\pi}{24}\right)=24$. В ответе укажите значение $F\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

4. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=6\sin 3x$, если $F\left(\frac{\pi}{9}\right)=9$. В ответе укажите значение $F\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

5. График первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = 3\sin x + 4\cos x$$

проходит через точку $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\right)$. В какой точке график первообразной пересекает ось ординат? В ответе укажите ординату этой точки.

6. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 3 - 2\cos 2x,$$

если $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$. В ответе укажите значение $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

7. В какой точке отрезка $[-13; 7]$ первообразная $F(x)$ для функции $f(x)=4\sin^{50}x+5\cos^{60}x+6$ достигает своего наибольшего на этом отрезке значения?

8. В какой точке отрезка $[-4; 11]$ первообразная $F(x)$ для функции $f(x)=(x^2-36)(\sin^2 x+36)$ достигает своего наименьшего на этом отрезке значения?

9. Наибольшее значение на отрезке $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ первообразной $F(x)$ для функции $f(x)=2\cos x-3$ равно $\frac{9\pi}{2}$. Найдите наименьшее значение первообразной на этом отрезке.

10. Наименьшее значение на отрезке $[0; \pi]$ первообразной $F(x)$ для функции $f(x)=6\pi\sin 3x+25$ равно -29π. Найдите наибольшее значение первообразной на этом отрезке.

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Показательная функция.
Решения задач 9 и 10 диагностической работы 1

9. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = e^x + 4x + 3, \quad \text{если } F(1) = e.$$

В ответе укажите значение $F(0)$.

Решение. Найдем первообразную, воспользовавшись таблицей первообразных и их свойствами:

$$F(x) = e^x + 2x^2 + 3x + C.$$

По условию $F(1) = e$, значит, $e + 2 + 3 + C = e$, откуда $C = -5$ и $F(0) = 1 - 5 = -4$.

Ответ: $F(x) = e^x + 2x^2 + 3x - 5$; $F(0) = -4$.

10. Наибольшее значение первообразной $F(x)$ для функции $f(x) = e^x + 2x + 1$ на отрезке $[0; 2]$ равно e^2. Найдите наименьшее значение первообразной на этом отрезке.

Решение. Из определения первообразной и условия получаем, что $F'(x) = f(x) = e^x + 2x + 1$. На данном отрезке $e^x + 2x + 1 > 0$. Поэтому $F'(x) > 0$ и функция $y = F(x)$ возрастает на отрезке $[0; 2]$.

Значит,

$$\min_{[0;2]} F(x) = F(0), \quad \max_{[0;2]} F(x) = F(2) = e^2.$$

Теперь найдем первообразную, воспользовавшись таблицей первообразных и их свойствами:

$$F(x) = e^x + x^2 + x + C.$$

Следовательно,

$$F(2) = e^2 + 4 + 2 + C = e^2 + 6 + C.$$

Поэтому $e^2 + 6 + C = e^2$, откуда $C = -6$ и $F(0) = 1 - 6 = -5$.

Ответ: -5.

Тренировочная работа 5

Ответы:

1. Найдите первообразную $F(x)$ для функции
$$f(x) = e^x,$$
если $F(\ln 4) = 5$. В ответе укажите значение $F(0)$.

2. Найдите первообразную $F(x)$ для функции
$$f(x) = 2e^x - 3,$$
если $F(2) = 2e^2 + 7$. В ответе укажите значение $F(0)$.

3. Найдите первообразную $F(x)$ для функции
$$f(x) = 6e^{2x},$$
если $F(0{,}5) = 3e + 4$. В ответе укажите значение $F(0)$.

4. Найдите первообразную $F(x)$ для функции
$$f(x) = 5e^x + 6,$$
если $F(1) = 5e + 8$. В ответе укажите значение $F(0)$.

5. Найдите первообразную $F(x)$ для функции
$$f(x) = 2^x \ln 2,$$
если $F(2) = 7$. В ответе укажите значение $F(3)$.

6. Найдите первообразную $F(x)$ для функции
$$f(x) = 2^x \ln 2,$$
если $F(3) = 5$. В ответе укажите значение $F(1)$.

7. Наибольшее значение на отрезке $[1; 2]$ первообразной $F(x)$ для функции
$$f(x) = 5^x \ln 5 + 4$$
равно 10. Найдите наименьшее значение $F(x)$ на этом отрезке.

8. Наименьшее значение на отрезке $[1; 4]$ первообразной $F(x)$ для функции
$$f(x) = 2^x \ln 2 + 2x + 1$$
равно -2. Найдите наибольшее значение $F(x)$ на этом отрезке.

9. В какой точке отрезка $[-3; 3]$ первообразная $F(x)$ для функции
$$f(x) = (3^x - 3)(x - 4)$$
достигает своего наибольшего на этом отрезке значения?

10. В какой точке числовой оси первообразная $F(x)$ для функции
$$f(x) = (7^x - 49)(x^2 - 4)$$
достигает своего наименьшего значения?

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Логарифмическая функция. Решения задач 11 и 12 диагностической работы 1

11. В какой точке отрезка [12; 22] первообразная $F(x)$ для функции

$$f(x) = -1 - \ln^2(x-2)$$

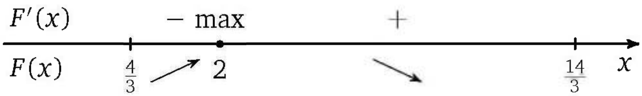
достигает своего наименьшего значения на этом отрезке?

Решение. Из определения первообразной и условия получаем, что $F'(x) = f(x) = -1 - \ln^2(x-2)$. На данном отрезке $-1 - \ln^2(x-2) < 0$. Поэтому $F'(x) < 0$ и функция $y = F(x)$ убывает на отрезке [12; 22]. Значит, своего наименьшего значения эта функция достигает в правом конце отрезка, т. е. при $x = 22$.

Ответ: 22.

12. В какой точке отрезка $\left[\frac{4}{3}; \frac{14}{3}\right]$ первообразная $F(x)$ для функции $f(x) = (x-5)\ln(x-1)$ достигает своего наибольшего значения на этом отрезке?

Решение. Из определения первообразной и условия получаем, что $F'(x) = f(x) = (x-5)\ln(x-1)$. При любом значении переменной $x \in \left[\frac{4}{3}; \frac{14}{3}\right]$ число $x - 5$ отрицательно. Далее, $\ln(x-1) = 0$ при $x = 2$; $\ln(x-1) > 0$ при $x > 2$; $\ln(x-1) < 0$ при $x < 2$. Исследуем $F(x)$ на данном отрезке с помощью производной.



Следовательно, $\max\limits_{\left[\frac{4}{3}; \frac{14}{3}\right]} F(x) = F(2)$.

Ответ: 2.

Ответы:

Тренировочная работа 6

1. В какой точке отрезка [6; 26] первообразная $F(x)$ для функции

$$f(x) = -\ln x$$

достигает своего наименьшего значения на этом отрезке?

1

2. В какой точке отрезка [0,5; 5] первообразная $F(x)$ для функции

$$f(x) = (x-5)\ln x$$

достигает своего наибольшего значения на этом отрезке?

2

3. К графику первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = \log_3(x+4)$$

проведена касательная в точке с абсциссой 5. Найдите угловой коэффициент касательной.

3

4. К графику первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = 8x + \log_7(x+6)$$

проведена касательная в точке с абсциссой 1. Найдите угловой коэффициент касательной.

4

5. К графику первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = x\log_2 x$$

проведена касательная в точке с абсциссой 8. Найдите тангенс угла, который эта касательная образует с положительным направлением оси абсцисс.

5

6. К графику первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = 3\cos x + 4\log_5(x+1)$$

проведена касательная в точке с абсциссой 0. Найдите тангенс угла, который эта касательная образует с положительным направлением оси абсцисс.

6

7. К графику первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = \log_{11}(x^2+2)$$

проведена касательная в точке с абсциссой 3. Найдите угол, который эта касательная образует с положительным направлением оси абсцисс. Ответ дайте в градусах.

7

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

8

9

10

8. В скольких целых точках отрезка $[11; 21]$ значения первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = \log_7(x-10)$$

меньше, чем ее значение в точке 17?

9. В скольких целых точках отрезка $[-2; 4]$ значения первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = (x-4)\log_4(x+4)$$

больше, чем ее значение в точке 3?

10. Найдите точку максимума первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = (2x^2-5x+2)\log_7(x-0{,}5).$$

Образец написания: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Диагностическая работа 2

Ответы:

1. Найдите первообразную $F(x)$ для функции
$$f(x) = 4x + 3,$$
если $F(2) = 15$. В ответе укажите значение $F(-1)$.

1

2. Наименьшее значение первообразной $F(x)$ для функции
$$f(x) = 5 + 4x - x^2$$
на отрезке $[-3; 3]$ равно $\frac{1}{3}$. Найдите наибольшее значение первообразной на этом отрезке.

2

3. Найдите первообразную $F(x)$ для функции
$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2}$$
на промежутке $(0; +\infty)$, если $F(2) = 5{,}5$. В ответе укажите значение $F(0{,}5)$.

3

4. График первообразной $F(x)$ для функции
$$f(x) = -\frac{8}{x^3}$$
на промежутке $(-\infty; 0)$ проходит через точку $(-1; 4)$. Решите уравнение $F(x) = f(x)$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший корень.

4

5. Найдите первообразную $F(x)$ для функции
$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + 4$$
на промежутке $(0; +\infty)$, если $F(9) = 55$. В ответе укажите значение $F(4)$.

5

6. Найдите первообразную $F(x)$ для функции
$$f(x) = 4\sqrt[3]{x},$$
если график первообразной пересекает параболу $y = 2x^2 + 3x$ в точке с абсциссой -1. В ответе укажите значение $F(-8)$.

6

7. График первообразной $F(x)$ для функции
$$f(x) = 5\sin x + 6\cos x$$
проходит через точку $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\right)$. В какой точке график первообразной пересекает ось ординат? В ответе укажите ординату этой точки.

7

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

8

9

10

11

12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

8. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 4 - 3\sin 3x,$$

если $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{9}$. В ответе укажите значение $F\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

9. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 6e^x + 4,$$

если $F(1) = 6e + 5$. В ответе укажите значение $F(0)$.

10. Найдите наибольшее на отрезке $[-1; 3]$ значение первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = 4^x \ln 4 - 5 \cdot 2^x \ln 2,$$

если график этой первообразной проходит через начало координат.

11. В какой точке отрезка $[5{,}5; 15{,}5]$ первообразная $F(x)$ для функции

$$f(x) = \log_5(x - 5)$$

достигает своего наименьшего значения на этом отрезке?

12. В скольких целых точках отрезка $[-7; 7]$ значения первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = -\log_3(11 - x)$$

меньше, чем ее значение в точке 2?

Диагностическая работа 3

Ответы:

1. Найдите первообразную $F(x)$ для функции
$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 13x^3 \cdot x^4 \cdot x^5,$$
если $F(0) = 1$. В ответе укажите значение $F(-1)$.

1

2. Найдите первообразную $F(x)$ для функции
$$f(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2 + 4},$$
если график этой первообразной проходит через точку $(-3; 6)$. В ответе укажите значение $F(3)$.

2

3. Найдите первообразную $F(x)$ для функции
$$f(x) = \frac{x^2 \cdot x^4 \cdot x^6}{x^3 \cdot x^5 \cdot x^7}$$
на промежутке $(0; +\infty)$, если $F(1) = 2{,}5$. В ответе укажите значение $F(0{,}5)$.

3

4. Найдите первообразную $F(x)$ для функции
$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^4 + 4x^2} \quad \text{на промежутке } (0; +\infty),$$
если график этой первообразной проходит через точку $(0{,}25; 5)$. В ответе укажите значение $F(1)$.

4

5. Найдите первообразную $F(x)$ для функции
$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{5x^{\frac{1}{4}}}{4}$$
на промежутке $(0; +\infty)$, если $F(16) = 50$. В ответе укажите значение $F(1)$.

5

6. Найдите первообразную $F(x)$ для функции
$$f(x) = \sqrt[13]{x^4 \cdot \sqrt[7]{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}},$$
если график этой первообразной проходит через точку $(8; 12{,}25)$. В ответе укажите значение $F(1)$.

6

7. Найдите первообразную $F(x)$ для функции
$$f(x) = \sin x \cdot \cos x,$$
если $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{8}$. В ответе укажите значение $F(\pi)$.

7

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

8

8. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x,$$

если график этой первообразной проходит через точку $\left(\frac{\pi}{12}; \frac{5}{4}\right)$. В ответе укажите значение $F\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

9

9. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 2^x \cdot 3^x \cdot 5^x \cdot \ln 30,$$

если $F(2) = 1000$. В ответе укажите значение $F(1)$.

10

10. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 2^{x+3} \cdot 3^{x+2} \cdot \ln 6,$$

если график этой первообразной проходит через точку $(0; 73)$. В ответе укажите значение $F(-1)$.

11

11. В какой точке отрезка $[-1{,}5; 2{,}5]$ первообразная $F(x)$ для функции

$$f(x) = \log_3(x+2)$$

достигает своего наименьшего значения на этом отрезке?

12

12. В какой точке отрезка $[3{,}5; 7{,}5]$ первообразная $F(x)$ для функции

$$f(x) = (x-4)\log_{0,7}(x-3)$$

достигает своего наибольшего значения на этом отрезке?

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы

§ 1. Вычисление производных. Исследование функций с применением производной

Диагностическая работа 1

Вариант 1. **1.** −4. **2.** −54. **3.** 5. **4.** −6. **5.** 4. **6.** −3. **7.** 0,5. **8.** 8. **9.** 19. **10.** −1. **11.** 5. **12.** 19.
Вариант 2. **1.** −7. **2.** −2. **3.** 11. **4.** 10. **5.** 1. **6.** −482. **7.** 1,5. **8.** 21. **9.** 7. **10.** −1. **11.** −4,5. **12.** 63.

Тренировочная работа 1

Вариант 1. **1.** −4. **2.** 0. **3.** 14. **4.** −14. **5.** 15. **6.** 24. **7.** −2. **8.** −35. **9.** 162. **10.** 2.
Вариант 2. **1.** −5. **2.** 0. **3.** 16. **4.** 15. **5.** 24. **6.** 28. **7.** −2. **8.** −77. **9.** 112. **10.** −1.

Тренировочная работа 2

Вариант 1. **1.** 1. **2.** 2. **3.** 2. **4.** −2. **5.** 3. **6.** −4. **7.** 2. **8.** −2. **9.** 4. **10.** −3.
Вариант 2. **1.** −8. **2.** 4. **3.** 2. **4.** −6. **5.** −10. **6.** 3. **7.** 2. **8.** 9. **9.** −1. **10.** 0.

Тренировочная работа 3

Вариант 1. **1.** 1. **2.** 0. **3.** 5. **4.** 4. **5.** −29. **6.** 256. **7.** −32. **8.** 3. **9.** −4. **10.** 108.
Вариант 2. **1.** 11. **2.** 10. **3.** −140. **4.** 65. **5.** 7. **6.** 177. **7.** −16. **8.** 34. **9.** −7. **10.** −5.

Тренировочная работа 4

Вариант 1. **1.** 48. **2.** −21. **3.** −11. **4.** −3. **5.** 80. **6.** −35. **7.** −4. **8.** −60. **9.** −80. **10.** 45.
Вариант 2. **1.** −486. **2.** −20. **3.** −6. **4.** −4. **5.** 48. **6.** −63. **7.** −4. **8.** −36. **9.** −72. **10.** 4.

Тренировочная работа 5

Вариант 1. **1.** −4. **2.** 6. **3.** 8. **4.** 2. **5.** 2. **6.** −3. **7.** 1. **8.** −2. **9.** −3. **10.** −4.
Вариант 2. **1.** −6. **2.** 16. **3.** 10. **4.** −12. **5.** 1. **6.** −3. **7.** 30. **8.** −7. **9.** −3. **10.** 4.

Тренировочная работа 6

Вариант 1. **1.** 8. **2.** −7. **3.** 6. **4.** −24. **5.** 30. **6.** −6. **7.** 10. **8.** −12. **9.** 27. **10.** −25.
Вариант 2. **1.** −56. **2.** 50. **3.** −24. **4.** 22. **5.** −63. **6.** 33. **7.** −60. **8.** 48. **9.** −3 **10.** −64

Тренировочная работа 7

Вариант 1. **1.** 3. **2.** 2. **3.** 2. **4.** 3. **5.** 35. **6.** 36. **7.** 10. **8.** 5. **9.** 0,9. **10.** 1,3.
Вариант 2. **1.** 4. **2.** 3. **3.** 1,5. **4.** 5. **5.** 28. **6.** 34. **7.** 15. **8.** 5. **9.** 0. **10.** 1,7.

Тренировочная работа 8

Вариант 1. **1.** 9. **2.** 4. **3.** 1. **4.** 16. **5.** 3. **6.** 2. **7.** 4. **8.** 5. **9.** 1. **10.** 1.
Вариант 2. **1.** 16. **2.** 324. **3.** 256. **4.** 196. **5.** 144. **6.** 36. **7.** 6. **8.** 7. **9.** 6. **10.** −4.

Тренировочная работа 9

Вариант 1. **1.** −16. **2.** −4. **3.** 81. **4.** 16. **5.** −16. **6.** 16. **7.** −48. **8.** 17. **9.** −103. **10.** 59.
Вариант 2. **1.** 142. **2.** −31. **3.** 8,25. **4.** 5. **5.** 3. **6.** 584. **7.** 3. **8.** 9. **9.** 16. **10.** −9.

Тренировочная работа 10

Вариант 1. **1.** −7. **2.** −23. **3.** 16. **4.** 0. **5.** −39. **6.** −4. **7.** 8. **8.** 12. **9.** 14. **10.** 12.
Вариант 2. **1.** −2. **2.** 17. **3.** −26. **4.** 36. **5.** −55. **6.** −6. **7.** −16. **8.** −20. **9.** 18. **10.** 14.

Тренировочная работа 11

Вариант 1. **1.** 3. **2.** 1,5. **3.** 1,2. **4.** 0,5. **5.** 2,5. **6.** 0,75. **7.** 0,25. **8.** 1,25. **9.** 0,4. **10.** 2,5.
Вариант 2. **1.** 4. **2.** −1. **3.** 1,25. **4.** 0,75. **5.** 3. **6.** 0,625. **7.** 1,2. **8.** 0,5. **9.** 0,6. **10.** 0,4.

Тренировочная работа 12

Вариант 1. **1.** 6. **2.** 34. **3.** 14. **4.** 7. **5.** −1. **6.** 14. **7.** −6. **8.** 8. **9.** −10. **10.** −18.
Вариант 2. **1.** −2. **2.** 5. **3.** −16,5. **4.** 32. **5.** 6. **6.** 11. **7.** 12. **8.** 4. **9.** 5. **10.** 9.

Тренировочная работа 13

Вариант 1. **1.** 49. **2.** 0,01. **3.** 36. **4.** −81. **5.** 36. **6.** 2. **7.** −9. **8.** −6. **9.** 21. **10.** 45.
Вариант 2. **1.** 27. **2.** 0,01. **3.** 49. **4.** −64. **5.** 64. **6.** 5. **7.** −9. **8.** −10. **9.** 500. **10.** 63.

Тренировочная работа 14

Вариант 1. **1.** 3. **2.** 0. **3.** 13. **4.** −1. **5.** 2. **6.** 4. **7.** 5. **8.** 7. **9.** 1. **10.** −3.
Вариант 2. **1.** 47. **2.** 64. **3.** 0. **4.** 2. **5.** 5. **6.** −10. **7.** 21. **8.** −11. **9.** 3. **10.** −14.

Тренировочная работа 15

Вариант 1. **1.** 7. **2.** 14. **3.** 4. **4.** 4. **5.** −2. **6.** 10. **7.** 0. **8.** 4. **9.** −1. **10.** 2.
Вариант 2. **1.** −1. **2.** 4. **3.** 0. **4.** 4. **5.** −19. **6.** 38. **7.** −19. **8.** 11. **9.** 0,2. **10.** 16.

Тренировочная работа 16

Вариант 1. **1.** 4. **2.** 5. **3.** 0,24. **4.** 0,9. **5.** 7. **6.** 15. **7.** 16. **8.** 0,25. **9.** 6. **10.** 60.
Вариант 2. **1.** 4. **2.** 4. **3.** 1,25. **4.** 0,15. **5.** 10. **6.** 35. **7.** 96. **8.** 0,1. **9.** 7. **10.** 24.

Тренировочная работа 17

Вариант 1. **1.** 0,4. **2.** 9. **3.** 8. **4.** 5. **5.** 9,5. **6.** 3. **7.** 11,5. **8.** −4,8. **9.** 4. **10.** 3.
Вариант 2. **1.** −8,75. **2.** 8,5. **3.** −6. **4.** −5. **5.** 8. **6.** 3. **7.** −8. **8.** −7. **9.** 5. **10.** −1.

Тренировочная работа 18

Вариант 1. **1.** −20. **2.** 13. **3.** 19. **4.** 6. **5.** 2. **6.** 12. **7.** −1. **8.** 10. **9.** −7. **10.** 9.
Вариант 2. **1.** −44. **2.** 144. **3.** −19. **4.** 45. **5.** 14. **6.** 10. **7.** −9. **8.** −22. **9.** −2. **10.** 10.

Диагностическая работа 2

Вариант 1. **1.** −2. **2.** 6. **3.** −4. **4.** 12. **5.** 4. **6.** 1. **7.** 1,5. **8.** 5. **9.** 6. **10.** 1. **11.** 0,5. **12.** 9.
Вариант 2. **1.** −3. **2.** 139. **3.** −19. **4.** 48. **5.** 2,25. **6.** 27. **7.** 0,5. **8.** 23. **9.** −52. **10.** 1. **11.** 9,5. **12.** 9.

Диагностическая работа 3

Вариант 1. **1.** 2. **2.** 0. **3.** 7. **4.** 0. **5.** 9. **6.** 33. **7.** 1. **8.** 12. **9.** 17. **10.** 5. **11.** 7. **12.** 2.
Вариант 2. **1.** 3. **2.** 19. **3.** 14. **4.** −27. **5.** 121. **6.** 228. **7.** 1,5. **8.** 15. **9.** 9. **10.** 1. **11.** −10,5. **12.** 2.

Диагностическая работа 4

Вариант 1. **1.** 3. **2.** 108. **3.** −3. **4.** 24. **5.** 25. **6.** −245. **7.** 2. **8.** −3. **9.** −7. **10.** −1. **11.** 2,5. **12.** 6.
Вариант 2. **1.** 4. **2.** 20. **3.** −6. **4.** 69. **5.** 6,25. **6.** −483. **7.** 0,5. **8.** 32. **9.** −75. **10.** −1. **11.** −5. **12.** −36.

Диагностическая работа 5

Вариант 1. **1.** 1. **2.** −2. **3.** −15. **4.** −10. **5.** 36. **6.** 54. **7.** 1,25. **8.** −11. **9.** −6. **10.** 1. **11.** −1. **12.** −1.
Вариант 2. **1.** −8. **2.** −485. **3.** −23. **4.** −58. **5.** 16. **6.** 16. **7.** 1,5. **8.** −13. **9.** −66. **10.** 1. **11.** −8. **12.** −7.

Диагностическая работа 6

Вариант 1. **1.** 5. **2.** 20. **3.** −4. **4.** 91. **5.** 400. **6.** 25. **7.** 1,5. **8.** 3. **9.** 46. **10.** 2. **11.** 0,1. **12.** −18.
Вариант 2. **1.** 8. **2.** 61. **3.** −9. **4.** 37. **5.** 196. **6.** 36. **7.** 0,5. **8.** −14. **9.** 11. **10.** −19. **11.** 12,1. **12.** −8.

§ 2. Первообразная

Диагностическая работа 1

1. $F(x)=0{,}3x^2+0{,}4x-1{,}4$; $F(1)=-0{,}7$. **2.** 18. **3.** $F(x)=3x-\dfrac{1}{x^2}$; $F(0{,}5)=-2{,}5$. **4.** −1.
5. $F(x)=2x+22\sqrt{x}-67$; $F(9)=17$. **6.** $F(x)=\sqrt[3]{x^2}-2$; $F(8)=2$. **7.** −6.
8. $F(x)=2x-\dfrac{1}{4}\cos 4x-\dfrac{7\pi}{2}-\dfrac{1}{4}$; $F\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)=0$. **9.** $F(x)=e^x+2x^2+3x-5$; $F(0)=-4$. **10.** −5.
11. 22. **12.** 2.

Тренировочная работа 1

1. $F(x)=x^2+1{,}5x-11{,}5$; $F(0)=-11{,}5$. **2.** $F(x)=x^4+x^3+10$; $F(-1)=10$.
3. $F(x)=x^4-\dfrac{4x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}$; $F(1)=0$. **4.** 3,4. **5.** 2,5. **6.** $F(x)=2x^2+2x-3{,}5$; $F(-2)=0{,}5$. **7.** 4.
8. −7. **9.** −4. **10.** 154.

Тренировочная работа 2

1. $F(x)=3\ln x+1$; $F(1)=1$. **2.** $F(x)=4\ln(-x)-2$; $F(-1)=-2$. **3.** $F(x)=4\ln(x-5)+4$; $F(6)=4$. **4.** $F(x)=3\ln(4-x)+9$; $F(3)=9$. **5.** $F(x)=2\ln(4x+3)-5$; $F(-0{,}5)=-5$.
6. $F(x)=-\dfrac{3}{2x}+8$; $F(3)=7{,}5$. **7.** $F(x)=4x+\dfrac{3}{x}-24$; $F(0{,}5)=-16$. **8.** 5. **9.** 4.
10. $F(x)=x+\dfrac{1}{100x}-0{,}01$; $F(0{,}5)=0{,}51$.

Тренировочная работа 3

1. $F(x)=4x\sqrt{x}+5\sqrt{x}$; $F(4)=52$. **2.** $F(x)=x+4\sqrt{x}+1$; $F(1)=6$. **3.** $F(x)=4x-22\sqrt{x}+22$; $F(4)=-6$. **4.** $F(x)=3x\sqrt[3]{x}+5x+6$; $F(-1)=4$. **5.** $F(x)=15x\sqrt[15]{x^8}+12$; $F(1)=27$. **6.** $F(x)=2x\sqrt{x}+3x\sqrt[3]{x}+5x+4$; $F(1)=14$. **7.** $F(x)=5x^4\sqrt[5]{x}+16$; $F(-1)=11$. **8.** -43. **9.** 1. **10.** $F(x)=9x^2\sqrt[3]{x}-19$; $F(1)=-10$.

Тренировочная работа 4

1. $F(x)=2\sin x-3$; $F(\pi)=-3$. **2.** $F(x)=3\cos x+10$; $F\left(-\frac{\pi}{2}\right)=10$. **3.** $F(x)=-2\sin 4x+25$; $F\left(\frac{\pi}{8}\right)=23$. **4.** $F(x)=-2\cos 3x+10$; $F\left(-\frac{\pi}{3}\right)=12$. **5.** 3. **6.** $F(x)=3x-\sin 2x-\frac{3\pi}{4}$; $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$. **7.** 7. **8.** 6. **9.** 2. **10.** 0.

Тренировочная работа 5

1. $F(x)=e^x+1$; $F(0)=2$. **2.** $F(x)=2e^x-3x+13$; $F(0)=15$. **3.** $F(x)=3e^{2x}+4$; $F(0)=7$. **4.** $F(x)=5e^x+6x+2$; $F(0)=7$. **5.** $F(x)=2^x+3$; $F(3)=11$. **6.** $F(x)=2^x-3$; $F(1)=-1$. **7.** -14. **8.** 30. **9.** 1. **10.** -2.

Тренировочная работа 6

1. 26. **2.** 1. **3.** 2. **4.** 9. **5.** 24. **6.** 3. **7.** 45. **8.** 6. **9.** 5. **10.** 1,5.

Диагностическая работа 2

1. $F(x)=2x^2+3x+1$; $F(-1)=0$. **2.** 27. **3.** $F(x)=2x-\frac{1}{x}+2$; $F(0{,}5)=1$. **4.** -2. **5.** $F(x)=4x+6\sqrt{x}+1$; $F(4)=29$. **6.** $F(x)=3x\sqrt[3]{x}-4$; $F(-8)=44$. **7.** 3. **8.** $F(x)=4x+\cos 3x-\frac{4\pi}{9}$; $F\left(\frac{\pi}{9}\right)=0{,}5$. **9.** $F(x)=6e^x+4x+1$; $F(0)=7$. **10.** 28 **11.** 6. **12.** 5.

Диагностическая работа 3

1. $F(x)=x+x^2+x^3+x^{13}+1$; $F(-1)=-1$. **2.** $F(x)=\frac{x^3}{3}-4x+3$; $F(3)=0$. **3.** $F(x)=-\frac{1}{2x^2}+3$; $F(0{,}5)=1$. **4.** $F(x)=-\frac{1}{x}+9$; $F(1)=8$. **5.** $F(x)=4\sqrt{x}+x^{\frac{5}{4}}+2$; $F(1)=7$. **6.** $F(x)=0{,}75x\sqrt[3]{x}+0{,}25$; $F(1)=1$. **7.** $F(x)=-0{,}25\cos 2x+1$; $F(\pi)=0{,}75$. **8.** $F(x)=0{,}5\sin 2x+1$; $F\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0{,}5$. **9.** $F(x)=30^x+100$; $F(1)=130$. **10.** $F(x)=72\cdot 6^x+1$; $F(-1)=13$. **11.** -1. **12.** 3,5.

Содержание