Под редакцией
И. В. Ященко

ЕГЭ 2020

16
Профильный

Р. К. Гордин

Решение задачи 16

МАТЕМАТИКА

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

Р. К. Гордин

ЕГЭ 2020. Математика
Решение задачи 16
(профильный уровень)

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС)

Москва
Издательство МЦНМО
2020

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Г68

Гордин Р. К.

Г68 ЕГЭ 2020. Математика. Решение задачи 16 (профильный уровень). — М.: МЦНМО, 2020. — 448 с.

ISBN 978-5-4439-1421-3

Пособие содержит решения задач книги Р. К. Гордина «ЕГЭ 2020. Математика. Геометрия. Планиметрия. Задача 16 (профильный уровень)». Оно ориентировано на повторение курса геометрии и позволяет подготовиться к решению геометрической задачи 16 профильного уровня ЕГЭ по математике.

Книга будет полезна учащимся старших классов при подготовке к Единому государственному экзамену, учащимся средней школы при изучении курса геометрии, а также всем любителям геометрии.

Пособие предназначено для учащихся старшей и средней школы и учителей математики.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

12+

Учебно-методическое пособие

Рафаил Калманович Гордин

ЕГЭ 2020. Математика. Решение задачи 16 (профильный уровень)

Рисунки М. Ю. Панова, В. Ю. Радионова и Э. С. Власенко

Подписано в печать 15.07.2019 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 28. Тираж 2000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–08–04

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru

ISBN 978-5-4439-1421-3

Предисловие

Московский центр непрерывного математического образования издал пособие [2]. В нём содержится напоминание некоторых теоретических фактов и большой набор задач, к которым приведены ответы. Оказалось, что этого недостаточно для успешной подготовки к экзамену: нужны ещё и решения подготовительных и тренировочных задач, поскольку задача 16 — это задача повышенной сложности по планиметрии.

Книга, которую вы держите в руках, как раз и содержит эти решения (для задач на доказательство и вычисление приводятся решения только первых вариантов). К ней нельзя относиться лишь как к очередному «решебнику». Геометрические задачи на экзамене решают плохо не только потому, что выпускники не знают каких-то фактов, но ещё и потому, что они не могут написать текст решения задачи. Поднять математическую культуру учащихся и призвана эта книга.

У геометрической задачи может быть несколько различных способов решения. В пособии для каждой задачи приведено одно из решений. При работе с книгой советуем попробовать решить задачу самостоятельно; если не получается, то посмотреть авторское решение; после того как решение понято, нужно записать решение на бумаге, а потом ещё и попробовать решить задачу другим способом.

На экзамене по математике нет жёстких требований к оформлению решения геометрической задачи, но при этом правильная запись решения позволит избежать многих логических и даже вычислительных ошибок.

Книга будет полезна учащимся старших классов при подготовке к Единому государственному экзамену, учащимся средней школы при изучении курса геометрии, а также всем любителям геометрии.

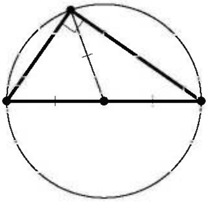
И. В. Ященко

Литература

1. *Гордин Р. К.* Геометрия. Планиметрия. 7—9 классы. М.: МЦНМО, 2017.
2. *Гордин Р. К.* ЕГЭ 2020. Математика. Геометрия. Планиметрия. Задача 16 (профильный уровень). М.: МЦНМО, 2020.
3. *Гордин Р. К.* Теоремы и задачи школьной геометрии. Базовый и профильный уровни. М.: МЦНМО, 2018.

§ 1. Медиана прямоугольного треугольника

Подготовительные задачи



1.1. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 4. Найдите радиус описанной окружности.

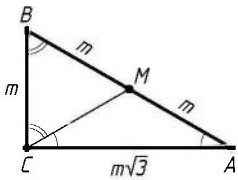
Ответ: 2.

Решение. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, совпадает с серединой гипотенузы. Следовательно, радиус окружности равен половине гипотенузы, т. е. 2.

1.2. Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна m и делит прямой угол в отношении $1:2$. Найдите стороны треугольника.

Ответ: $2m$, m, $m\sqrt{3}$.

Решение. Пусть CM — медиана прямоугольного треугольника ABC, в котором $\angle C = 90^\circ$. Тогда $CM = AM = BM = m$, $AB = 2m$.



Пусть $\angle BCM > \angle ACM$, тогда

$$\angle BCM = \frac{2}{3}\angle ACB = 60^\circ, \quad \angle ACM = 30^\circ,$$

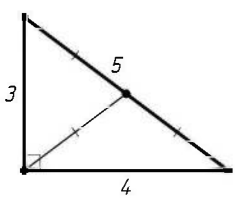
поэтому $\angle B = 60^\circ$ и треугольник BCM равносторонний. Следовательно,

$$BC = CM = m, \quad AC = BC \operatorname{tg} 60^\circ = m\sqrt{3}.$$

1.3. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами 8 и 9. Найдите стороны треугольника.

Ответ: 3; 4; 5.

Решение. Обозначим через a и b $(a < b)$ катеты треугольника. Поскольку медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, а две стороны треугольника с периметром 8 соответственно равны двум сторонам треугольника с периметром 9, разность периметров равна разности третьих сторон. Значит, $b - a = 9 - 8 = 1$. Гипотенуза данного прямоугольного треугольника равна удвоенной медиане, т. е. сумме двух сторон треугольника с периметром 8, поэтому гипотенуза равна $8 - a$.



По теореме Пифагора

$$a^2+b^2=(8-a)^2.$$

Из системы

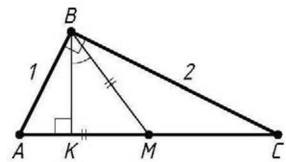
$$\begin{cases} b-a=1, \\ a^2+b^2=(8-a)^2 \end{cases}$$

находим, что $a=3$, $b=4$.

1.4. В треугольнике ABC к стороне AC проведены высота BK и медиана MB, причём $AM=BM$. Найдите косинус угла KBM, если $AB=1$, $BC=2$.

Ответ: $\frac{4}{5}$.

Решение. Поскольку $BM=AM=MC$, то треугольник ABC прямоугольный. Поэтому



$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5}, \quad AC\cdot BK=AB\cdot BC,$$

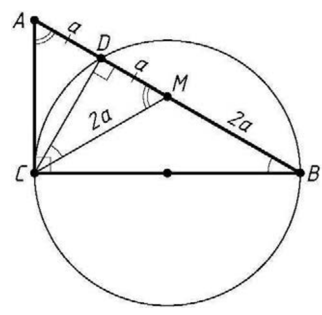
$$BK=\frac{AB\cdot BC}{AC}=\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad BM=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\cos\angle KBM=\frac{BK}{BM}=\frac{4}{5}.$$

1.5. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу в отношении $1:3$. Найдите острые углы треугольника.

Ответ: $30°$, $60°$.

Решение. Пусть окружность, построенная как на диаметре на катете BC прямоугольного треугольника ABC, пересекает гипотенузу AB в точке D, отличной от B, причём $AD=a$, $BD=3a$. Проведём медиану CM. Тогда $AM=CM=2a$, а так как точка D лежит на окружности с диаметром BC, то $\angle CDB=90°$.



В прямоугольном треугольнике CDM гипотенуза CM, равная $2a$, вдвое больше катета DM:

$$DM=AM-AD=2a-a=a.$$

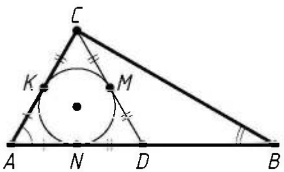
Поэтому $\angle DCM=30°$, а $\angle AMC=60°$. Угол при вершине M равнобедренного треугольника AMC равен $60°$. Следовательно, треугольник AMC равносторонний. Поэтому

$$\angle BAC=60°, \quad \angle ABC=90°-\angle BAC=30°.$$

1.6. Точка D — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Окружность, вписанная в треугольник ACD, касается отрезка CD в его середине. Найдите острые углы треугольника ABC.

Ответ: 30°, 60°.

Решение. Пусть указанная окружность касается отрезка CD в его середине M, а отрезков AD и AC — в точках N и K соответственно. Поскольку медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, то $AD = CD$. По свойству касательных, проведённых к окружности из одной точки,



$$AK = AN, \quad CK = CM,$$

$$DN = DM = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AD,$$

поэтому $AN = \frac{1}{2}AD$. Значит,

$$AC = AK + CK = AN + CM = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}CD = CD = AD.$$

Поэтому треугольник ACD равносторонний. Следовательно,

$$\angle BAC = \angle DAC = 60^\circ, \quad \angle ABC = 90^\circ - \angle BAC = 30^\circ.$$

1.7. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены биссектриса CL и медиана CM. Найдите площадь треугольника ABC, если $LM = a$, $CM = b$.

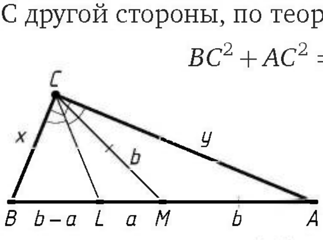
Ответ: $\dfrac{b^2(b^2 - a^2)}{a^2 + b^2}$.

Решение. Заметим, что $AM = MB = b$. Обозначим $BC = x$, $AC = y$. Пусть $x < y$. Тогда по свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{x}{y} = \frac{BL}{AL} = \frac{b-a}{b+a}.$$

С другой стороны, по теореме Пифагора

$$BC^2 + AC^2 = AB^2, \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = 4b^2.$$



Решив систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{b-a}{b+a}, \\ x^2 + y^2 = 4b^2, \end{cases}$$

получим, что $x = \sqrt{2}\dfrac{b(b-a)}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y = \sqrt{2}\dfrac{b(b+a)}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Следовательно,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}xy = \frac{b^2(b^2 - a^2)}{a^2 + b^2}.$$

1.8. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Найдите отрезок CN, если катеты равны 1 и 4.

Ответ: $\frac{4}{\sqrt{17}}$.

Решение. Пусть $AC = 4$, $BC = 1$. Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Прямоугольные треугольники ABC и DFC равны по двум катетам, поэтому

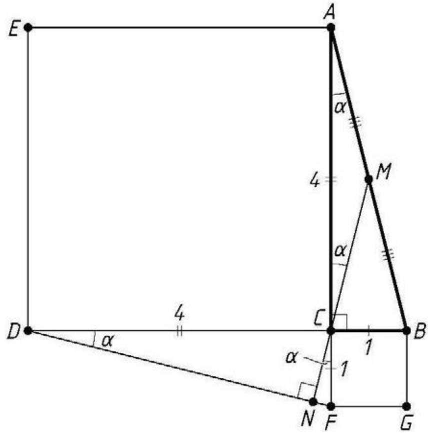
$$DF = AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{17}.$$

Медиана CM прямоугольного треугольника ABC, проведённая к гипотенузе AB, равна половине гипотенузы, поэтому

$$\angle NCF = \angle ACM = \angle BAC = \alpha,$$
$$\angle CNF = 180^\circ - \angle NCF - \angle CFN = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ,$$

т. е. CN — высота прямоугольного треугольника CDF, проведённая из вершины прямого угла C. Поскольку $CD \cdot CF = DF \cdot CN$ (удвоенная площадь треугольника CDF),

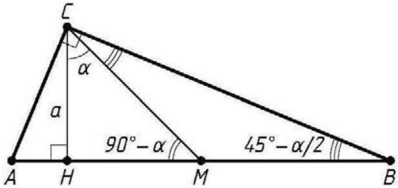
$$CN = \frac{CD \cdot CF}{DF} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$



1.9. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна a и образует угол α с медианой, проведённой из той же вершины. Найдите катеты треугольника.

Ответ: $\frac{a}{\sin\left(45^\circ \pm \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a\sqrt{2(1 \pm \sin\alpha)}}{\cos\alpha}$.

Решение. Пусть $CH = a$ — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины C прямого угла, CM — медиана этого треугольника, причём $\angle MCH = \alpha$.



Предположим, что $BC > AC$. Тогда точка M лежит между B и H. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, поэтому $BM = AM = CM$. Угол CMH — внешний угол равнобедренного треугольника CMB, значит,

$$\angle MBC = \frac{1}{2}\angle CMH = \frac{1}{2}(90^\circ - \alpha) = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно,

$$BC = \frac{CH}{\sin\angle HBC} = \frac{a}{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Аналогично находим, что

$$AC = \frac{CH}{\sin\angle HAC} = \frac{a}{\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

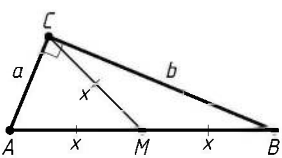
Тренировочные задачи

1.10. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами m и n. Найдите стороны треугольника.

Ответ: $\sqrt{2mn} - m$, $\sqrt{2mn} - n$, $n + m - \sqrt{2mn}$.

Решение. Пусть a и b — катеты треугольника, x — медиана, проведённая к гипотенузе. Тогда гипотенуза равна $2x$.

Предположим, что $a < b$. Тогда по условию задачи $2x + b = m$ и $2x + a = n$. Отсюда следует, что $b = a + m - n$. Поскольку $2x = \sqrt{a^2 + b^2}$, то



$$\begin{cases} b = a + m - n, \\ 2\sqrt{a^2 + b^2} + a + b = m + n. \end{cases}$$

Из этой системы находим, что

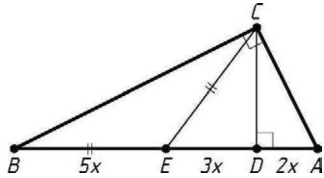
$$a = \sqrt{2mn} - m, \quad b = \sqrt{2mn} - n, \quad 2x = n + m - \sqrt{2mn}.$$

1.11. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведены высота CD и медиана CE. Площади треугольников ABC и CDE равны соответственно 10 и 3. Найдите AB.

Ответ: $5\sqrt{2}$.

Решение. Заметим, что

$$\frac{DE}{AB} = \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3}{10}.$$



Положим $DE = 3x$, $AB = 10x$. Тогда

$$CE = AE = BE = 5x,$$

$$CD = \sqrt{CE^2 - DE^2} = \sqrt{25x^2 - 9x^2} = 4x,$$

$$S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} DE \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 4x = 6x^2 = 3.$$

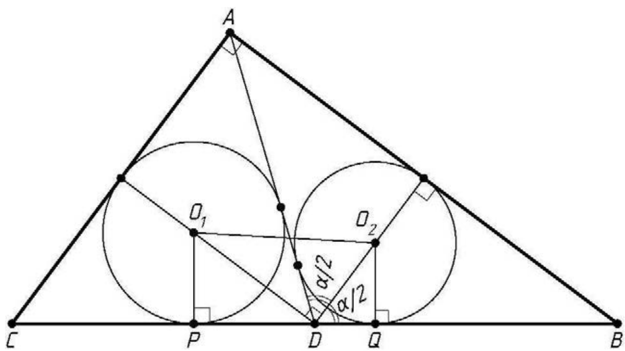
Поэтому

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow AB = 10x = 5\sqrt{2}.$$

1.12. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AB и AC равны 4 и 3 соответственно. Точка D делит гипотенузу BC пополам. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ADC и ABD.

Ответ: $\frac{5\sqrt{13}}{12}$.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ADC и ABD соответственно, P и Q — их точки касания со стороной BC. Обозначим $\angle ADB = \alpha$.



Из равнобедренного треугольника ADB находим, что

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}, \quad DQ = \frac{1}{2}(DB + AD + AB) - AB = \frac{1}{2}.$$

Аналогично находим, что $DP=1$. Тогда

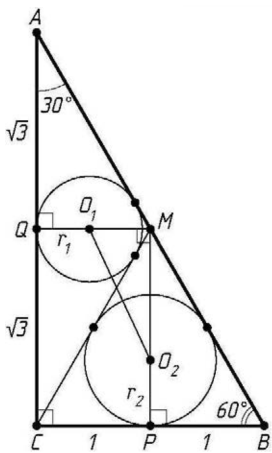
$$DO_2 = \frac{DQ}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{5}{6}, \quad DO_1 = \frac{DP}{\cos\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{DP}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{5}{4},$$

$$O_1O_2^2 = DO_1^2 + DO_2^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25\cdot 13}{144}.$$

Следовательно, $O_1O_2 = \dfrac{5\sqrt{13}}{12}$.

1.13. Катет прямоугольного треугольника равен 2, а противолежащий ему угол равен 30°. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники, на которые данный треугольник делится медианой, проведённой из вершины прямого угла.

Ответ: $2\sqrt{\dfrac{22-12\sqrt{3}}{3}}$.



Решение. Пусть M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, $\angle A=30^\circ$, $BC=2$, O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники AMC и BMC соответственно, r_1 и r_2 — радиусы этих окружностей. Тогда

$$AB = 2BC = 4, \quad CM = AM = BM = 2,$$
$$AC = BC\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

Треугольник BCM равносторонний, поэтому точка P касания его вписанной окружности со стороной BC — середина BC, MP — средняя линия треугольника ABC,

$$MP = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3}, \quad MO_2 = \frac{2}{3}MP = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Треугольник ACM равнобедренный, поэтому точка Q касания его вписанной окружности со стороной AC — середина AC, MQ — средняя линия треугольника ABC,

$$MQ = \frac{1}{2}BC = 1, \quad r_1 = O_1Q = \frac{S_{\Delta AMC}}{AM+AQ} = \frac{AQ\cdot MQ}{AM+AQ} = \frac{\sqrt{3}\cdot 1}{2+\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}-3,$$
$$MO_1 = MQ - O_1Q = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 4 - 2\sqrt{3}.$$

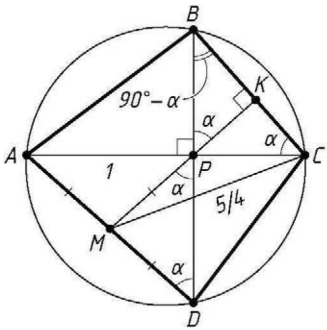
Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому MO_1 и MO_2 — биссектрисы смежных углов AMC и BMC, следовательно, $\angle O_1MO_2=90^\circ$, значит, O_1O_2 — гипотенуза прямоугольного треугольника O_1MO_2. По теореме Пифагора находим, что

$$O_1O_2 = \sqrt{MO_2^2 + MO_1^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 + (4-2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{\frac{22-12\sqrt{3}}{3}}.$$

1.14. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P. Отрезок, соединяющий вершину C с серединой M отрезка AD, равен $\frac{5}{4}$, $AP = 1$. Расстояние от точки P до отрезка BC равно $\frac{1}{2}$. Найдите AD, если известно, что вокруг четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{6}-2}{4}$.

Решение. Пусть прямая MP пересекает отрезок BC в точке K. Обозначим $\angle ADB = \angle ACB = \alpha$. Поскольку PM — медиана прямоугольного треугольника APD, проведённая из вершины прямого угла, то



$$PM = MA = MD,$$
$$\angle BPK = \angle DPM = \angle ADB = \alpha,$$

а так как $\angle CBP = 90^\circ - \alpha$, то

$$\angle BKP = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ,$$

т. е. $PK \perp BC$. Значит, $PK = \frac{1}{2}$.

Из прямоугольных треугольников APD и CKP находим, что

$$MP = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{AP}{\sin\alpha} = \frac{1}{2\sin\alpha}, \quad CK = KP\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha,$$

поэтому

$$MK = MP + KP = \frac{1}{2\sin\alpha} + \frac{1}{2}.$$

Применяя теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику MKC, получим уравнение

$$\left(\frac{1}{2\sin\alpha} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right)^2 = \frac{25}{16},$$

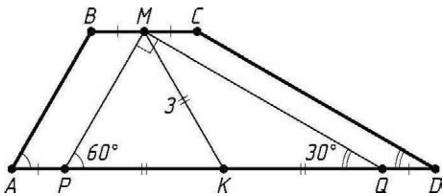
из которого находим, что $\dfrac{1}{\sin\alpha} = \dfrac{3\sqrt{6}-2}{4}$. Следовательно,

$$AD = \frac{AP}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{3\sqrt{6}-2}{4}.$$

1.15. Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60°. Найдите основания и меньшую боковую сторону трапеции.

Ответ: 8; 2; 3.

Решение. Через середину M меньшего основания BC трапеции $ABCD$ проведём прямую, параллельную боковой стороне AB, до пересечения с основанием AD в точке P и прямую, параллельную боковой стороне CD, до пересечения с прямой AD в точке Q.



Если K — середина AD, то

$$PK = AK - AP = AK - BM = DK - MC = DK - QD = KQ,$$

поэтому MK — медиана треугольника PMQ, а так как

$$\angle PMQ = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ,$$

то $PK = KQ = MK = 3$. Значит,

$$AD - BC = PQ = 6, \quad AD + BC = 10,$$

откуда находим, что $AD = 8$ и $BC = 2$.

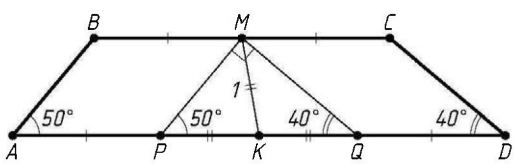
Пусть PM — катет прямоугольного треугольника PMQ, лежащий против угла в 30°. Тогда AB — меньшая боковая сторона трапеции $ABCD$ и

$$AB = PM = \frac{1}{2}PQ = 3.$$

1.16. Средняя линия трапеции равна 4, углы при одном из оснований равны 40° и 50°. Найдите основания трапеции, если отрезок, соединяющий середины оснований, равен 1.

Ответ: 5 и 3.

Решение. Пусть углы A и D при основании трапеции $ABCD$ равны 50° и 40° соответственно, M и K — середины оснований BC и AD.



Через точку M проведём прямую, параллельную AB, до пересечения с AD в точке P и прямую, параллельную CD, до пересечения с AD в точке Q. Тогда

$$PK = AK - AP = AK - BM = KD - CM = KD - QD = KQ.$$

Поскольку

$$\angle PMQ = 180^\circ - 40^\circ - 50^\circ = 90^\circ,$$

то MK — медиана прямоугольного треугольника PMQ, проведённая из вершины прямого угла PMQ. Следовательно, $PQ = 2MK = 2$.

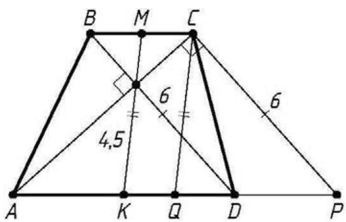
Поскольку

$$PQ = AD - AP - QD = AD - BM - MC = AD - BC,$$

то $AD - BC = 2$. Кроме того, по условию задачи $AD + BC = 8$. Из полученной системы уравнений находим, что $AD = 5$ и $BC = 3$.

1.17. Диагонали трапеции перпендикулярны. Одна из них равна 6. Отрезок, соединяющий середины оснований, равен 4,5. Найдите площадь трапеции.

Ответ: $9\sqrt{5}$.



Решение. Пусть M и K — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$. Через вершину C меньшего основания BC проведём прямую, параллельную диагонали BD ($BD = 6$), до пересечения с прямой AD в точке P и прямую, параллельную MK, до пересечения с прямой AD в точке Q. Тогда

$$AQ = AK + KQ = AK + MC = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AD + DP) = \frac{1}{2}AP.$$

Поэтому CQ — медиана треугольника ACP, а так как $\angle ACP = 90^\circ$, то $AQ = QP = CQ = MK = 4{,}5$. Поэтому $AP = 9$. Тогда

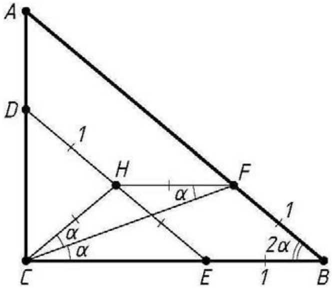
$$AC = \sqrt{AP^2 - CP^2} = \sqrt{81 - 36} = 3\sqrt{5}.$$

Следовательно,

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ACP} = \frac{1}{2}AC \cdot CP = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 6 = 9\sqrt{5}.$$

1.18. Прямая, параллельная гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, пересекает катет AC в точке D, а катет BC — в точке E, причём $DE = 2$, а $BE = 1$. На гипотенузе взята такая точка F, что $BF = 1$. Известно также, что $\angle FCB = \alpha$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: $\frac{1}{2}(1 + 2\cos 2\alpha)^2 \operatorname{tg} 2\alpha$.



Решение. Пусть H — середина DE. Тогда $HFBE$ — параллелограмм (даже ромб), так как $HE = BF$ и $HE \parallel BF$. Поэтому $HF = BE = 1$.

Поскольку $CH = \frac{1}{2}DE = 1$, треугольник CHF равнобедренный. Поэтому

$$\angle HCF = \angle HFC = \angle FCB = \alpha, \quad \angle HCB = 2\alpha.$$

Тогда

$$\angle B = \angle DEC = \angle HCB = 2\alpha.$$

Следовательно,

$$CE = DE\cos\angle DEC = 2\cos 2\alpha, \quad BC = CE + EB = 2\cos 2\alpha + 1,$$
$$AC = BC\,\mathrm{tg}\,\angle ABC = BC\,\mathrm{tg}\,2\alpha = (2\cos 2\alpha + 1)\,\mathrm{tg}\,2\alpha.$$

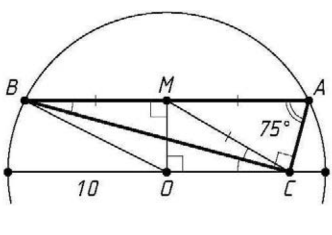
Таким образом,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC\cdot AC = \frac{1}{2}(2\cos 2\alpha + 1)^2\,\mathrm{tg}\,2\alpha.$$

1.19. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC является хордой окружности радиуса 10. Вершина C лежит на диаметре окружности, который параллелен гипотенузе. Угол CAB равен $75°$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: 40.

Решение. Из центра O данной окружности опустим перпендикуляр OM на гипотенузу AB. Тогда M — середина AB, $MC = MA = MB$.



Поэтому

$$\angle MCB = \angle ABC = 15°,$$
$$\angle BCO = \angle ABC = 15°.$$

Следовательно, $\angle MCO = 30°$.

Пусть $OM = x$. Из прямоугольного треугольника MCO находим, что $MC = 2x$. По теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике MOB имеем

$$OB^2 = OM^2 + MB^2, \quad \text{или} \quad 100 = x^2 + 4x^2.$$

Отсюда находим, что $x^2 = 20$. Следовательно,

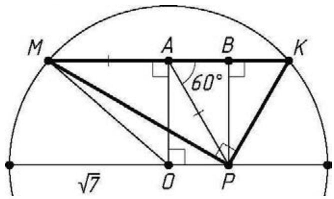
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot OM = \frac{1}{2}\cdot 4x\cdot x = 2x^2 = 40.$$

1.20. Гипотенуза KM прямоугольного треугольника KMP является хордой окружности радиуса $\sqrt{7}$. Вершина P находится на диаметре, который параллелен гипотенузе. Расстояние от центра окружности до гипотенузы равно $\sqrt{3}$. Найдите острые углы треугольника KMP.

Ответ: 30°, 60°.

Решение. Пусть O — центр данной окружности, OA — перпендикуляр к гипотенузе. Тогда A — середина гипотенузы. Из прямоугольного треугольника OMA по теореме Пифагора находим, что

$$AM^2 = OM^2 - OA^2 = 7 - 3 = 4.$$



Значит, $AP = AK = AM = 2$.

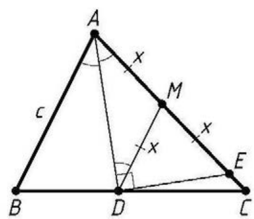
Пусть PB — высота треугольника KMP. Тогда $PB = OA = \sqrt{3}$. Поэтому

$$\sin\angle KAP = \frac{PB}{AP} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, $\angle KAP = 60^\circ$, т.е. треугольник KAP равносторонний, поэтому $\angle MKP = 60^\circ$.

1.21. В треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $AC = b$ $(b > c)$, AD — биссектриса. Через точку D проведена прямая, перпендикулярная AD и пересекающая AC в точке E. Найдите AE.

Ответ: $\frac{2bc}{b+c}$.

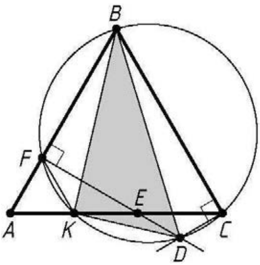


Решение. Пусть M — середина отрезка AE. Тогда DM — медиана прямоугольного треугольника ADE, проведённая из вершины прямого угла. Если $DM = x$, то $AM = ME = DM = x$, $\angle ADM = \angle DAM = \angle BAD$. Значит, $DM \parallel AB$ и треугольник MDC подобен треугольнику ABC, поэтому $\frac{MD}{AB} = \frac{CM}{AC}$, или $\frac{x}{c} = \frac{b-x}{b}$, откуда находим, что $x = \frac{bc}{b+c}$. Следовательно, $AE = 2x = \frac{2bc}{b+c}$.

1.22. Точка E лежит на стороне AC правильного треугольника ABC; точка K — середина отрезка AE. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно прямой AB, и прямая, проходящая через точку C перпендикулярно прямой BC, пересекаются в точке D. Найдите углы треугольника BKD.

Ответ: 90°, 30°, 60°.

Решение. Пусть F — основание перпендикуляра, опущенного из точки E на AB. Тогда FK — медиана прямоугольного треугольника AFE. Поэтому $\angle AKF = 60^\circ$ и $FK \parallel BC$.

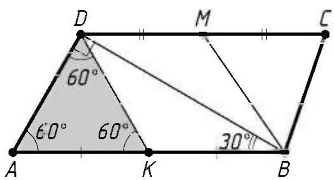


Опишем окружность около равнобедренной трапеции $BFKC$. Точка D принадлежит этой окружности, так как $\angle BFD + \angle BCD = 180^\circ$; BD — диаметр этой окружности, так как $\angle BCD = 90^\circ$. Следовательно,

$$\angle BKD = 90^\circ, \quad \angle BDK = \angle BCK = 60^\circ, \quad \angle KBD = 30^\circ.$$

1.23. В трапеции $ABCD$ точка K — середина основания AB, M — середина основания CD. Найдите площадь трапеции, если известно, что DK — биссектриса угла D, BM — биссектриса угла B, наибольший из углов при основании AB равен 60°, а периметр трапеции равен 30.

Ответ: $15\sqrt{3}$.



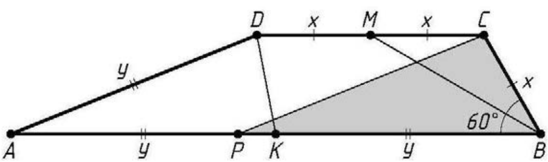
Решение. Пусть K — середина большего основания AB трапеции $ABCD$. Предположим, что $\angle DAB = 60^\circ$ (см. рисунок слева). Поскольку

$$\angle ADK = \angle KDC = \angle AKD,$$

то треугольник ADK равносторонний, $DK = AK = KB$. Поэтому $\angle ADB = 90^\circ$, а $\angle DBA = 30^\circ$. Но

$$\angle DBA < \angle MBA = \frac{1}{2}\angle ABC,$$

поэтому $\angle ABC > 60^\circ$, что невозможно. Следовательно, $\angle ABC = 60^\circ$ (см. рисунок ниже).



Обозначим $BC = MC = MD = x$, $AD = AK = KB = y$. Тогда $x + y = 10$. Проведём через вершину C прямую, параллельную AD, до пересечения с основанием AB в точке P. В треугольнике BCP известно, что

$$BC = x, \quad CP = AD = y, \quad BP = AB - AP = AB - DC = 2(y - x), \quad \angle CBP = 60^\circ.$$

По теореме косинусов

$$y^2 = x^2 + 4(y - x)^2 - 2x(y - x).$$

Из полученной системы

$$\begin{cases} x+y=10, \\ y^2=x^2+4(y-x)^2-2x(y-x) \end{cases}$$

находим, что $x=3$, $y=7$. Тогда высота трапеции равна $x\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Следовательно,

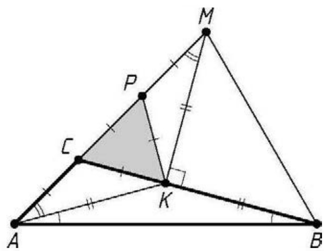
$$S_{ABCD}=(x+y)\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}.$$

1.24. В треугольнике ABC известны углы: $\angle A=45^\circ$, $\angle B=15^\circ$. На продолжении стороны AC за точку C взята точка M, причём $CM=2AC$. Найдите угол AMB.

Ответ: 75°.

Решение. Пусть P — середина отрезка CM. Тогда $AC=CP=PM$. Отметим на стороне CB точку K так, чтобы $CK=CA$. По теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle PCK=\angle CAB+\angle ABC=45^\circ+15^\circ=60^\circ.$$



Поэтому треугольник CPK равносторонний. Значит, $PC=PK=PM$. Следовательно, треугольник CKM прямоугольный и $\angle AMK=90^\circ-60^\circ=30^\circ$. Поскольку $\angle CAK=\angle CKA=30^\circ$, треугольник AKM равнобедренный, а так как $\angle KAB=\angle KBA=15^\circ$, то треугольник AKB также равнобедренный. Следовательно, $MK=AK=KB$ и треугольник MKB равнобедренный.

Поскольку $\angle MKB=\angle MKC=90^\circ$, то $\angle KMB=45^\circ$. Следовательно,

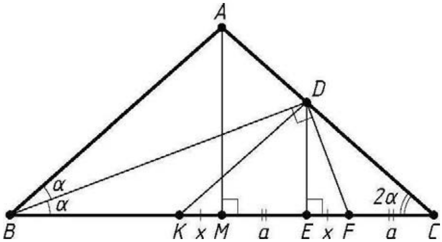
$$\angle AMB=\angle AMK+\angle KMB=30^\circ+45^\circ=75^\circ.$$

1.25. В треугольнике ABC известно, что $AB=AC$ и угол BAC тупой. Пусть BD — биссектриса треугольника ABC, M — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на сторону BC, E — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на сторону BC. Через точку D проведён также перпендикуляр к BD до пересечения со стороной BC в точке F. Известно, что $ME=FC=a$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: $\frac{25a^2\sqrt{7}}{12}$.

Решение. Обозначим $EF=x$, $\angle ACB=\angle ABC=2\alpha$. Пусть K — середина отрезка BF. Тогда DK — медиана прямоугольного треугольника BDF. Значит,

$$BK=KD=KF,\quad \angle DKC=2\angle DBK=2\alpha=\angle ACB.$$



Поэтому треугольник CDK равнобедренный. Его высота DE является медианой, значит,

$$KM + ME = EF + FC, \quad \text{или} \quad KM + a = x + a.$$

Следовательно, $KM = x$. Тогда

$$BK = KF = 2x + a, \quad BM = BK + KM = (2x + a) + x = 3x + a,$$
$$MC = ME + EF + FC = a + x + a = 2a + x,$$

а так как $BM = MC$, то $3x + a = 2a + x$. Отсюда находим, что $x = \frac{a}{2}$. Тогда

$$CD = DK = BK = 2x + a = a + a = 2a.$$

Из прямоугольного треугольника CED находим, что

$$\cos 2\alpha = \frac{CE}{CD} = \frac{x + a}{2a} = \frac{\frac{3a}{2}}{2a} = \frac{3}{4}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 2\alpha} - 1} = \sqrt{\frac{16}{9} - 1} = \frac{\sqrt{7}}{3},$$

$$AM = MC \operatorname{tg} 2\alpha = (2a + x) \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{5a}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{5a\sqrt{7}}{6}.$$

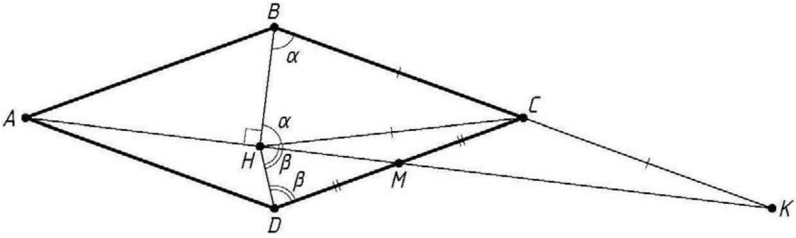
Следовательно,

$$S_{\triangle ABC} = MC \cdot AM = \frac{5a}{2} \cdot \frac{5a\sqrt{7}}{6} = \frac{25a^2\sqrt{7}}{12}.$$

1.26. Острый угол при вершине A ромба $ABCD$ равен $40°$. Через вершину A и середину M стороны CD проведена прямая, на которую опущен перпендикуляр BH из вершины B. Найдите угол AHD.

Ответ: $110°$.

Решение. Продолжим сторону BC до пересечения с прямой AM в точке K. Тогда $CK = AD = BC$, т. е. HC — медиана прямоугольного треугольника BHK, проведённая из вершины прямого угла. Поэтому



$HC = BC = CD$. Обозначим через α и β углы при основаниях BH и DH равнобедренных треугольников BCH и CDH соответственно. Тогда

$$\angle BHD = \alpha + \beta = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BCH + 90^\circ - \frac{1}{2}\angle DCH =$$
$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BCH + \angle DCH) = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BCD = 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ.$$

Следовательно,

$$\angle AHD = 360^\circ - \angle AHB - \angle BHD = 360^\circ - 90^\circ - 160^\circ = 110^\circ.$$

Задачи на доказательство и вычисление

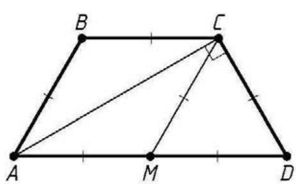
1.27.1. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$.

а) Докажите, что $AC \perp CD$.

б) Найдите углы трапеции.

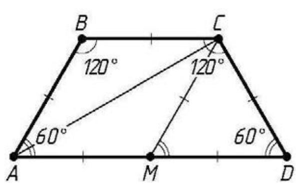
Ответ: 60°, 60°, 120°, 120°.

Решение. а) Пусть M — середина AD. Тогда $AM = \frac{1}{2}AD = BC$ и $AM \parallel BC$, поэтому четырёхугольник $ABCM$ — параллелограмм. Значит, $CM = AB = \frac{1}{2}AD$. Медиана CM треугольника ACD равна половине стороны AD. Следовательно, $\angle ACD = 90^\circ$.



б) Поскольку $CD = AB = CM = \frac{1}{2}AD = DM$, треугольник CMD равносторонний. Следовательно,

$$\angle ADC = \angle MDC = 60^\circ, \quad \angle BAD = \angle ADC = 60^\circ,$$
$$\angle BCD = \angle ABC = 180^\circ - \angle BAD = 120^\circ.$$

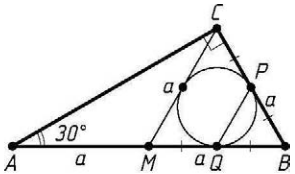


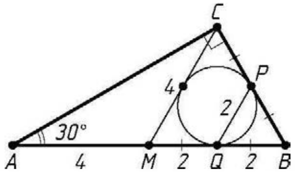
1.28.1. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC с углом 30° при вершине A. Окружность, вписанная в треугольник BMC, касается его сторон BC и BM в точках P и Q.

а) Докажите, что $PQ \parallel CM$.

б) Найдите PQ, если $AB = 8$.

Ответ: 2.





Решение. а) Медиана CM прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины C прямого угла, равна половине гипотенузы, поэтому $CM = BM = \frac{1}{2}AB = BC$. Значит, треугольник BMC равносторонний. Поэтому точки P и Q — середины BC и BM, а PQ — средняя линия треугольника BMC. Следовательно, $PQ \parallel CM$.

б) Средняя линия треугольника BMC равна половине стороны CM, поэтому

$$PQ = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}AB = \frac{1}{4}AB = 2.$$

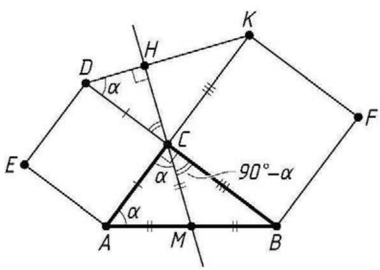
1.29.1. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB, H — точка пересечения прямых CM и DK.

а) Докажите, что $CM \perp DK$.

б) Найдите MH, если катеты треугольника ABC равны 30 и 40.

Ответ: 49.

Решение. а) Прямоугольные треугольники DCK и ACB равны по двум катетам. Обозначим $\angle CDK = \angle CAB = \alpha$. Отрезок CM — медиана прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины прямого угла, поэтому $AM = \frac{1}{2}AB = CM$. Значит,

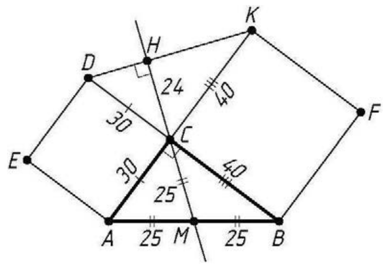


$$\angle ACM = \angle CAM = \alpha,$$
$$\angle DCH = \angle BCM = 90^\circ - \alpha.$$

Следовательно,

$$\angle CHD = 180^\circ - \angle CDH - \angle DCH = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ.$$

б) Пусть $AC = 30$, $BC = 40$. По теореме Пифагора находим, что $AB = 50$. Тогда $CM = \frac{1}{2}AB = 25$. Отрезок CH — высота прямоугольно-



го треугольника DKC, равного треугольнику ABC, проведённая из вершины прямого угла, поэтому

$$CH = \frac{CD \cdot CK}{DK} = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{30 \cdot 40}{50} = 24.$$

Следовательно,

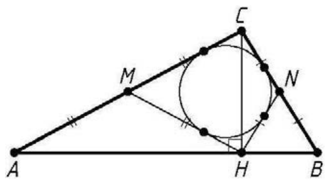
$$MH = CM + CH = 25 + 24 = 49.$$

1.30.1. Из вершины C тупого угла треугольника ABC проведена высота CH. Точку H соединили с серединами M и N сторон AC и BC.

а) Докажите, что в четырёхугольник $CMHN$ можно вписать окружность.

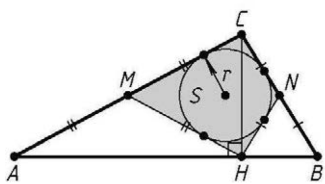
б) Найдите её радиус, если сумма сторон AC и BC равна 20, а площадь треугольника ABC равна 24.

Ответ: 1,2.



Решение. а) Медиана HM прямоугольного треугольника ACH равна половине его гипотенузы AC, т. е. $HM = \frac{1}{2}AC$. Аналогично $HN = \frac{1}{2}BC$. Поэтому

$$HM + HN = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC = CM + CN.$$



Суммы противоположных сторон четырёхугольника $CMHN$ равны, следовательно, в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

б) Пусть S — площадь четырёхугольника $CMHN$, p — его полупериметр, r — радиус вписанной окружности. Тогда

$$S = S_{\Delta CMH} + S_{\Delta CNH} = \frac{1}{2}S_{\Delta ACH} + \frac{1}{2}S_{\Delta BCH} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} = 12,$$

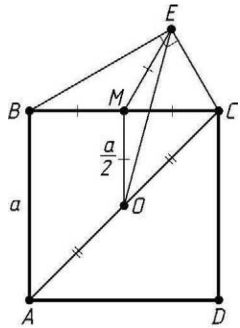
$$p = HM + HN = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AC + BC) = 10.$$

Следовательно, $r = \frac{S}{p} = \frac{12}{10} = 1{,}2$.

1.31.1. Точка E расположена вне квадрата $ABCD$ с центром O, причём треугольник BEC прямоугольный ($\angle E = 90^\circ$) и неравнобедренный. Точка M — середина стороны BC.

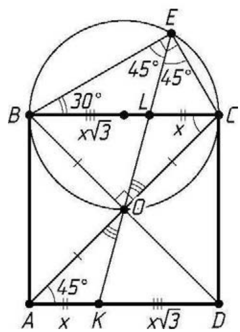
а) Докажите, что треугольник OME равнобедренный.

б) Прямая EO пересекает сторону AD квадрата в точке K. Найдите отношение $AK : KD$, если известно, что $\angle CBE = 30°$.



Ответ: $\sqrt{3} : 3$.

Решение. а) Отрезок EM — медиана прямоугольного треугольника BEC, проведённая из вершины прямого угла, поэтому $EM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB$. Отрезок OM — средняя линия треугольника ABC, поэтому $MO = \frac{1}{2}AB$. Значит, $EM = MO$. Следовательно, треугольник OME равнобедренный.



б) Из точек E и O отрезок BC виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром BC. Вписанные в эту окружность углы BEO и CEO опираются на равные хорды OB и OC, поэтому EO — биссектриса угла BEC.

Пусть L — точка пересечения отрезков EO и BC. Тогда EL — биссектриса треугольника BEC. По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{CL}{LB} = \frac{CE}{BE} = \operatorname{tg}\angle CBE = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Треугольник AOK равен треугольнику COL по стороне и прилежащим к ней углам, поэтому $AK = CL$. Аналогично $KD = LB$. Следовательно,

$$\frac{AK}{KD} = \frac{CL}{LB} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

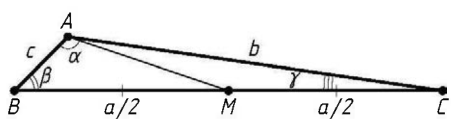
1.32.1. Две стороны треугольника равны 1 и 5, площадь треугольника равна 2. Медиана, проведённая к его третьей стороне, меньше её половины.

а) Докажите, что треугольник тупоугольный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

Решение. а) Пусть $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, $\angle A = \alpha$, AM — медиана треугольника ABC. В треугольнике AMB против боль-



шей стороны BM лежит больший угол, поэтому $\angle BAM > \angle ABM = \beta$. Аналогично $\angle CAM > \gamma$. Поэтому

$$\alpha = \angle BAM + \angle CAM > \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha.$$

Следовательно, $\alpha > 90^\circ$.

б) Пусть S — площадь треугольника, $c = 1$, $b = 5$. Тогда

$$S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 \cdot \sin\alpha,$$

откуда $\sin\alpha = \frac{2S}{5} = \frac{4}{5}$, а так как $\alpha > 90^\circ$, то

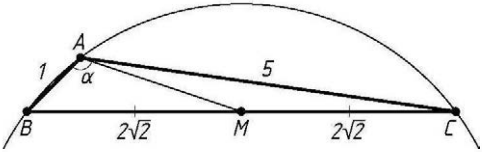
$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\frac{3}{5}.$$

По теореме косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = 25 + 1 + 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \frac{3}{5} = 32,$$

поэтому $a = 4\sqrt{2}$. Если R — радиус описанной окружности данного треугольника, то

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{4\sqrt{2}}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$



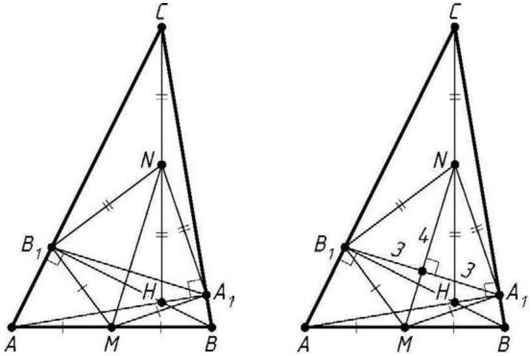
1.33.1. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки M и N — середины отрезков AB и CH соответственно.

а) Докажите, что треугольники A_1MB_1 и A_1NB_1 равнобедренные.

б) Найдите площадь четырёхугольника A_1MB_1N, если $A_1B_1 = 6$ и $MN = 4$.

Ответ: 12.

Решение. а) Медианы A_1N и B_1N прямоугольных треугольников A_1CH и B_1CH, проведённые из вершин прямых углов, равны половине общей гипотенузы CH. Поэтому $A_1N = \frac{1}{2}CH = B_1N$. Аналогично $A_1M = B_1M$.



б) Каждая из точек M и N равноудалена от концов отрезка A_1B_1. Значит, MN — серединный перпендикуляр к отрезку A_1B_1. Диагонали A_1B_1 и MN четырёхугольника A_1MB_1N перпендикулярны, поэтому его площадь равна половине произведения диагоналей. Следовательно,

$$S_{A_1MB_1N} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4 = 12.$$

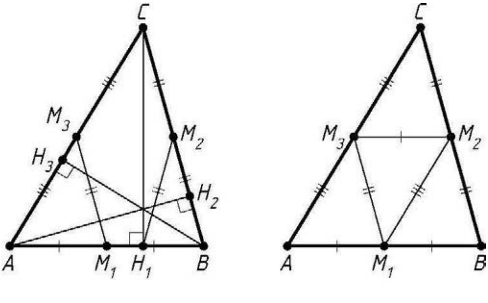
1.34.1. Дан треугольник ABC. Точки M_1, M_2, M_3 — середины сторон AB, BC и AC, а точки H_1, H_2, H_3 — основания высот, лежащие на тех же сторонах.

а) Докажите, что из отрезков H_1M_2, H_2M_3 и H_3M_1 можно построить треугольник.

б) Найдите его периметр, если периметр треугольника ABC равен a.

Ответ: $\frac{a}{2}$.

Решение. а) Указанные отрезки равны половинам сторон треугольника ABC (например, медиана H_1M_2 прямоугольного треугольника



BH_1C равна половине гипотенузы BC). Поэтому из них можно построить треугольник, стороны которого вдвое меньше соответствующих сторон треугольника ABC, т. е. треугольник, равный треугольнику $M_1M_2M_3$.

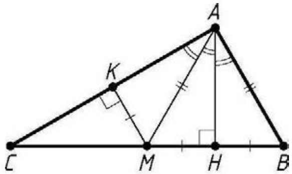
б) Стороны треугольника $M_1M_2M_3$ равны половинам соответствующих сторон треугольника ABC, следовательно, его периметр равен половине периметра треугольника ABC, т. е. $\frac{a}{2}$.

1.35.1. Высота AH и медиана AM треугольника ABC делят угол BAC треугольника ABC на три равные части, причём точка H лежит между B и M. Из точки M опущен перпендикуляр MK на сторону AC.

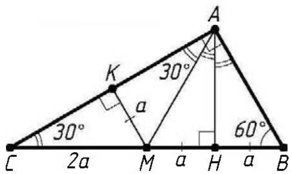
а) Докажите, что $MK = BH$.

б) Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: 30°, 60°, 90°.



Решение. а) Прямоугольные треугольники AKM и AHM равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $MK = MH$. Высота AH треугольника BAM является его биссектрисой, поэтому треугольник BAM равнобедренный. Значит, AH — его медиана, т. е. $MH = BH$. Следовательно, $MK = BH$.



б) Поскольку $MK = BH = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}MC$, в прямоугольном треугольнике MKC катет MK равен половине гипотенузы MC. Значит, $\angle MCK = 30^\circ$. Тогда

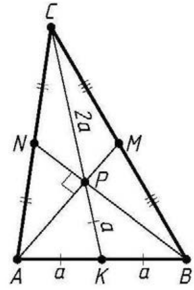
$$\angle CAH = 90^\circ - \angle MCK = 60^\circ, \quad \angle KAM = \frac{1}{2}\angle CAH = 30^\circ,$$
$$\angle BAC = 3\angle KAM = 90^\circ, \quad \angle ABC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

1.36.1. Медианы AM и BN треугольника ABC перпендикулярны и пересекаются в точке P.

а) Докажите, что $CP = AB$.

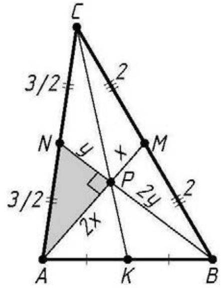
б) Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 3$ и $BC = 4$.

Ответ: $\sqrt{11}$.



Решение. а) Медиана CK треугольника ABC проходит через точку P и делится ею в отношении $CP : PK = 2 : 1$, поэтому $CP = 2PK$. В то же время отрезок PK — медиана прямоугольного треугольника APB, проведённая из вершины прямого угла, значит, $AB = 2PK$. Следовательно, $CP = AB$.

б) Обозначим $PM=x$, $PN=y$. Тогда $AP=2x$, $BP=2y$. По теореме Пифагора из прямоугольных треугольников ANP и BMP получаем



$$\begin{cases} 4x^2+y^2=\dfrac{9}{4} \\ x^2+4y^2=4. \end{cases}$$

Из полученной системы находим, что $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $y=\dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$. Поэтому

$$S_{\Delta APN}=\frac{1}{2}AP\cdot PN=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot y=xy=\frac{\sqrt{11}}{6},$$

а так как медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих треугольников (см. [2], с. 65), то

$$S_{\Delta ABC}=6S_{\Delta APN}=6\cdot\frac{\sqrt{11}}{6}=\sqrt{11}.$$

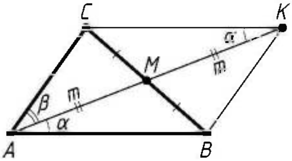
§ 2. Удвоение медианы

Подготовительные задачи

2.1. Медиана AM треугольника ABC равна m и образует со сторонами AB и AC углы α и β соответственно. Найдите эти стороны.

Ответ: $\frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Решение. На продолжении медианы AM за точку M отложим отрезок MK, равный AM. Тогда четырёхугольник $ABKC$ — параллелограмм, поэтому $\angle AKC = \angle BAM = \alpha$. Рассмотрим треугольник ACK. По теореме синусов



$$\frac{CK}{\sin\beta} = \frac{AK}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)},$$

откуда

$$AB = CK = \frac{AK\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Аналогично

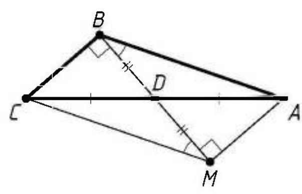
$$AC = \frac{AK\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

2.2. В треугольнике ABC известно, что BD — медиана, $BD = AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$, а $\angle DBC = 90^\circ$. Найдите угол ABD.

Ответ: 30°.

Решение. Пусть M — точка на продолжении медианы BD за точку D, причём $BD = DM$. Тогда $ABCM$ — параллелограмм,

$$MC = AB, \quad BM = 2BD = AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Из прямоугольного треугольника MBC находим, что

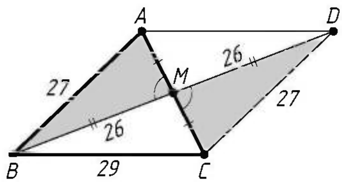
$$\cos\angle BMC = \frac{BM}{MC} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{AB}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно,

$$\angle BMC = 30^\circ, \quad \angle ABD = \angle BMC = 30^\circ.$$

2.3. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 27 и 29, а медиана, проведённая к третьей, равна 26.

Ответ: 270.



Решение. Пусть стороны AB и BC треугольника ABC равны соответственно 27 и 29, а его медиана BM равна 26. На продолжении медианы BM за точку M отложим отрезок MD, равный BM. Из равенства треугольников ABM и CDM следует равенство площадей треугольников ABC и BCD. В треугольнике BCD известно, что

$$BC = 29, \quad BD = 2BM = 52, \quad DC = AB = 27.$$

По формуле Герона

$$S_{\Delta BCD} = \sqrt{54(54-52)(54-29)(54-27)} = \sqrt{54\cdot2\cdot25\cdot27} = 27\cdot2\cdot5 = 270.$$

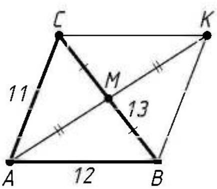
Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BCD} = 270.$$

2.4. Стороны треугольника равны 11, 13 и 12. Найдите медиану, проведённую к большей стороне.

Ответ: $\frac{19}{2}$.

Решение. Пусть AM — медиана треугольника ABC, в котором $AB = 12$, $AC = 11$, $BC = 13$. На продолжении медианы AM за точку M отложим отрезок MK, равный AM. Тогда $ABKC$ — параллелограмм. По теореме о сумме квадратов диагоналей параллелограмма



$$AK^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2,$$

откуда

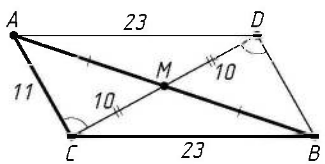
$$AK^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2 = 288 + 242 - 169 = 361 = 19^2.$$

Следовательно, $AM = \frac{1}{2}AK = \frac{19}{2}$.

2.5. В треугольнике две стороны равны 11 и 23, а медиана, проведённая к третьей, равна 10. Найдите третью сторону.

Ответ: 30.

Решение. Первый способ. Пусть CM — медиана треугольника ABC, в котором $AC = 11$, $BC = 23$, $CM = 10$. Тогда



$$CM^2 = \frac{1}{4}(2AC^2 + 2BC^2 - AB^2), \quad \text{или}$$

$$100 = \frac{1}{4}(2\cdot121 + 2\cdot529 - AB^2).$$

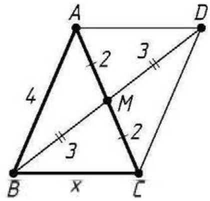
Отсюда находим, что $AB^2 = 900$, $AB = 30$.

Второй способ. Пусть CM — медиана треугольника ABC, в котором $AC=11$, $BC=23$, $CM=10$. На продолжении медианы CM за точку M отложим отрезок MD, равный CM. Тогда $ACBD$ — параллелограмм, $CD=20$, $DB=11$. По теореме косинусов найдём $\cos\angle CDB$ из треугольника CDB, а затем — отрезок BM из треугольника BDM.

2.6. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной 4, проведена медиана к боковой стороне. Найдите основание треугольника, если медиана равна 3.

Ответ: $\sqrt{10}$.

Решение. Обозначим через x основание BC равнобедренного треугольника ABC. На продолжении медианы BM за точку M отложим отрезок DM, равный BM. Тогда $BADC$ — параллелограмм. Поэтому



$$AC^2+BD^2=2(AB^2+BC^2),\quad\text{или}$$

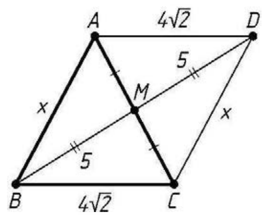
$$16+36=2\cdot16+2x^2.$$

Отсюда находим, что $x^2=10$.

2.7. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$, а медиана, проведённая к боковой стороне, равна 5. Найдите боковые стороны.

Ответ: 6.

Решение. Обозначим через x боковую сторону AB равнобедренного треугольника ABC ($BC=4\sqrt{2}$). На продолжении медианы BM за точку M отложим отрезок DM, равный BM. Тогда $BADC$ — параллелограмм. Поэтому



$$AC^2+BD^2=2(AB^2+BC^2),\quad\text{или}$$

$$x^2+10^2=2(4\sqrt{2})^2+2x^2.$$

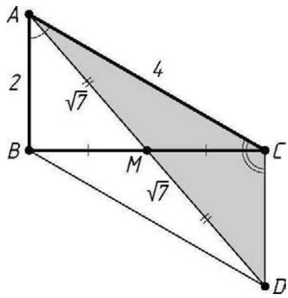
Отсюда находим, что $x^2=36$.

2.8. В треугольнике ABC известны стороны $AB=2$ и $AC=4$ и медиана $AM=\sqrt{7}$. Найдите угол BAC.

Ответ: 60°.

Решение. На продолжении медианы AM данного треугольника ABC со сторонами $AB=2$ и $AC=4$ отложим отрезок MD, равный отрезку AM. Тогда четырёхугольник $ABDC$ — параллелограмм, поэтому $CD=AB=2$. Применяя теорему косинусов, из треугольника ACD находим, что

$$\cos\angle ACD=\frac{AC^2+CD^2-AD^2}{2\cdot AC\cdot CD}=\frac{16+4-4\cdot7}{2\cdot4\cdot2}=-\frac{1}{2},$$



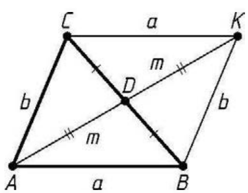
поэтому $\angle ACD = 120^\circ$. Следовательно,

$$\angle BAC = 180^\circ - \angle ACD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

2.9. В треугольнике ABC отрезок AD — медиана, $AD = m$, $AB = a$, $AC = b$. Найдите угол BAC.

Ответ: $\arccos \dfrac{4m^2 - a^2 - b^2}{2ab}$.

Решение. На продолжении медианы AD за точку D отложим отрезок DK, равный AD. Диагонали BC и AK четырёхугольника $ACKB$ делятся точкой пересечения D пополам, значит, $ACKB$ — параллелограмм. Поэтому $CK = AB = a$.



Применив теорему косинусов к треугольнику ACK, находим, что

$$\cos\angle ACK = \frac{AC^2 + CK^2 - AK^2}{2 \cdot AC \cdot CK} = \frac{b^2 + a^2 - 4m^2}{2ba}.$$

Так как $\angle BAC = 180^\circ - \angle ACK$, то

$$\cos\angle BAC = -\cos\angle ACK = \frac{4m^2 - a^2 - b^2}{2ab}.$$

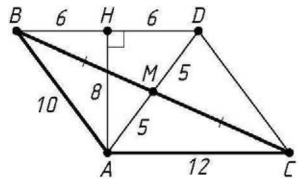
Следовательно, $\angle BAC = \arccos \dfrac{4m^2 - a^2 - b^2}{2ab}$.

Тренировочные задачи

2.10. Две стороны треугольника равны 10 и 12, а медиана, проведённая к третьей, равна 5. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 48.

Решение. Пусть AM — медиана треугольника ABC, причём $AM = 5$, $AB = 10$, $AC = 12$. На продолжении медианы AM за точку M отложим отрезок MD, равный AM. Тогда $ABDC$ — параллелограмм с диагоналями BC и AD, а площадь треугольника ABC равна площади равно-



бедренного треугольника ABD, в котором $AB = AD = 10$, $BD = 12$. Высоту AH треугольника ABD находим по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABH:

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{100 - 36} = 8.$$

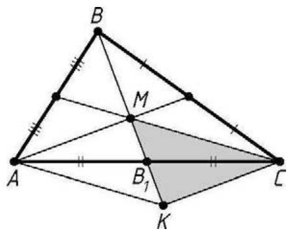
Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} BD \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48.$$

2.11. Найдите площадь треугольника, медианы которого равны 3, 4 и 5.

Ответ: 8.

Решение. Пусть B_1 — середина стороны AC треугольника ABC, M — точка пересечения его медиан. На продолжении медианы BB_1 за точку B_1 отложим отрезок B_1K, равный MB_1. Тогда $AMCK$ — параллелограмм, $CK = AM$.



Стороны треугольника KMC составляют $\frac{2}{3}$ соответствующих медиан треугольника ABC. Поэтому треугольник KMC подобен с коэффициентом $\frac{2}{3}$ треугольнику, стороны которого равны медианам треугольника ABC. Тогда площадь треугольника KMC составляет $\frac{4}{9}$ площади треугольника со сторонами 3, 4, 5, т. е. $\frac{4}{9} \cdot 6 = \frac{8}{3}$. Следовательно,

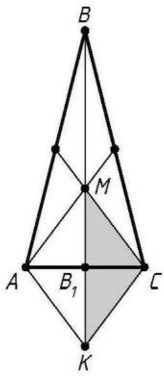
$$S_{\Delta ABC} = 6S_{\Delta B_1MC} = 6 \cdot \frac{1}{2} S_{\Delta KMC} = 8.$$

2.12. Найдите площадь треугольника, медианы которого равны 10, 10 и 16.

Ответ: 64.

Решение. Пусть B_1 — середина основания AC треугольника ABC, M — точка пересечения его медиан. На продолжении медианы BB_1 за точку B_1 отложим отрезок B_1K, равный MB_1. Тогда $AMCK$ — параллелограмм, $CK = AM$.

Стороны треугольника KMC составляют $\frac{2}{3}$ соответствующих медиан треугольника ABC. Поэтому треугольник KMC подобен с коэф-



фициентом $\frac{2}{3}$ треугольнику, стороны которого равны медианам треугольника ABC. Тогда площадь треугольника KMC составляет $\frac{4}{9}$ площади равнобедренного треугольника со сторонами 10, 10, 16, т. е.

$$S_{\Delta KMC} = \frac{4}{9} \cdot 48 = \frac{64}{3}.$$

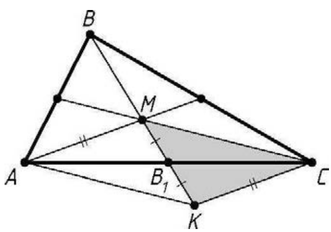
Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = 6S_{\Delta B_1MC} = 6 \cdot \frac{1}{2} S_{\Delta KMC} = 3 \cdot \frac{64}{3} = 64.$$

2.13. Найдите площадь треугольника, медианы которого равны 12, 15 и 21.

Ответ: $48\sqrt{6}$.

Решение. Пусть площадь треугольника ABC равна S. Докажем, что площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника ABC, равна $\frac{3}{4}S$.



Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, B_1 — середина стороны AC. Отложим на продолжении медианы BB_1 за точку B_1 отрезок B_1K, равный B_1M. Поскольку $AMCK$ — параллелограмм, $KC = AM$. Поэтому стороны треугольника MCK равны $\frac{2}{3}$ сторон треугольника, составленного из медиан треугольника ABC.

Следовательно, искомый треугольник подобен треугольнику MCK с коэффициентом $\frac{3}{2}$, а его площадь равна $\frac{9}{4}$ площади треугольника MCK, т. е.

$$S_1 = \frac{9}{4} \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} S = \frac{3}{4} S.$$

Площадь S_1 треугольника со сторонами 12, 15 и 21 найдём по формуле Герона:

$$S_1 = \sqrt{24 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 3} = 36\sqrt{6}.$$

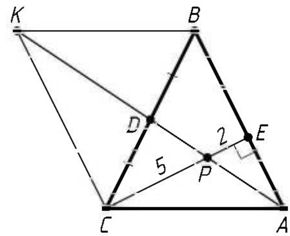
Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = S = \frac{4}{3} S_1 = \frac{4}{3} \cdot 36\sqrt{6} = 48\sqrt{6}.$$

2.14. Медиана AD и высота CE равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $CP = 5$, $PE = 2$.

Ответ: $\frac{245}{8}$.

Решение. На продолжении медианы AD за точку D отложим отрезок DK, равный AD. Тогда четырёхугольник $ABKC$ — параллелограмм, так как его диагонали AK и BC делятся точкой пересечения D пополам.



Пусть $AB = BC = 2x$. Тогда $CK = AB = 2x$. Треугольник APE подобен треугольнику KPC (по двум углам), поэтому

$$AE = CK \cdot \frac{PE}{PC} = \frac{2}{5} \cdot 2x = \frac{4}{5}x,$$

$$BE = AB - AE = 2x - \frac{4}{5}x = \frac{6}{5}x.$$

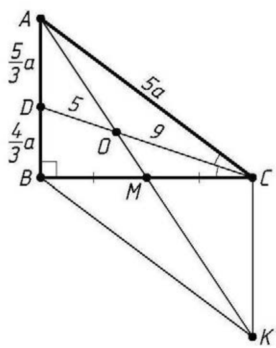
По теореме Пифагора $BC^2 = BE^2 + CE^2$, или $4x^2 = \frac{36}{25}x^2 + 49$, откуда находим, что $x = \frac{35}{8}$. Следовательно,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CE = x \cdot 7 = \frac{35}{8} \cdot 7 = \frac{245}{8}.$$

2.15. Медиана AM и биссектриса CD прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$) пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если $CO = 9$, $OD = 5$.

Ответ: $\frac{1323}{20}$.

Решение. На продолжении медианы AM за точку M отложим отрезок MK, равный AM. Тогда четырёхугольник $ABKC$ параллелограмм, так как его диагонали BC и AK делятся точкой пересечения M пополам. Положим $AB = 3a$. Треугольник AOD подобен треугольнику KOC (по двум углам), значит,



$$AD = KC \cdot \frac{OD}{OC} = AB \cdot \frac{OD}{OC} = AB \cdot \frac{5}{9} = 3a\frac{5}{9} = \frac{5}{3}a,$$

$$BD = AB - AD = 3a - \frac{5}{3}a = \frac{4}{3}a.$$

По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD} = \frac{\frac{4}{3}a}{\frac{5}{3}a} = \frac{4}{5},$$

а так как $AB = 3a$, то $AC = 5a$ и $BC = 4a$. По теореме Пифагора

$$BC^2 + BD^2 = CD^2, \quad 16a^2 + \left(\frac{4}{3}a\right)^2 = 14^2,$$

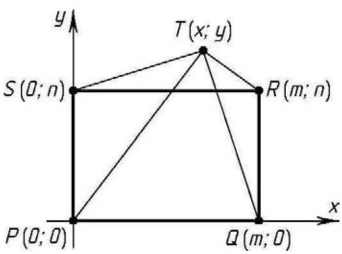
откуда находим, что $a^2 = \frac{49 \cdot 9}{4 \cdot 10}$. Следовательно,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot 3a = 6a^2 = 6 \cdot \frac{49 \cdot 9}{4 \cdot 10} = \frac{1323}{20}.$$

2.16. Внутри прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C отмечена точка O, причём $OA = OB = b$. Известно также, что CD — высота треугольника ABC, точка E — середина отрезка OC, $DE = a$. Найдите CE.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{2b^2 - 4a^2}$.

Решение. Докажем сначала следующее утверждение. Сумма квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до двух противоположных вершин прямоугольника равна сумме квадратов расстояний от этой точки до двух других вершин прямоугольника.



Введём декартову прямоугольную систему координат. Поместим начало координат в вершину P прямоугольника $PQRS$, а оси координат направим по лучам PQ и PS. Пусть $PQ = m$, $PS = n$. Тогда вершины прямоугольника будут иметь следующие координаты:

$$P(0; 0), \quad Q(m; 0), \quad R(m; n), \quad S(0; n).$$

Пусть $T(x; y)$ — произвольная точка плоскости. По формуле для квадрата расстояния между двумя точками

$$TP^2 + TR^2 = (x^2 + y^2) + ((x - m)^2 + (y - n)^2),$$
$$TQ^2 + TS^2 = ((x - m)^2 + y^2) + (x^2 + (y - n)^2).$$

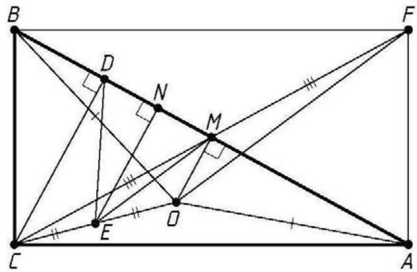
Из полученных равенств следует, что

$$TP^2 + TR^2 = TQ^2 + TS^2.$$

Утверждение доказано.

Пусть M и N — проекции точек соответственно O и E на гипотенузу AB. Заметим, что M — середина AB.

Поскольку $EN \parallel OM \parallel CD$ и E — середина OC, то EN — средняя линия трапеции $COMD$, поэтому N — середина отрезка MD. Высота EN треугольника DEM является его медианой, поэтому треугольник DEM равнобедренный. Следовательно, $EM = ED = a$.



На продолжении отрезка CM за точку M отложим отрезок MF, равный CM. Тогда $ACBF$ — прямоугольник, EM — средняя линия треугольника COF, $OF = 2 \cdot EM = 2a$.

Таким образом, нам известны расстояния от точки O до трёх вершин прямоугольника $ACBF$. По доказанному утверждению $OC^2 + OF^2 = OA^2 + OB^2$, поэтому

$$OC^2 = OA^2 + OB^2 - OF^2 = b^2 + b^2 - 4a^2 = 2b^2 - 4a^2.$$

Следовательно, $CE = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 - 4a^2}$.

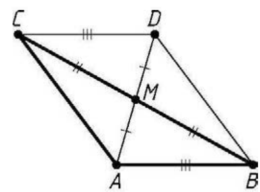
Задачи на доказательство и вычисление

2.17.1. Медиана AM треугольника ABC продолжена за точку M на расстояние $MD = AM$.

а) Докажите, что $CD = AB$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 10$, $AC = 12$, $AM = 5$.

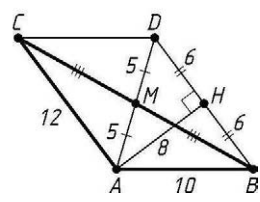
Ответ: 48.



Решение. а) Диагонали AD и BC четырёхугольника $ABDC$ точкой пересечения делятся пополам, значит, $ABDC$ — параллелограмм. Противоположные стороны параллелограмма равны, поэтому $CD = AB$.

б) Поскольку $AD = 10 = AB$, треугольник ABD равнобедренный. Его высота AH является медианой, поэтому

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{100 - 36} = 8.$$



Следовательно,

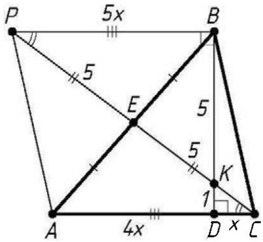
$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48.$$

2.18.1. В треугольнике ABC высота BD равна 6, медиана CE равна 5, расстояние от точки пересечения отрезков BD и CE до стороны AC равно 1.

а) Докажите, что $CD : AD = 1 : 4$.

б) Найдите площадь треугольника AEC.

Ответ: 10.



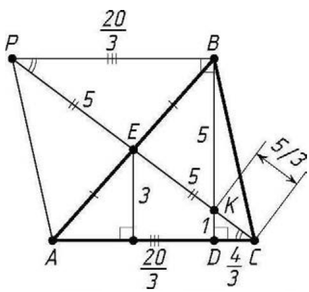
Решение. а) На продолжении медианы CE за точку E отложим отрезок $EP = CE$. Тогда $ACBP$ — параллелограмм. Поэтому $BP = AC$ и $BP \parallel AC$.

Пусть K — точка пересечения отрезков BD и CE. Из подобия треугольников PKB и CKD следует, что

$$DC = \frac{1}{5}BP = \frac{1}{5}AC.$$

Значит, $CD : AD = 1 : 4$.

б) Из подобия треугольников PKB и CKD также следует, что $CK = \frac{1}{5}PK$, поэтому



$$CK = \frac{1}{6}CP = \frac{1}{6} \cdot 10 = \frac{5}{3}.$$

Из прямоугольного треугольника KDC находим, что

$$DC = \sqrt{KC^2 - KD^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1} = \frac{4}{3}.$$

Поэтому $AC = 5DC = \frac{20}{3}$, а так как высота треугольника AEC, опущенная на основание AC, вдвое меньше высоты BD треугольника ABC, опущенной на то же основание, то

$$S_{\triangle AEC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}BD \cdot AC = \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot \frac{20}{3} = 10.$$

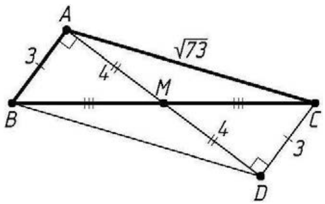
2.19.1. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 3$, $AC = \sqrt{73}$ и медианой $AM = 4$.

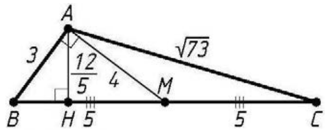
а) Докажите, что медиана AM перпендикулярна стороне AB.

б) Найдите высоту треугольника ABC, проведённую из вершины A.

Ответ: 2,4.

Решение. а) На продолжении медианы AM за точку M отложим отрезок $MD = AM = 4$. Тогда $ABDC$ — параллелограмм. Поэтому $CD = AB = 3$ и $CD \parallel AB$. Треугольник ACD прямоугольный с прямым углом при вершине D, так как $AC^2 = 73 = 64 + 9 = AD^2 + CD^2$. Следовательно, $\angle BAM = \angle ADC = 90^\circ$.





б) Пусть AH — высота треугольника ABC. Из прямоугольного треугольника AMB находим, что $BM = 5$. Следовательно,

$$AH = \frac{AB \cdot AM}{BM} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

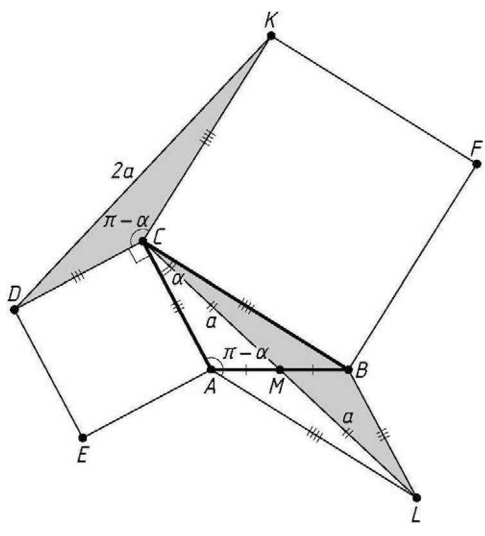
2.20.1. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB.

а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2}DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 6$, $BC = 10$ и $\angle ACB = 30^\circ$.

Ответ: 7.

Решение. а) Обозначим $\angle ACB = \alpha$. Отложим на продолжении медианы CM за точку M отрезок $ML = CM$. Тогда четырёхугольник $ACBL$ —



параллелограмм, поэтому

$$CD = AC = BL, \quad CK = BC, \quad \angle CBL = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \alpha,$$
$$\angle DCK = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha = \angle CBL,$$

значит, треугольники DCK и LBC равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $CL = DK$. Следовательно, $CM = \frac{1}{2}CL = \frac{1}{2}DK$.

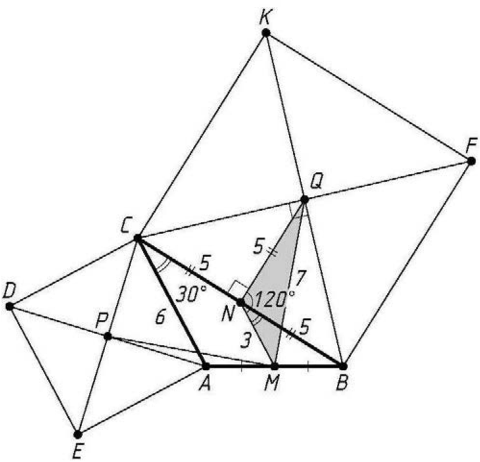
б) Пусть P и Q — центры квадратов $ACDE$ и $BFKC$ соответственно, N — середина стороны BC. В треугольнике MNQ известно, что

$$NM = \frac{1}{2}AC = 3, \quad NQ = \frac{1}{2}CK = 5, \quad \angle MNQ = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ.$$

По теореме косинусов

$$MQ = \sqrt{NM^2 + NQ^2 - 2NM \cdot NQ \cos 120^\circ} = \sqrt{9 + 25 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}} = 7.$$

Аналогично находим, что $MP = 7$.



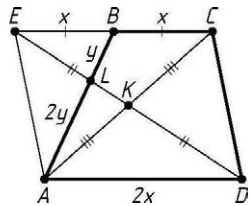
2.21.1. В трапеции $ABCD$ основания BC и AD относятся как $1:2$. Пусть K — середина диагонали AC. Прямая DK пересекает сторону AB в точке L.

а) Докажите, что $AL = 2BL$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $BCKL$, если известно, что площадь трапеции $ABCD$ равна 9.

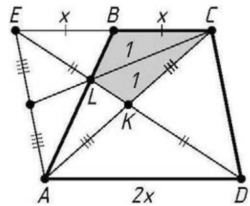
Ответ: 2.

а) Отложим на продолжении отрезка DK за точку K отрезок $KE = DK$. Тогда четырёхугольник $ADCE$ — параллелограмм, поэтому



$BE \parallel AD$. Значит, точка B лежит на отрезке CE. Поскольку $CE = AD = 2BC$, точка B — середина стороны CE треугольника ACE, а L — точка пересечения медиан этого треугольника. Следовательно, $AL = 2BL$.

б) Заметим, что площадь треугольника ACD составляет $\frac{2}{3}$ площади трапеции, значит, $S_{\triangle ACD} = 6$.



Поскольку третья медиана треугольника ACE проходит через точку L, а медианы треугольника разбивают его на 6 равновеликих треугольников, то

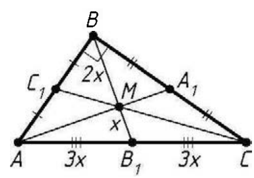
$$S_{BCKL} = S_{\triangle BCL} + S_{\triangle KCL} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACE} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD} = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2.$$

2.22.1. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если $AC = 30$.

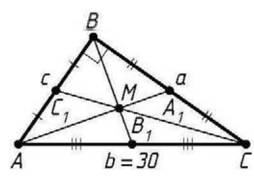
Ответ: 1125.



Решение. а) Медианы треугольника делятся точкой их пересечения в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника, поэтому

$$BB_1 = \frac{3}{2} MB = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} AC = \frac{1}{2} AC.$$

Медиана BB_1 треугольника ABC равна половине стороны AC, значит, треугольник ABC прямоугольный с прямым углом при вершине B.



б) Обозначим $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. По формуле для медианы треугольника (см. [2], с. 16) находим, что

$$AA_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2), \qquad CC_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2a^2 - c^2),$$

поэтому

$$AA_1^2 + CC_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2b^2 + 2a^2 - c^2) =$$

$$= \frac{1}{4}(a^2 + c^2 + 4b^2) = \frac{1}{4}(b^2 + 4b^2) = \frac{5}{4} b^2 = \frac{5}{4} \cdot 900 = 1125.$$

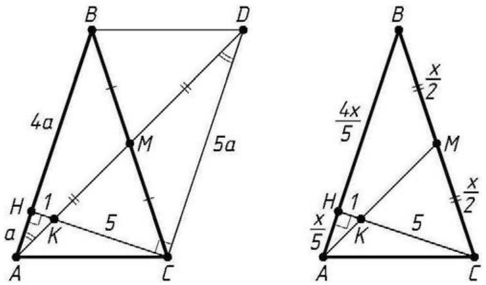
2.23.1. Медиана AM и высота CH равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке K. Известно, что $CK = 5$, $KH = 1$.

а) Докажите, что $AH : BH = 1 : 4$.

б) Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: 30.

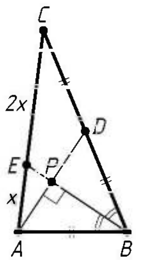
Решение. а) Отложим на продолжении медианы AM за точку M отрезок $MD = AM$. Тогда четырёхугольник $ABDC$ — параллелограмм, поэтому $CD \parallel AD$ и $CD = AB$. Треугольник AKH подобен треугольнику DKC с коэффициентом $\frac{1}{5}$, поэтому $AH = \frac{1}{5}CD = \frac{1}{5}AB$. Следовательно, $\frac{AH}{BH} = \frac{1}{4}$.



б) Обозначим $AB = BC = x$. Тогда $AH = \frac{1}{5}x$, $BH = \frac{4}{5}x$. По теореме Пифагора $CH^2 + BH^2 = BC^2$, или $36 + \frac{16}{25}x^2 = x^2$. Отсюда находим, что $x = 10$. Следовательно,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 = 30.$$

2.24.1. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны.



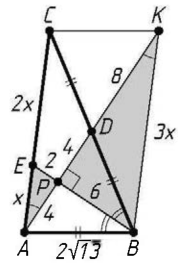
а) Докажите, что $CE = 2AE$.

б) Найдите стороны треугольника ABC, если $BE = AD = 8$.

Ответ: $2\sqrt{13}$, $4\sqrt{13}$, $6\sqrt{5}$.

Решение. а) Пусть P — точка пересечения отрезков BE и AD. Треугольник ABD равнобедренный, так как его биссектриса BP является высотой. Значит, $BC = 2BD = 2AB$. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{CE}{AE} = \frac{BC}{AB} = 2$. Следовательно, $CE = 2AE$.

б) Отложим на продолжении медианы AD за точку D отрезок $DK = AD$. Тогда четырёхугольник $ABKC$ — параллелограмм, поэтому $BK \parallel AC$ и $BK = AC = 3AE$.



Из подобия треугольников APE и KPB следует, что

$$\frac{PE}{BP} = \frac{AE}{BK} = \frac{1}{3}.$$

Поэтому $PE = 2$ и $BP = 6$. Следовательно,

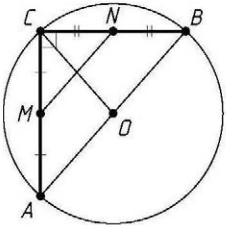
$$AB = \sqrt{AP^2 + BP^2} = \sqrt{16+36} = 2\sqrt{13}, \quad BC = 2AB = 4\sqrt{13},$$

$$AE = \sqrt{AP^2 + EP^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}, \quad AC = 3AE = 6\sqrt{5}.$$

§ 3. Параллелограмм. Средняя линия треугольника

Подготовительные задачи

3.1. Расстояние между серединами взаимно перпендикулярных хорд AC и BC некоторой окружности равно 10. Найдите диаметр окружности.



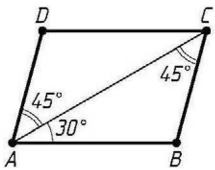
Ответ: 20.

Решение. Пусть M и N — середины данных хорд AC и BC. Поскольку MN — средняя линия треугольника ABC, то $AB = 2MN = 20$, а так как отрезок AB виден из точки C под прямым углом, то AB — диаметр окружности.

3.2. Диагональ параллелограмма делит его угол на части в 30° и 45°. Найдите отношение сторон параллелограмма.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Решение. Пусть диагональ AC параллелограмма $ABCD$ делит угол при вершине A на два угла: $\angle BAC = 30^\circ$ и $\angle DAC = 45^\circ$. Тогда

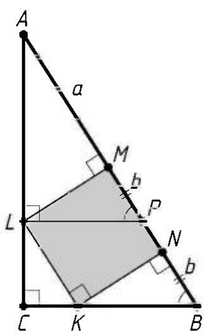


$$\angle ACB = \angle DAC = 45^\circ.$$

Применяя теорему синусов к треугольнику ABC, найдём, что

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle BAC} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \sqrt{2}.$$

3.3. Вершины M и N квадрата $KLMN$ лежат на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC (N между B и M), а вершины K и L — на катетах BC и AC соответственно. Известно, что $AM = a$ и $BN = b$. Найдите площадь квадрата.



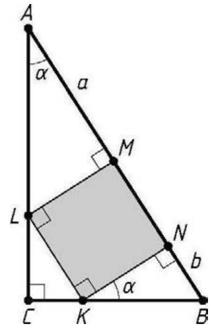
Ответ: ab.

Решение. *Первый способ*. Через точку L проведём прямую, параллельную BC, до пересечения с гипотенузой AB в точке P. Из равенства прямоугольных треугольников BNK и PML следует, что $PM = BN = b$.

Сторона LM указанного квадрата есть высота прямоугольного треугольника APL, проведённая из вершины прямого угла. Поэтому

$$LM^2 = PM \cdot AM = ab.$$

Следовательно, площадь квадрата $KLMN$ равна ab.



Второй способ. Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle BKN = \alpha$. Из прямоугольных треугольников ALM и NKB находим, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ML}{AM}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{BN}{KN},$$

поэтому

$$\frac{ML}{AM} = \frac{BN}{KN} = \frac{BN}{ML}, \quad ML^2 = AM \cdot BN.$$

Следовательно,

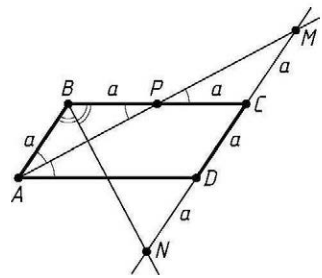
$$S_{KLMN} = ML^2 = AM \cdot BN = ab.$$

3.4. Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Биссектрисы углов A и B пересекают прямую CD в точках M и N, причём $MN = 12$. Найдите стороны параллелограмма.

Ответ: 4, 8, 4, 8.

Решение. Пусть биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке P, а прямую CD — в точке M. Обозначим $AB = CD = a$. Тогда $BC = AD = 2a$. Поскольку $\angle BPA = \angle DAP = \angle BAP$, треугольник ABP равнобедренный. Поэтому

$$BP = AB = a, \quad PC = BC - BP = 2a - a = a.$$



Треугольники PMC и PAB равны по стороне и прилежащим к ней углам, поэтому $MC = AB = a$. Аналогично докажем, что $DN = a$. Следовательно,

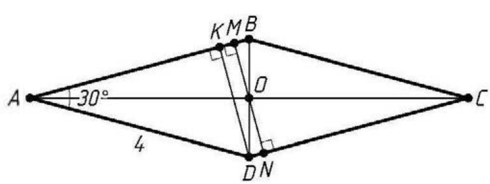
$$MN = MC + CD + DN = a + a + a = 3a = 12,$$

откуда находим, что $a = 4$.

3.5. Найдите расстояние от центра ромба до его стороны, если острый угол ромба равен 30°, а сторона равна 4.

Ответ: 1.

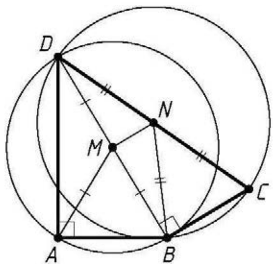
Решение. Пусть O — центр ромба $ABCD$, в котором $\angle BAD = 30^\circ$. Опустим перпендикуляр OM из точки O на сторону AB и продолжим его до пересечения со стороной CD в точке N. Тогда $MN \perp CD$.



Пусть DK — перпендикуляр, опущенный из вершины D на сторону AB. В прямоугольном треугольнике AKD сторона DK — катет, лежащий против угла в $30°$. Поэтому $DK = \frac{1}{2}AD = 2$. Следовательно,

$$OM = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}DK = 1.$$

3.6. В четырёхугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle DAB = 90°$, $\angle DBC = 90°$. Кроме того, $DB = a$, $DC = b$. Найдите расстояние между центрами двух окружностей, одна из которых проходит через точки D, A, B, а другая — через точки B, C, D.



Ответ: $\dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2}$.

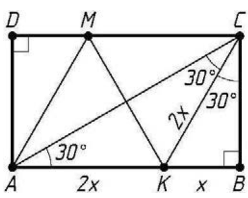
Решение. Центр окружности, проходящей через точки D, A и B, есть середина M отрезка DB; центр окружности, проходящей через точки B, C и D, — середина N отрезка DC; MN — средняя линия треугольника DBC. Следовательно,

$$MN = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{DC^2 - DB^2}}{2} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2}.$$

3.7. На сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ взяты точки K и M так, что $AKCM$ — ромб. Диагональ AC образует со стороной AB угол $30°$. Найдите сторону ромба, если наибольшая сторона прямоугольника $ABCD$ равна 3.

Ответ: 2.

Решение. В прямоугольном треугольнике ABC катет AB лежит против угла в $60°$, поэтому $AB > BC$, т. е. AB и DC — бо́льшие стороны прямоугольника $ABCD$. В равнобедренном треугольнике AKC углы при основании AC равны, поэтому



$$\angle BCK = \angle ACB - \angle ACK = 60° - 30° = 30°.$$

Обозначим $BK = x$. Тогда

$$AK = CK = 2BK = 2x, \quad AB = AK + BK = 3x = 3,$$

откуда $x = 1$. Следовательно,

$$AK = KC = MC = AM = 2.$$

Тренировочные задачи

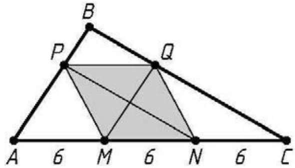
3.8. В треугольник, две из трёх сторон которого равны 9 и 15, вписан параллелограмм так, что одна из его сторон, равная 6, лежит на третьей стороне треугольника, а диагонали параллелограмма параллельны двум данным сторонам треугольника. Найдите другую сторону параллелограмма и третью сторону треугольника.

Ответ: $4\sqrt{2}$, 18.

Решение. Пусть вершины M и N параллелограмма $MNQP$ находятся на стороне AC треугольника ABC, а вершины P и Q — на сторонах AB и BC ($AB=9$, $BC=15$).

Поскольку $APQM$ и $NPQC$ — параллелограммы,

$$AM = PQ = NC = 6, \quad AC = 18.$$



Из подобия треугольников CMQ и CAB следует, что

$$QM = \frac{2}{3}AB = 6,$$

а из подобия треугольников APN и ABC — что

$$PN = \frac{2}{3}BC = 10.$$

Рассмотрим параллелограмм $MNQP$. По теореме о сумме квадратов диагоналей параллелограмма

$$PN^2 + MQ^2 = 2PQ^2 + 2PM^2.$$

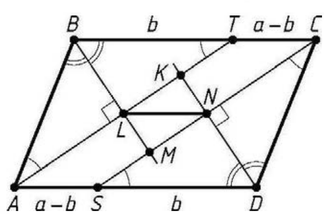
Следовательно,

$$PM^2 = \frac{1}{2}(PN^2 + MQ^2 - 2PQ^2) = \frac{1}{2}(100 + 36 - 72) = 32.$$

3.9. Стороны параллелограмма равны a и b ($a \neq b$). Найдите диагонали четырёхугольника, образованного пересечениями биссектрис углов параллелограмма.

Ответ: $|a-b|$.

Решение. Пусть биссектрисы углов при вершинах B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M, биссектрисы углов при вершинах C и D — в точке N, углов при вершинах A и D — в точке K, углов при вершинах A и B — в точке L.



Поскольку биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей перпендикулярны, $MLKN$ — прямоугольник.

Предположим, что $BC = a$, $AB = b$ и $a > b$.

Если луч AL пересекает прямую BC в точке T, то

$$\angle BTA = \angle TAD = \angle TAB,$$

значит, треугольник ABT равнобедренный. Поэтому $BT = AB = b$, следовательно, точка T лежит между точками B и C и $CT = BC - BT = a - b$.

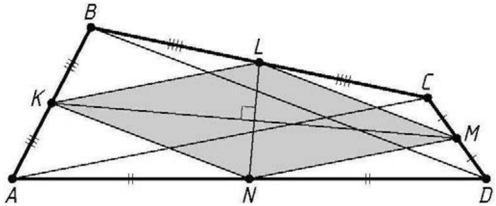
Поскольку BL — высота равнобедренного треугольника ABT, опущенная на основание, то L — середина AT. Аналогично докажем, что если S — точка пересечения луча CN со стороной AD, то N — середина CS. Точки L и N — середины противоположных сторон параллелограмма $ATCS$, следовательно, $LN = CT = a - b$, а так как диагонали прямоугольника равны, то $KM = LN = a - b$.

Если же $a < b$, то аналогично получим, что искомые диагонали равны $b - a$.

3.10. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, взаимно перпендикулярны и равны 2 и 7. Найдите площадь четырёхугольника.

Ответ: 14.

Решение. Пусть K, L, M и N — середины сторон соответственно AB, BC, CD и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, $LN = 2$, $KM = 7$.



Отрезки KL и MN — средние линии треугольников ABC и ADC, поэтому $KL \parallel AC$, $KL = \frac{1}{2}AC$, $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$, значит, четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм, а так как его диагонали KM и LN перпендикулярны, это ромб. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей, т. е. $S_{KLMN} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7 = 7$.

Поскольку KL — средняя линия треугольника ABC, площадь треугольника KBL равна четверти площади треугольника ABC. Аналогично площадь треугольника MDN равна четверти площади треугольника ADC, поэтому

$$S_{\Delta KBL} + S_{\Delta MDN} = \frac{1}{4}S_{\Delta ABC} + \frac{1}{4}S_{\Delta ADC} = \frac{1}{4}(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC}) = \frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

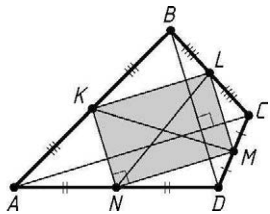
Аналогично $S_{\Delta KAN}+S_{\Delta MCL}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$. Следовательно,

$$S_{KLMN}=S_{ABCD}-S_{\Delta KBL}-S_{\Delta MDN}-S_{\Delta KAN}-S_{\Delta MCL}=$$
$$=S_{ABCD}-\frac{1}{4}S_{ABCD}-\frac{1}{4}S_{ABCD}=S_{ABCD}-\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{1}{2}S_{ABCD},$$
$$S_{ABCD}=2S_{KLMN}=2\cdot 7=14.$$

3.11. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, равны между собой. Найдите площадь четырёхугольника, если его диагонали равны 8 и 12.

Ответ: 48.

Решение. Пусть K, L, M и N — середины сторон соответственно AB, BC, CD и AD данного выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Поскольку KL и MN — средние линии треугольников ABC и ADC, то $KL \parallel MN$ и $KL=MN$, значит, четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм, а так как его диагонали KM и LN равны, то $KLMN$ — прямоугольник. Стороны прямоугольника $KLMN$ параллельны диагоналям AC и BD четырёхугольника $ABCD$, поэтому диагонали четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Следовательно,



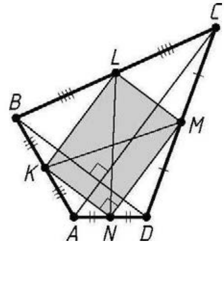
$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 12=48.$$

3.12. Дан выпуклый четырёхугольник, диагонали которого перпендикулярны и равны a и b. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в серединах сторон данного.

Ответ: $\frac{ab}{4}$.

Решение. Пусть K, L, M и N — середины сторон соответственно AB, BC, CD и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ с диагоналями $AC=a$ и $BD=b$, причём $AC\perp BD$.

Отрезки KL и MN — средние линии треугольников ABC и ADC, поэтому $KL\parallel AC$, $KL=\frac{1}{2}AC$, $MN\parallel AC$, $MN=\frac{1}{2}AC$. Две противоположные стороны четырёхугольника $KLMN$ равны и параллельны, значит, это параллелограмм, а так как его стороны соответственно параллельны диагоналям четырёхугольника $ABCD$, то $KLMN$ — прямоугольник. Его площадь равна произведению соседних сторон, причём $KL=$ $=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}a$ и $LM=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}b$. Следовательно,

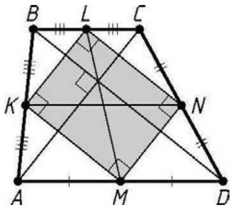


$$S_{KLMN}=KL\cdot LM=\frac{1}{2}AC\cdot\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}b=\frac{1}{4}ab.$$

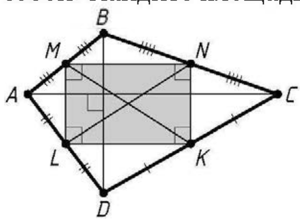
3.13. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна 5. Найдите отрезок, соединяющий середины оснований.

Ответ: 5.

Решение. Пусть L и M — середины оснований соответственно BC и AD трапеции $ABCD$, а K и N — середины боковых сторон AB и CD соответственно. Тогда KL и MN — средние линии треугольников ABC и ADC с общей стороной AC, поэтому $KL = MN$ и $KL \parallel MN$, значит, четырёхугольник $KLNM$ — параллелограмм. Его стороны KL и LN соответственно параллельны взаимно перпендикулярным диагоналям AC и BD трапеции $ABCD$, значит, $KLNM$ — прямоугольник. Диагонали прямоугольника равны, следовательно, $LM = KN = 5$.



3.14. Диагонали выпуклого четырёхугольника равны a и b, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны между собой. Найдите площадь четырёхугольника.



Ответ: $\frac{ab}{2}$.

Решение. Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма. В данном случае этот параллелограмм — прямоугольник, так как его диагонали равны между собой. Диагонали данного четырёхугольника параллельны сторонам этого прямоугольника. Поэтому они взаимно перпендикулярны. Следовательно, искомая площадь равна $\frac{ab}{2}$.

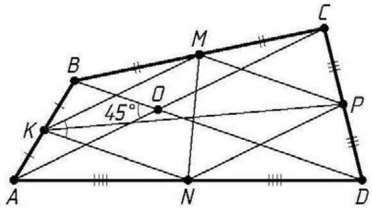
3.15. Диагонали выпуклого четырёхугольника равны c и d и пересекаются под углом 45°. Найдите отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{c^2+d^2 \pm cd\sqrt{2}}$.

Решение. Пусть диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны c и d соответственно, пересекаются в точке O и $\angle AOB = 45^\circ$. Если K, P, M и N — середины сторон соответственно AB, CD, BC и AD, то KM и KN — средние линии треугольников ABC и BAD, поэтому

$$KM \parallel AC, \quad KM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}c, \quad KN \parallel BD, \quad KN = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}d,$$

$$\angle MKN = \angle AOB = 45^\circ, \quad \angle KMP = 180^\circ - \angle MKN = 135^\circ.$$



Из треугольников KMN и KPM по теореме косинусов находим, что

$$MN^2 = KM^2 + KN^2 - 2KM \cdot KN \cos 45^\circ = \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}d^2 - \frac{1}{4}cd\sqrt{2} = \\ = \frac{1}{4}(c^2 + d^2 - cd\sqrt{2}),$$

$$KP^2 = MK^2 + MP^2 - 2MK \cdot MP \cos 135^\circ = \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}d^2 + \frac{1}{4}cd\sqrt{2} = \\ = \frac{1}{4}(c^2 + d^2 + cd\sqrt{2}).$$

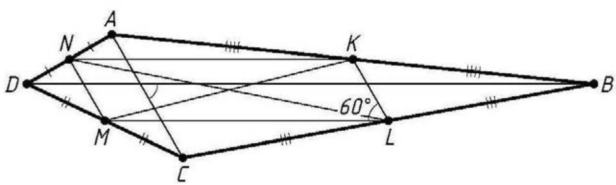
Следовательно,

$$MN = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2 - cd\sqrt{2}}, \quad KP = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2 + cd\sqrt{2}}.$$

3.16. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD относятся как $1 : 4$, а угол между ними равен 60°. Чему равен больший из отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырёхугольника $ABCD$, если меньший равен $\sqrt{26}$?

Ответ: $\sqrt{42}$.

Решение. Пусть K, L, M и N — середины сторон соответственно AB, BC, CD и AD данного четырёхугольника $ABCD$. Тогда KL и MN — средние линии треугольников ABC и ADC с общей стороной AC, поэтому $KL = MN$ и $KL \parallel MN$, значит, четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм. Его соседние стороны соответственно параллельны диагоналям данного четырёхугольника, значит, острый угол параллелограмма равен 60°. Кроме того, так как $KL = \frac{1}{2}AC$ и $LM = \frac{1}{2}BD$, то $\frac{KL}{LM} = \frac{AC}{BD} = \frac{1}{4}$.



Предположим, что $KM < LN$. Тогда $KM = \sqrt{26}$, а так как в параллелограмме меньшая диагональ лежит против меньшего угла, то $\angle KLM = 60^\circ$.

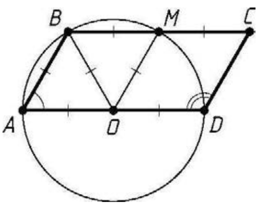
Положим $KL = x$, $LM = 4x$. По теореме косинусов

$$KM^2 = KL^2 + LM^2 - 2KL \cdot LM \cos 60^\circ,$$

или $26 = x^2 + 16x^2 - 4x^2$, откуда находим, что $x^2 = 2$. Следовательно,

$$LN = \sqrt{KL^2 + KN^2 - 2KL \cdot KN \cos 120^\circ} = \sqrt{KL^2 + LM^2 + KL \cdot LM} = \\ = \sqrt{x^2 + 16x^2 + 4x^2} = \sqrt{21x^2} = \sqrt{21 \cdot 2} = \sqrt{42}.$$

3.17. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через вершину B и середину стороны BC. Найдите углы параллелограмма.



Ответ: 60°, 120°.

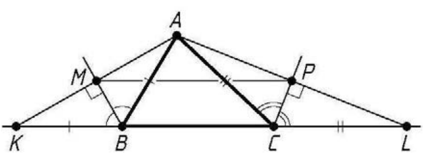
Решение. Пусть O — середина стороны AD, M — середина стороны BC. Окружность с центром O проходит через точки A, B и M, а также $BM = AO$ и $BM \parallel AO$, поэтому $AB = OM = OB = OA$. Значит, треугольник ABO равносторонний. Следовательно,

$$\angle BAD = 60^\circ, \quad \angle ABC = 120^\circ.$$

3.18. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AM и AP на биссектрисы внешних углов B и C. Известно, что периметр треугольника ABC равен 10. Найдите PM.

Ответ: 5.

Решение. Пусть прямые AM и AP пересекают прямую BC в точках K и L соответственно. Поскольку высоты BM и CP треугольников ABK и ACL являются их биссектрисами, эти треугольники равнобедренные, поэтому $BK = AB$ и $CL = AC$. Значит, отрезок KL равен периметру треугольника ABC, т. е. $KL = 10$.



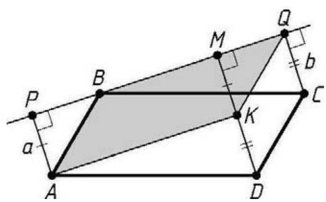
Высоты BM и CP равнобедренных треугольников ABK и ACL являются их медианами, поэтому точки M и P — середины отрезков

AK и AL. Значит, MP — средняя линия треугольника AKL. Следовательно, $MP = \frac{1}{2}KL = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$.

3.19. Прямая имеет с параллелограммом $ABCD$ единственную общую точку B. Вершины A и C удалены от этой прямой на расстояния, равные a и b. На какое расстояние удалена от этой прямой вершина D?

Ответ: $a+b$.

Решение. Пусть P, M и Q — проекции точек соответственно A, D и C на указанную прямую. Если прямая, проходящая через точку Q параллельно CD, пересекает отрезок DM в точке K, то $CDKQ$ — параллелограмм. Поэтому



$$KQ = CD = AB, \quad KQ \parallel CD \parallel AB,$$

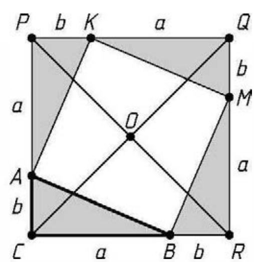
значит, $ABQK$ также параллелограмм. Прямоугольные треугольники APB и KMQ равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $MK = AP = a$. Следовательно,

$$DM = MK + DK = AP + CQ = a + b.$$

3.20. Гипотенуза прямоугольного треугольника служит стороной квадрата, расположенного вне треугольника. Найдите расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата, если катеты треугольника равны a и b.

Ответ: $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Решение. Пусть квадрат $AKMB$ расположен вне прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB и катетами $BC = a$, $AC = b$. Достроим квадрат $AKMB$ до квадрата $CPQR$ со стороной $a+b$. В сборнике [2] доказано, что если вершины одного параллелограмма лежат по одной на сторонах другого, то центры параллелограммов совпадают (с. 26, пример 3), значит, центр O квадрата $AKMB$ совпадает с центром достроенного квадрата $CPQR$. Поэтому CO — половина диагонали квадрата $CPQR$, следовательно,



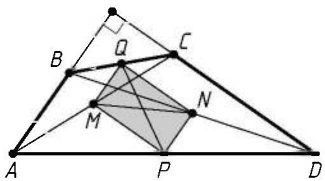
$$CO = \frac{1}{2}CQ = \frac{1}{2}CR \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2}(a+b)\sqrt{2} = \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

3.21. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен отрезку, соединяющему середины сторон AD и BC. Найдите угол, образованный продолжениями сторон AB и CD.

Ответ: 90°.

Решение. Пусть M и N — середины диагоналей соответственно AC и BD данного четырёхугольника $ABCD$, P и Q — середины сторон AD и BC соответственно, $MN = PQ$.

Отрезки MQ и PN — средние линии треугольников ABC и ABD, поэтому $MQ \parallel AB$, $MQ = \frac{1}{2}AB$, $PN \parallel AB$, $PN = \frac{1}{2}AB$, значит, $MQ \parallel PN$ и $MQ = PN$. Следовательно, четырёхугольник $MPNQ$ — параллелограмм, а так как его диагонали MN и PQ равны, то это прямоугольник.



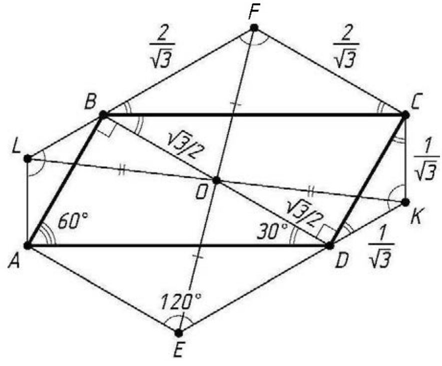
Отрезок NQ — средняя линия треугольника CBD, поэтому $NQ \parallel CD$. Прямые MQ и NQ перпендикулярны, значит, перпендикулярны и соответственно параллельные им прямые AB и CD, следовательно, угол, образованный продолжениями сторон AB и CD, равен 90°.

3.22. Дан параллелограмм со сторонами 1 и 2 и острым углом 60°. На двух его противоположных сторонах как на основаниях построены вне параллелограмма равнобедренные треугольники с углами 120° при вершинах. Найдите расстояние между этими вершинами.

Ответ: $\sqrt{\frac{13}{3}}$; $\sqrt{\frac{19}{3}}$.

Решение. Пусть угол при вершине A параллелограмма $ABCD$ равен 60°, $AB = 1$, $BC = 2$. В равнобедренных треугольниках ADE и BCF известно, что

$$\angle AED = \angle BFC = 120^\circ, \quad AE = DE = BF = FC = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$



Заметим, что четырёхугольник $BEDF$ — параллелограмм, так как его противоположные стороны BF и DE равны и параллельны. Значит, его диагональ EF проходит через середину O диагонали BD, т. е. через центр параллелограмма $ABCD$.

В треугольнике ABD сторона AB вдвое меньше стороны AD, а $\angle BAD = 60^\circ$, поэтому $\angle ABD = 90^\circ$. Тогда

$$BD = AB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}, \quad BO = \frac{1}{2}BD = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\angle CBD = \angle ABC - \angle ABD = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ,$$

$$\angle DBF = \angle CBD + \angle CBF = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ.$$

Из треугольника OBF по теореме косинусов находим, что

$$OF = \sqrt{BO^2 + BF^2 - 2BO \cdot BF \cos 60^\circ} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{4}{3} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{13}{12}}.$$

Следовательно,

$$EF = 2OF = 2\sqrt{\frac{13}{12}} = \sqrt{\frac{13}{3}}.$$

Рассмотрим теперь равнобедренные треугольники ALB и CKD с углами 120° при вершинах L и K. Рассуждая аналогично, докажем, что O — середина KL. Из треугольника OKD по теореме косинусов найдём, что

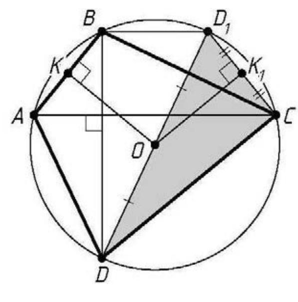
$$OK = \sqrt{DO^2 + DK^2 - 2DO \cdot DK \cos 120^\circ} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{19}{12}}.$$

Следовательно,

$$KL = 2OK = 2\sqrt{\frac{19}{12}} = \sqrt{\frac{19}{3}}.$$

3.23. Четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность с центром O. Найдите расстояние от точки O до стороны AB, если известно, что $CD = 8$.

Ответ: 4.



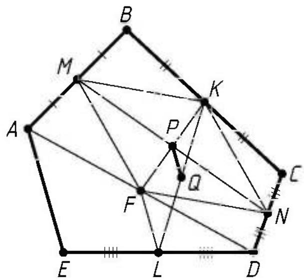
Решение. Проведём диаметр DD_1. Пусть K и K_1 — проекции точки O на хорды AB и CD_1 соответственно. Поскольку BD_1 и AC перпендикулярны DB, то BD_1 параллельно AC. Поэтому $D_1C = AB$ и $OK_1 = OK$ (равные хорды равноудалены от центра окружности).

Поскольку OK_1 — средняя линия прямоугольного треугольника DD_1C, то

$$OK = OK_1 = \frac{1}{2}DC = 4.$$

3.24. Точки M, K, N и L — середины сторон соответственно AB, BC, CD и DE пятиугольника $ABCDE$, P и Q — середины отрезков MN и KL соответственно. Известно, что $PQ=1$. Найдите сторону AE.

Ответ: 4.



Решение. Первый способ. Пусть F — середина AD. Тогда четырёхугольник $MKNF$ — параллелограмм. Его диагональ KF проходит через середину P его другой диагонали MN. Отрезок PQ — средняя линия треугольника KFL, а отрезок FL — средняя линия треугольника AED. Следовательно,

$$AE = 2FL = 2 \cdot 2PQ = 4PQ = 4.$$

Второй способ. Точки P и Q — середины отрезков MN и KL, поэтому

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{NL}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DL}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\right) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}.$$

Следовательно, $AE = 4PQ = 4$.

Задачи на доказательство и вычисление

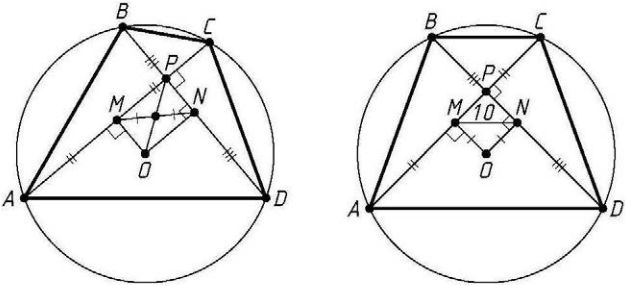
3.25.1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Диагонали четырёхугольника перпендикулярны, пересекаются в точке P, отличной от O, и не проходят через точку O. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно.

а) Докажите, что прямая OP проходит через середину отрезка MN.

б) Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$, если $AC = BD$, а $MN = 10$.

Ответ: 50.

Решение. а) Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде, поэтому четырёхугольник $OMPN$ — прямоугольник. Диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам, следовательно, прямая OP проходит через середину MN.



б) Равные хорды равноудалены от центра окружности, поэтому прямоугольник $OMPN$ — квадрат. Его диагонали равны 10. Следовательно, его площадь равна 50.

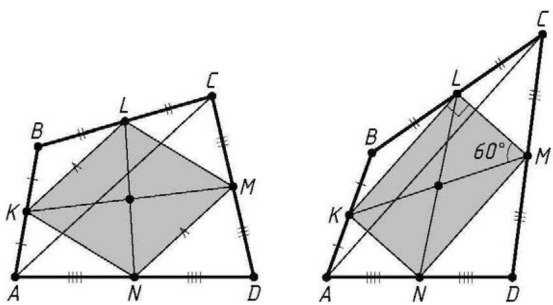
3.26.1. Дан четырёхугольник $ABCD$.

а) Докажите, что отрезки LN и KM, соединяющие середины его противоположных сторон, делят друг друга пополам.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если $LM = 3\sqrt{3}$, $KM = 6\sqrt{3}$, $\angle KML = 60^\circ$.

Ответ: $54\sqrt{3}$.

Решение. а) Пусть K, L, M и N — середины сторон соответственно AB, BC, CD и AD четырёхугольника $ABCD$. Тогда KL и MN — средние линии треугольников ABC и ADC. Значит, $KL = \frac{1}{2}AC = MN$ и $KL \parallel AC \parallel MN$, поэтому $KLMN$ — параллелограмм. Его диагонали KM и LN делят друг друга пополам.



б) Сторона LM треугольника KLM вдвое меньше стороны KM, а угол между этими сторонами равен 60°, значит, треугольник KLM прямоугольный с прямым углом при вершине L. Тогда

$$KL = LM \operatorname{tg} 60^\circ = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9.$$

Четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник, поэтому

$$S_{KLMN} = KL \cdot LM = 9 \cdot 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}.$$

Пусть искомая площадь четырёхугольника $ABCD$ равна S. Поскольку KL — средняя линия треугольника ABC, то $S_{\Delta KBL} = \frac{1}{4}S_{\Delta ABC}$. Аналогично $S_{\Delta MDN} = \frac{1}{4}S_{\Delta ADC}$. Значит,

$$S_{\Delta KBL} + S_{\Delta MDN} = \frac{1}{4}S_{\Delta ABC} + \frac{1}{4}S_{\Delta ADC} = \frac{1}{4}(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC}) = \frac{1}{4}S.$$

Аналогично $S_{\Delta CML} + S_{\Delta AKN} = \frac{1}{4}S$. Поэтому

$$S_{KLMN} = S - \frac{1}{4}S - \frac{1}{4}S = \frac{1}{2}S.$$

Следовательно,

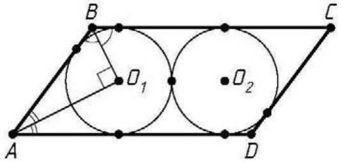
$$S = 2S_{KLMN} = 2 \cdot 27\sqrt{3} = 54\sqrt{3}.$$

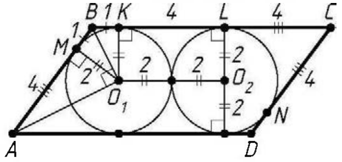
3.27.1. В параллелограмме лежат две окружности, касающиеся друг друга и трёх сторон параллелограмма каждая.

а) Докажите, что одна из сторон параллелограмма видна из центра одной из окружностей под прямым углом.

б) Найдите площадь параллелограмма, если радиус одной из окружностей равен 2, а один из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания с одной из окружностей равен 4.

Ответ: 36.





Решение. а) Пусть окружность с центром O_1 касается сторон AD, AB и BC параллелограмма $ABCD$, а окружность с центром O_2 — сторон AD, CD и BC. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO_1 и BO_1 — биссектрисы углов, сумма которых равна $180°$. Следовательно, эти биссектрисы пересекаются под прямым углом, т. е. $\angle AO_1B = 90°$.

б) Каждая из окружностей касается параллельных прямых AD и BC, значит, окружности равны. Расстояние между точками их касания с большей стороной параллелограмма равно сумме их радиусов, т. е. 4. Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AB в точке M, стороны BC —

в точке K, а $AM=4$. Поскольку радиус O_1M — высота прямоугольного треугольника AO_1B, проведённая из вершины прямого угла, то

$$BK = BM = \frac{O_1M^2}{AM} = \frac{4}{4} = 1.$$

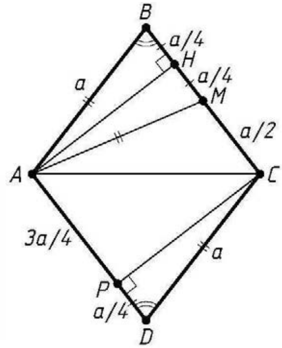
Если окружность с центром O_2 касается сторон CD и BC в точках N и L соответственно, то $CL=CN=AM=4$. Тогда $BC=1+4+4=9$, а так как высота параллелограмма, опущенная на сторону BC, равна диаметру окружности, т. е. 4, то $S_{ABCD}=9\cdot4=36$.

3.28.1. Отрезок, соединяющий вершину A ромба $ABCD$ с серединой стороны BC, равен стороне ромба.

а) Докажите, что высота ромба, проведённая из вершины C, делит сторону AD на отрезки, один из которых втрое больше другого.

б) Найдите диагональ AC ромба, если сторона ромба равна $\sqrt{6}$.

Ответ: 3.

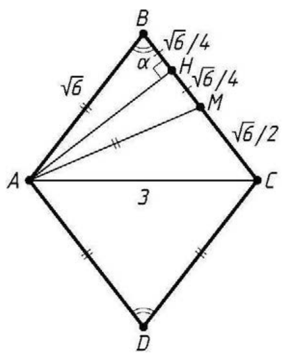


Решение. а) Пусть M — середина стороны BC ромба, AH — высота ромба, опущенная на сторону BC. Поскольку треугольник ABM равнобедренный ($AM = AB$), точка H — середина отрезка BM. Обозначим $BC=a$. Тогда

$$AM = AB = a, \quad BH = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}BC = \frac{a}{4}.$$

Значит, $CH=3BH$.

Пусть CP — высота ромба, опущенная на сторону AD. Прямоугольные треугольники CPD и AHB равны, поэтому $DP=BH$. Значит, $\frac{DP}{AP}=\frac{BH}{CH}=\frac{1}{3}$. Следовательно, $AP=3DP$.



б) Обозначим $\angle ABC = \alpha$. Из прямоугольного треугольника AHB находим, что $\cos\alpha=\frac{BH}{AB}=\frac{1}{4}$. Следовательно,

$$AC = \sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\alpha} =$$

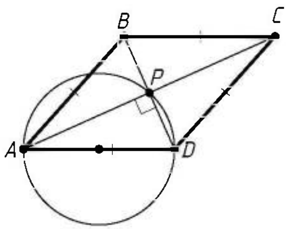
$$= \sqrt{6+6-2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{1}{4}} = \sqrt{9} = 3.$$

3.29.1. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

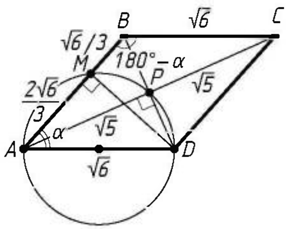
а) Докажите, что $ABCD$ — ромб.

б) Эта окружность пересекает сторону AB в точке M, причём $AM:MB=2:1$. Найдите диагональ AC, если $AD=\sqrt{6}$.

Ответ: $2\sqrt{5}$.



Решение. а) Пусть P — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Точка P лежит на окружности с диаметром AD, значит, $\angle APD=90^\circ$, т. е. $AC\perp BD$. Параллелограмм, диагонали которого перпендикулярны, есть ромб.



б) Точка M также лежит на окружности с диаметром AD, значит, $\angle AMD=90^\circ$. При этом $AM=\frac{2}{3}AB=\frac{2}{3}AD$. Обозначим $\angle BAD=\alpha$. Из прямоугольного треугольника AMD находим, что $\cos\alpha=\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{2}{3}$. Тогда

$$\cos\angle ABC=\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC}=\sqrt{6+6+2\cdot 6\cdot\frac{2}{3}}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

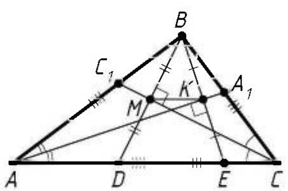
3.30.1. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1, точки K и M — основания перпендикуляров, опущенных из точки B на прямые AA_1 и CC_1.

а) Докажите, что $MK\parallel AC$.

б) Найдите площадь треугольника KBM, если $AC=10$, $BC=6$, $AB=8$.

Ответ: 2,4.

Решение. а) Пусть K и M — основания перпендикуляров, опущенных из вершины B на прямые AA_1 и CC_1 соответственно, D — точка

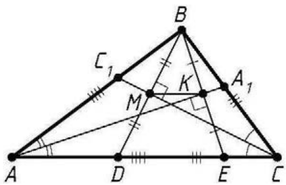


пересечения прямых BM и AC, E — точка пересечения прямых BK и AC. Треугольник BCD равнобедренный, так как его биссектриса CM является высотой. Значит, M — середина BD. Аналогично K — середина BE, поэтому MK — средняя линия треугольника DBE, $MK\parallel DE$. Следовательно, $MK\parallel AC$.

б) Треугольник ABC прямоугольный, так как $AC^2=100=64+36=AB^2+BC^2$. Поэтому

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 6=24.$$

Поскольку $AE = AB = 8$ и $CD = BC = 6$, то $AC = AE + CD - DE$, поэтому $DE = AE + CD - AC = 8 + 6 - 10 = 4$. У треугольников ABC и DBE общая высота, проведённая из вершины B, значит,



$$S_{\triangle DBE} = \frac{DE}{AC} S_{\triangle ABC} = \frac{4}{10} \cdot 24 = \frac{48}{5}.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle KBM} = \frac{1}{4} S_{\triangle DBE} = \frac{1}{4} \cdot \frac{48}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4.$$

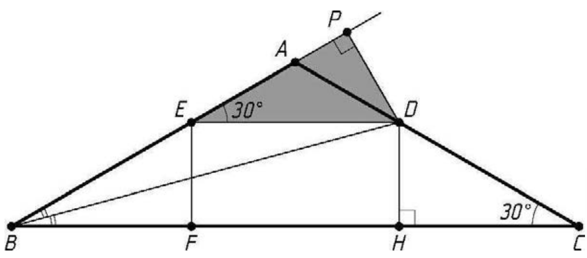
3.31.1. В равнобедренном треугольнике ABC с углом 120° при вершине A проведена биссектриса BD. В треугольник ABC вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона HF лежит на отрезке BC, а вершина E — на отрезке AB.

а) Докажите, что $FH = 2DH$.

б) Найдите площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB = 4$.

Ответ: $12(2-\sqrt{3})$.

Решение. а) Пусть P — проекция точки D на прямую AB. Точка D лежит на биссектрисе угла PBC, значит, $DP = DH$. Отрезок DP — катет прямоугольного треугольника DEP, лежащий против угла в 30°, следовательно, $FH = DE = 2DP = 2DH$.



б) Положим $DH = x$, $DE = 2x$. Тогда

$$CD = 2DH = 2x, \quad AD = \frac{DE}{\sqrt{3}} = \frac{2x}{\sqrt{3}},$$

а так как $CD + AD = AC = AB = 4$, то $2x + \dfrac{2x}{\sqrt{3}} = 4$. Отсюда находим, что $x = \sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$. Следовательно,

$$S_{DEFH} = DE \cdot DH = 2x^2 = 2 \cdot 3(\sqrt{3}-1)^2 = 12(2-\sqrt{3}).$$

3.32.1. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружности, вписанные в треугольники ABD и BDC, касаются диагонали BD в точках M и N соответственно. Окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, касаются диагонали AC в точках K и L соответственно.

а) Докажите, что $MKNL$ — прямоугольник.

б) Найдите его площадь, если известно, что $BC - AB = 4$, а угол между диагоналями параллелограмма $ABCD$ равен 30°.

Ответ: 4.

Решение. а) Пусть $ABCD$ — параллелограмм, в котором $AB < BC$, M и N — точки касания с диагональю BD вписанных окружностей равных треугольников ABD и BDC соответственно, K и L — точки касания с диагональю AC вписанных окружностей равных треугольников ABC и ADC соответственно, O — точка пересечения диагоналей параллелограмма.

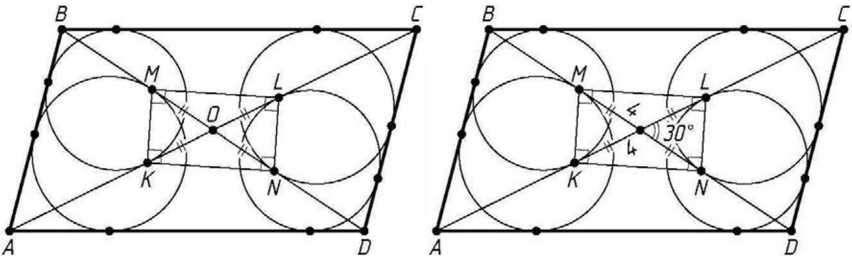
Точка O — центр симметрии параллелограмма, поэтому $OM = ON$ и $OK = OL$, значит, $MKNL$ — параллелограмм.

Докажем, что $MN = KL$. Действительно, для вписанной окружности треугольника ABD известно, что $BM = \dfrac{AB + BD - AD}{2}$ (см. [2], с. 109), а так как $DN = BM$, то

$$MN = BD - 2BM = BD - (AB + BD - AD) = AD - AB.$$

Аналогично $KL = AD - AB$.

Таким образом, диагонали параллелограмма $MKNL$ равны, следовательно, это прямоугольник.



б) Диагонали прямоугольника $MKNL$ равны $AD - AB = BC - AB = 4$, а угол между ними равен 30°, следовательно,

$$S_{MKNL} = \frac{1}{2} MN \cdot KL \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

§ 4. Трапеция

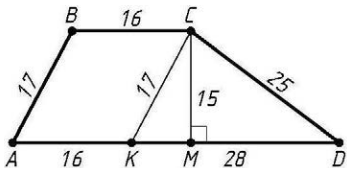
Подготовительные задачи

4.1. Найдите площадь трапеции, параллельные стороны которой равны 16 и 44, а непараллельные — 17 и 25.

Ответ: 450.

Решение. Через вершину C трапеции $ABCD$ ($BC=16$, $AD=44$, $AB=17$, $CD=25$) проведём прямую, параллельную стороне AB, до пересечения с основанием AD в точке K.

В треугольнике CKD известно, что



$$CK = AB = 17, \quad CD = 25,$$
$$KD = AD - AK = AD - BC = 44 - 16 = 28.$$

По формуле Герона

$$S_{\triangle CKD} = \sqrt{35 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 18} = 5 \cdot 7 \cdot 6 = 210.$$

Если CM — высота этого треугольника, то

$$CM = \frac{2S_{\triangle CKD}}{KD} = \frac{2 \cdot 210}{28} = 15.$$

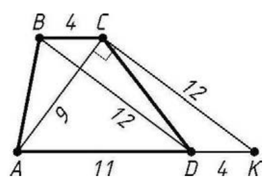
Следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CM = 450.$$

4.2. Найдите площадь трапеции с основаниями 11 и 4 и диагоналями 9 и 12.

Ответ: 54.

Решение. Через вершину C меньшего основания BC трапеции $ABCD$ ($BC=4$, $AD=11$, $AC=9$, $BD=12$) проведём прямую, параллельную диагонали BD, до пересечения с прямой AD в точке K. В треугольнике ACK известно, что



$$AC = 9, \quad CK = BD = 12,$$
$$AK = AD + DK = AD + BC = 11 + 4 = 15.$$

Поскольку $AK^2 = AC^2 + CK^2$, треугольник ACK прямоугольный. Его площадь равна половине произведения катетов, т. е.

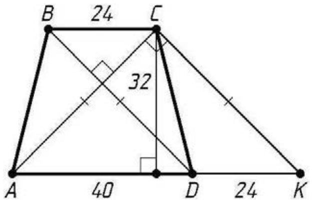
$$S_{\triangle ACK} = \frac{1}{2} AC \cdot CK = 54.$$

Площадь трапеции $ABCD$ равна площади этого треугольника, так как равновелики треугольники ABC и CDK ($BC = DK$, а высоты, опущенные на эти стороны, равны высоте трапеции).

4.3. В равнобедренной трапеции основания равны 40 и 24, а её диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 1024.

Решение. Пусть основания AD и BC равнобедренной трапеции $ABCD$ равны 40 и 24 соответственно, а диагонали AC и BD перпендикулярны. Через вершину C проведём прямую, параллельную диагонали BD. Пусть эта прямая пересекается с продолжением основания AD в точке K. Тогда ACK — равнобедренный прямоугольный треугольник с основанием $AK = AD + DK = 64$ и высотой, равной половине AK. Следовательно,

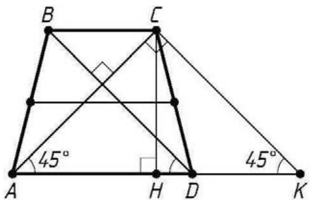


$$S_{ABCD} = S_{\Delta ACK} = \frac{1}{2} \cdot 64 \cdot 32 = 32^2 = 1024.$$

4.4. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если её средняя линия равна 5.

Ответ: 25.

Решение. Первый способ. Пусть CH — перпендикуляр, опущенный из вершины C меньшего основания BC данной трапеции $ABCD$, на большее основание AD. Тогда



$$AH = \frac{AD + BC}{2} = 5,$$

а так как $\angle CAD = \angle BDA = 45^\circ$, то $CH = AH = 5$. Следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CH = AH \cdot CH = 5 \cdot 5 = 25.$$

Второй способ. Через вершину C меньшего основания BC данной трапеции $ABCD$ проведём прямую, параллельную диагонали BD, до пересечения с продолжением основания AD в точке K. Тогда

$$DK = BC, \quad \angle ACK = 90^\circ, \quad CK = BD = AC, \quad \angle CKA = \angle CAK = 45^\circ,$$
$$AK = AD + DK = AD + BC = 10.$$

Пусть $CH = h$ — высота трапеции. Тогда

$$h = AH = \frac{1}{2}AK, \quad S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot h = \frac{1}{2}AK \cdot h = \frac{1}{4}AK^2 = \frac{1}{4} \cdot 100 = 25.$$

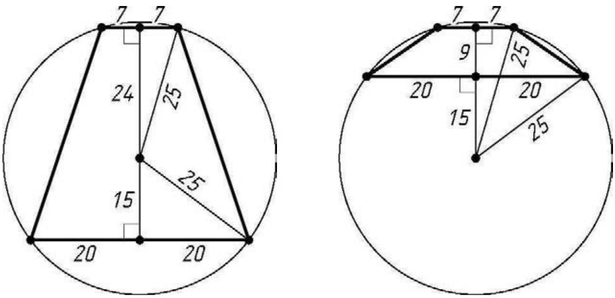
4.5. Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.

Ответ: 39 или 9.

Решение. Расстояния от центра окружности до данных хорд равны

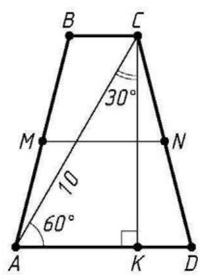
$$\sqrt{25^2-20^2}=15, \quad \sqrt{25^2-7^2}=24.$$

Если хорды расположены по разные стороны от центра (см. рисунок слева), то расстояние между ними равно $24+15=39$, а если по одну (см. рисунок справа), то $24-15=9$.



4.6. Диагональ равнобедренной трапеции равна 10 и образует угол 60° с основанием трапеции. Найдите среднюю линию трапеции.

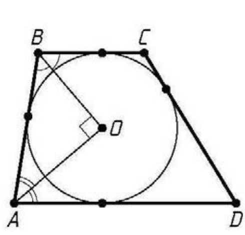
Ответ: 5.



Решение. Из вершины C меньшего основания BC равнобедренной трапеции $ABCD$ опустим перпендикуляр CK на большее основание. Тогда отрезок AK равен полусумме оснований трапеции. В прямоугольном треугольнике AKC катет AK лежит против угла в 30°, поэтому $AK=\frac{1}{2}AC=5$. Поскольку средняя линия MN трапеции также равна полусумме оснований, $MN=AK=5$.

4.7. Окружность с центром O вписана в трапецию с боковой стороной AB. Найдите угол AOB.

Ответ: 90°.

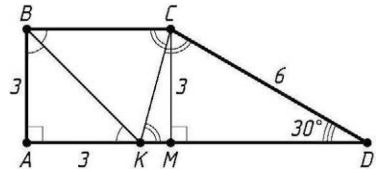


Решение. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла, поэтому OA и OB — биссектрисы углов при боковой стороне трапеции. Сумма этих углов равна 180°, сумма их половин равна 90°. Следовательно, $\angle AOB=90°$.

4.8. Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 3, а большая образует угол 30° с одним из оснований. Найдите это основание, если на нём лежит точка пересечения биссектрис углов при другом основании.

Ответ: 9.

Решение. Пусть BC и AD — основания прямоугольной трапеции $ABCD$, AB и CD — боковые стороны ($AB < CD$), $\angle ADC = 30°$, K — точка пересечения биссектрис углов трапеции при вершинах B и C.



Поскольку $\angle BKA = \angle KBC = \angle KBA$, треугольник ABK равнобедренный, поэтому $AK = AB = 3$. Аналогично $DK = CD$.

Пусть CM — высота трапеции. Тогда $CM = AB = 3$. Из прямоугольного треугольника CMD находим, что $CD = 2CM = 2AB = 6$. Следовательно,

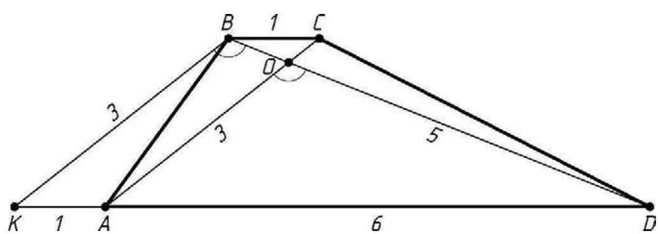
$$AD = AK + KD = AK + CD = 3 + 6 = 9.$$

4.9. Основания трапеции равны 1 и 6, а диагонали — 3 и 5. Под каким углом видны основания из точки пересечения диагоналей?

Ответ: 120°.

Решение. Пусть диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O и равны соответственно 3 и 5, а основания BC и AD равны соответственно 1 и 6. Через вершину B проведём прямую, параллельную диагонали AC. Пусть эта прямая пересекается с прямой AD в точке K. Тогда $AKBC$ — параллелограмм, значит,

$$BK = AC = 3, \quad \angle AOD = \angle KBD, \quad AK = BC = 1,$$
$$DK = AK + AD = 1 + 6 = 7.$$



По теореме косинусов

$$\cos\angle KBD = \frac{BK^2+BD^2-DK^2}{2BK\cdot BD} = \frac{9+25-49}{2\cdot3\cdot5} = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

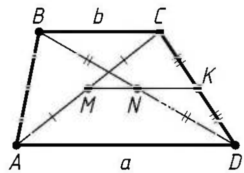
$$\angle AOD = \angle KBD = 120^\circ.$$

4.10. Основания трапеции равны a и b $(a>b)$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.

Ответ: $\frac{a-b}{2}$.

Решение. Пусть M и N — середины диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$, в которой $AD=a$ и $BC=b$.

Соединим точку M с серединой K боковой стороны CD. По теореме о средней линии треугольника $MK \parallel AD \parallel BC$. Аналогично докажем, что $NK \parallel BC$.



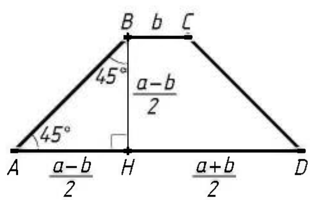
Поскольку через точку, не лежащую на прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной, то точки M, N и K лежат на одной прямой. Эта прямая параллельна основаниям трапеции.

Таким образом,

$$MN = MK - KN = \frac{1}{2}AD - \frac{1}{2}BC = \frac{a-b}{2}.$$

4.11. Основания равнобедренной трапеции равны a и b $(a>b)$, острый угол равен 45°. Найдите площадь трапеции.

Ответ: $\frac{a^2-b^2}{4}$.



Решение. Из вершины B меньшего основания BC равнобедренной трапеции $ABCD$ опустим перпендикуляр BH на её большее основание AD. Тогда

$$BH = AH = \frac{1}{2}(AD-BC) = \frac{a-b}{2}.$$

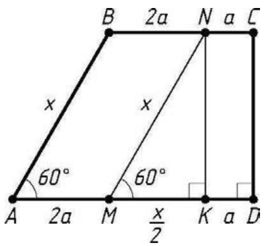
Следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD+BC)\cdot BH = \frac{a+b}{2}\cdot\frac{a-b}{2} = \frac{a^2-b^2}{4}.$$

Тренировочные задачи

4.12. В трапеции $ABCD$ углы A и D при основании AD соответственно равны 60° и 90°. Точка N лежит на основании BC, причём

$BN : BC = 2 : 3$. Точка M лежит на основании AD, прямая MN параллельна боковой стороне AB и делит площадь трапеции пополам. Найдите $AB : BC$.



Ответ: 4 : 3.

Решение. Обозначим $NC = a$, $AB = x$. Тогда $BN = 2a$, $AM = BN = 2a$. Если NK — высота трапеции, то

$$DK = NC = a, \quad MK = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}AB = \frac{x}{2}.$$

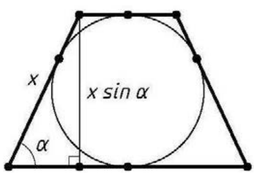
Из равенства площадей параллелограмма $ABNM$ и трапеции $MNCD$ следует равенство

$$2AM = NC + MD, \quad \text{или} \quad 4a = a + a + \frac{x}{2}.$$

Отсюда находим, что $x = 4a$. Следовательно,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{x}{3a} = \frac{4a}{3a} = \frac{4}{3}.$$

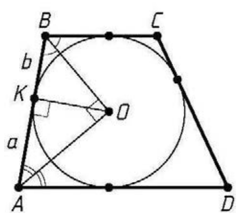
4.13. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна S. Найдите среднюю линию трапеции, если острый угол при её основании равен α.



Ответ: $\sqrt{\dfrac{S}{\sin\alpha}}$.

Решение. Пусть средняя линия данной трапеции равна x. Тогда боковая сторона также равна x, а высота трапеции равна $x\sin\alpha$. Из уравнения $S = x^2\sin\alpha$ находим, что $x = \sqrt{\dfrac{S}{\sin\alpha}}$.

4.14. Окружность, вписанная в трапецию, касается одной из боковых сторон в точке, делящей её на отрезки, равные a и b. Найдите радиус окружности.



Ответ: $\sqrt{ab}$.

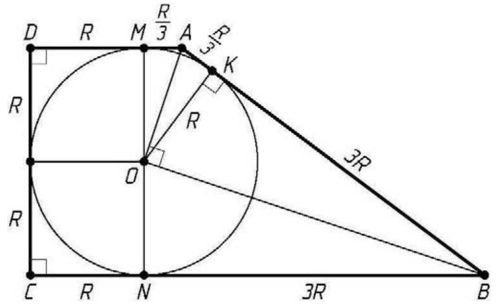
Решение. Радиус, проведённый из центра O окружности в точку K касания окружности с боковой стороной AB, есть высота прямоугольного треугольника AOB, опущенная на гипотенузу. Следовательно,

$$OK^2 = AK \cdot BK = ab.$$

4.15. В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса R. Найдите стороны трапеции, если её меньшее основание равно $\frac{4}{3}R$.

Ответ: $\frac{10}{3}R$, $4R$, $2R$.

Решение. Пусть K — точка касания вписанной окружности (с центром O) с большей боковой стороной AB трапеции $ABCD$, M и N — точки касания с меньшим и бо́льшим основаниями AD и BC соответственно.



Тогда

$$AK = AM = \frac{4}{3}R - R = \frac{1}{3}R, \quad AK \cdot BK = OK^2, \quad BK \cdot \frac{1}{3}R = R^2.$$

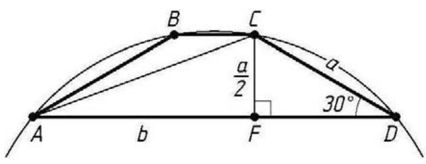
Отсюда находим, что

$$BK = 3R, \quad BC = CN + NB = R + 3R = 4R, \quad AB = \frac{1}{3}R + 3R = \frac{10}{3}R.$$

4.16. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна a, средняя линия равна b, а углы при большем основании равны 30°. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

Ответ: $\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$.

Решение. Пусть F — проекция вершины C меньшего основания BC равнобедренной трапеции $ABCD$ на большее основание AD.



Тогда отрезок AF равен средней линии трапеции, а так как в прямоугольном треугольнике CFD угол D равен 30°, то $CF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}a$. Из прямоугольного треугольника ACF находим, что

$$AC = \sqrt{AF^2 + CF^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Если R — радиус окружности, описанной около треугольника ACD, то

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle D} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

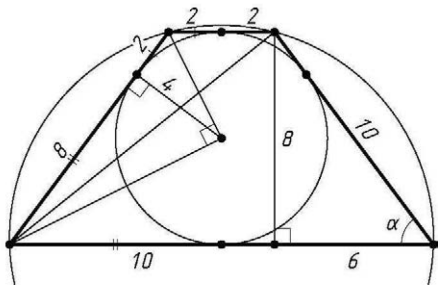
Осталось заметить, что окружность, описанная около треугольника ACD, совпадает с окружностью, описанной около трапеции $ABCD$.

4.17. Основания трапеции равны 4 и 16. Найдите радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около неё, если известно, что эти окружности существуют.

Ответ: 4; $\frac{5\sqrt{41}}{4}$.

Решение. Поскольку трапеция вписанная, то она равнобедренная. Пусть r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей.

Точка касания вписанной окружности делит боковую сторону на отрезки 2 и 8. Поэтому $r = \sqrt{2\cdot 8} = 4$.



Диагональ трапеции — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 8 (высота трапеции, опущенная из вершины меньшего основания на большее) и 10 (проекция диагонали на большее основание равнобедренной трапеции, равная, как известно, длине средней линии). Эта диагональ видна из вершины большего основания трапеции под углом α, синус которого равен $\frac{4}{5}$ (угол боковой стороны с основанием). Следовательно,

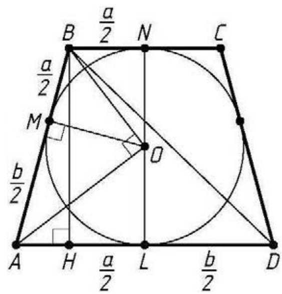
$$R = \frac{\sqrt{8^2+10^2}}{2\sin\alpha} = \frac{2\sqrt{41}}{\frac{8}{5}} = \frac{5\sqrt{41}}{4}.$$

4.18. Окружность вписана в равнобедренную трапецию с основаниями a и b. Найдите диагональ трапеции.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+6ab+b^2}$.

Решение. Пусть окружность с центром O, вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$, касается боковой стороны AB в точке M, а оснований BC и AD — в точках N и L соответственно.

Поскольку OM — высота прямоугольного треугольника AOB, опущенная из вершины прямого угла, то



$$OM = \sqrt{MA \cdot MB} = \sqrt{AL \cdot BN} = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}} = \frac{\sqrt{ab}}{2}.$$

Опустим перпендикуляр BH на AD. Тогда

$$DH = \frac{BC + AD}{2} = \frac{a+b}{2}, \quad BH = 2OM = \sqrt{ab}.$$

Из прямоугольного треугольника BHD находим, что

$$BD = \sqrt{BH^2 + DH^2} = \sqrt{ab + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 6ab + b^2}.$$

4.19. Известно, что высота трапеции равна 15, а её диагонали равны 17 и 113. Чему равна площадь трапеции?

Ответ: 900 или 780.

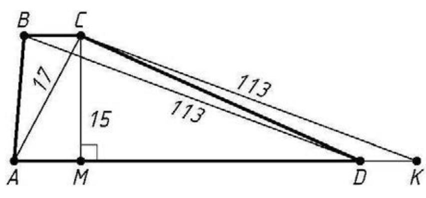
Решение. Через вершину C меньшего основания трапеции $ABCD$ ($AC = 17$, $BD = 113$) проведём прямую, параллельную диагонали BD. Пусть K — точка пересечения этой прямой с прямой AD. Тогда данная трапеция равновелика треугольнику ACK. Известны стороны $AC = 17$, $CK = 113$ и высота $CM = 15$ этого треугольника. Из прямоугольных треугольников ACM и KCM находим, что

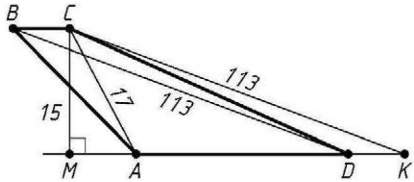
$$AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{(17-15)(17+15)} = \sqrt{64} = 8,$$

$$KM = \sqrt{KC^2 - CM^2} = \sqrt{113^2 - 15^2} = \sqrt{(113-15)(113+15)} =$$
$$= \sqrt{98 \cdot 128} = \sqrt{49 \cdot 256} = 7 \cdot 16 = 112.$$

Если точка M лежит между точками A и K, то

$$S_{ABCD} = S_{\Delta AKC} = \frac{1}{2} AK \cdot CM = \frac{1}{2}(AM + KM) \cdot CM = 60 \cdot 15 = 900.$$





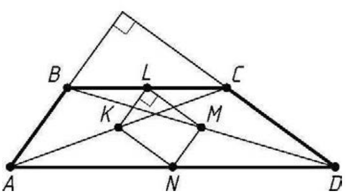
Если же точка A лежит между точками M и K, то

$$S_{ABCD} = S_{\triangle AKC} = \frac{1}{2}AK \cdot CM = \frac{1}{2}(KM - AM) \cdot CM = 52 \cdot 15 = 780.$$

4.20. Боковые стороны трапеции лежат на перпендикулярных прямых. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в серединах диагоналей и в серединах оснований трапеции, если её боковые стороны равны a и b.

Ответ: $\frac{ab}{4}$.

Решение. Пусть K и M — середины диагоналей соответственно AC и BD трапеции $ABCD$, а L и N — середины оснований соответственно BC и AD, причём $AB \perp CD$, $AB = a$ и $CD = b$.



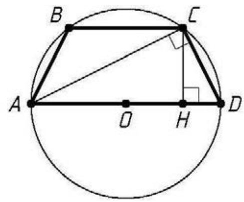
Отрезки KL и MN — средние линии треугольников ABC и ABD с общим основанием AB, поэтому $KL \parallel AB$, $KL = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$, $MN \parallel AB$, $MN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$. Аналогично $KN = LM = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}b$. Противоположные стороны четырёхугольника $KLMN$ попарно равны, значит, это параллелограмм, а так как его стороны соответственно параллельны перпендикулярным прямым AB и CD, то $KLMN$ — прямоугольник. Его площадь равна произведению соседних сторон, причём $KL = \frac{1}{2}a$ и $LM = \frac{1}{2}b$, следовательно,

$$S_{KLMN} = KL \cdot LM = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b = \frac{1}{4}ab.$$

4.21. Найдите диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12, если известно, что центр её описанной окружности лежит на большем основании.

Ответ: $8\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$.

Решение. Пусть AD — диаметр окружности, описанной около равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 20$ и $BC = 12$, CH —



перпендикуляр, опущенный из вершины C на основание AD. Тогда

$$AH = \frac{AD+BC}{2} = 16, \quad DH = \frac{AD-BC}{2} = 4.$$

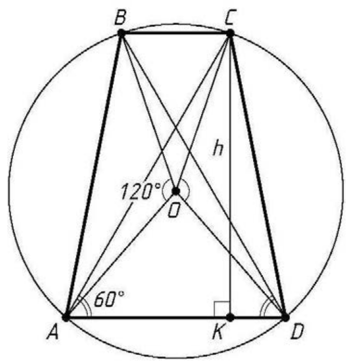
Точка C лежит на окружности с диаметром AD, значит, $\angle ACD = 90^\circ$, поэтому CH — высота прямоугольного треугольника ACD, проведённая из вершины прямого угла. Следовательно,

$$CD^2 = DH \cdot AD = 4 \cdot 20, \quad AC^2 = AH \cdot AD = 16 \cdot 20.$$

Таким образом, $AB = CD = 4\sqrt{5}$, $AC = 8\sqrt{5}$.

4.22. Трапеция с высотой h вписана в окружность. Боковая сторона трапеции видна из центра окружности под углом 120°. Найдите среднюю линию трапеции.

Ответ: $\frac{h}{\sqrt{3}}$.



Решение. Пусть O — центр окружности, описанной около трапеции $ABCD$ с основаниями $AD > BC$. Трапеция $ABCD$ равнобедренная, поэтому

$$\angle CAD = \angle BDA = \frac{1}{2}\angle BOA = 60^\circ.$$

Пусть CK — высота трапеции, тогда

$$AK = h \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{h}{\sqrt{3}},$$

а так как трапеция равнобедренная, то отрезок AK равен её средней линии.

4.23. Площадь равнобедренной трапеции равна $\sqrt{3}$. Угол между диагональю и основанием на 20° больше угла между диагональю и боковой стороной. Найдите острый угол трапеции, если её диагональ равна 2.

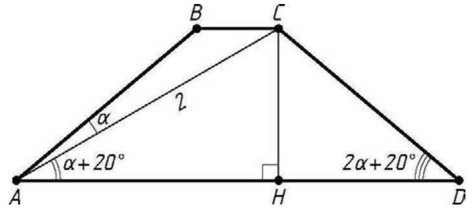
Ответ: 40° или 80°.

Решение. Пусть AD — большее основание равнобедренной трапеции $ABCD$. Тогда угол BAD острый. Если CH — высота трапеции, то

$$DH = \frac{AD-BC}{2}, \quad AH = AD - DH = AD - \frac{AD-BC}{2} = \frac{AD+BC}{2},$$

поэтому

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot CH = AH \cdot CH = \sqrt{3}.$$



Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle CAH = \alpha + 20^\circ$. Из прямоугольного треугольника AHC находим, что

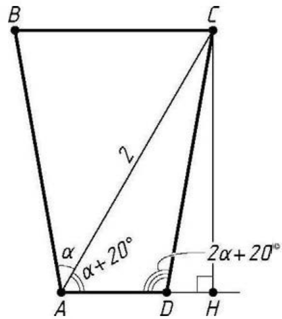
$$AH = AC\cos\angle CAH = 2\cos(\alpha+20^\circ),$$
$$CH = AC\sin\angle CAH = 2\sin(\alpha+20^\circ),$$

поэтому

$$AH \cdot CH = 2\cos(\alpha+20^\circ)\cdot 2\sin(\alpha+20^\circ) = 2\sin(2\alpha+40^\circ) = \sqrt{3}.$$

Значит, $2\alpha + 40^\circ = 60^\circ$ или $2\alpha + 40^\circ = 120^\circ$. Отсюда находим, что $\alpha = 10^\circ$ или $\alpha = 40^\circ$, а $\angle BAD = 2\alpha + 20^\circ = 40^\circ$ или $\angle BAD = 100^\circ$. Поскольку угол BAD острый, условию задачи удовлетворяет только 40°.

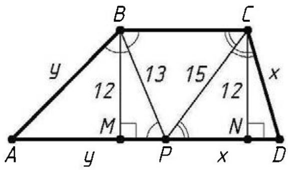
Если AD — меньшее основание, то аналогично находим, что $\angle ABC = 80^\circ$.



4.24. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом её основании. Найдите стороны трапеции, если её высота равна 12, а длины биссектрис равны 15 и 13.

Ответ: 14; 12,5; 29,4; 16,9.

Решение. Пусть биссектрисы тупых углов B и C пересекаются в точке P, принадлежащей большему основанию AD трапеции $ABCD$. Тогда $\angle APB = \angle PBC = \angle PBA$, значит, треугольник ABP равнобедренный. Аналогично треугольник PCD также равнобедренный.



Обозначим $CD = DP = x$, $AB = AP = y$, и пусть M и N — основания перпендикуляров, опущенных из вершин соответственно B и C на AD. Тогда

$$PN = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9, \quad PM = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

Следовательно, $BC = MN = PM + PN = 5 + 9 = 14$.

По теореме Пифагора

$$PC^2 - PN^2 = CD^2 - DN^2, \quad 15^2 - 9^2 = x^2 - (x-9)^2.$$

Отсюда находим, что $x = 12{,}5$. Аналогично

$$PB^2 - PM^2 = AB^2 - AM^2, \quad 13^2 - 5^2 = y^2 - (y-5)^2.$$

Отсюда находим, что $y = 16{,}9$. Следовательно,

$$AB = y = 16{,}9, \quad CD = x = 12{,}5, \quad AD = AP + PD = y + x = 29{,}4.$$

4.25. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, $\angle BOA = \angle COD = 60^\circ$. Перпендикуляр BK, опущенный из вершины B на сторону AD, равен 6; BC в три раза меньше AD. Найдите площадь треугольника COD.

Ответ: $\frac{63\sqrt{3}}{4}$.

Решение. Поскольку меньшие дуги AB и CD равны, $BC \parallel AD$. Поэтому $ABCD$ — равнобедренная трапеция. По теореме о вписанном угле

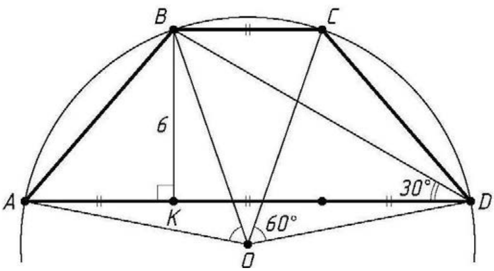
$$\angle BDA = \frac{1}{2}\angle AOB = 30^\circ.$$

Из прямоугольного треугольника BKD находим, что

$$KD = BK \operatorname{ctg} 30^\circ = 6\sqrt{3}.$$

С другой стороны,

$$KD = \frac{1}{2}(BC + AD) = \frac{1}{2}(BC + 3BC) = 2BC.$$



Из равенства $2BC = 6\sqrt{3}$ следует, что $BC = 3\sqrt{3}$. Тогда

$$AD = 9\sqrt{3}, \quad AK = \frac{1}{2}(AD - BC) = 3\sqrt{3},$$

а так как

$$OB = OA = AB = \sqrt{BK^2 + AK^2} = \sqrt{36+27} = 3\sqrt{7},$$

то

$$S_{\Delta COD} = S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB \sin\angle AOB = \frac{1}{2}\cdot(3\sqrt{7})^2 \sin 60^\circ = \frac{63\sqrt{3}}{4}.$$

4.26. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3\sqrt{39}$ и $BC = \sqrt{39}$. Кроме того, дано, что угол BAD равен 30°, а угол ADC равен 60°. Через точку D проходит прямая, делящая трапецию на две равновеликие фигуры. Найдите длину отрезка этой прямой, находящегося внутри трапеции.

Ответ: 13.

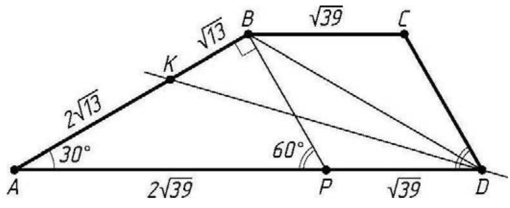
Решение. Поскольку $S_{\Delta ABD} = 3S_{\Delta BCD}$, указанная прямая пересекает отрезок AB. Пусть K — точка пересечения. Тогда

$$S_{\Delta AKD} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot\frac{AD+BC}{2}h = h\sqrt{39},$$

где h — высота трапеции $ABCD$. С другой стороны,

$$S_{\Delta AKD} = \frac{1}{2}AD \cdot h_1 = \frac{3\sqrt{39}\cdot h_1}{2},$$

где h_1 — высота треугольника AKD. Поэтому $\frac{h_1}{h} = \frac{2}{3}$ и $\frac{AK}{AB} = \frac{2}{3}$.



Проведём через вершину B прямую, параллельную стороне CD, до пересечения с основанием AD в точке P. Тогда

$$AP = AD - DP = AD - BC = 2\sqrt{39}.$$

Из прямоугольного треугольника ABP находим, что

$$AB = AP\cos 30^\circ = 3\sqrt{13}.$$

Поэтому $AK = \frac{2}{3}AB = 2\sqrt{13}$. По теореме косинусов из треугольника AKD находим, что

$$DK^2 = AK^2 + AD^2 - 2AK \cdot AD \cos 30^\circ =$$
$$= 4 \cdot 13 + 9 \cdot 39 - 2 \cdot 2\sqrt{13} \cdot 3\sqrt{39} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 169.$$

Следовательно, $DK = 13$.

4.27. Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60°. Найдите высоту трапеции.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

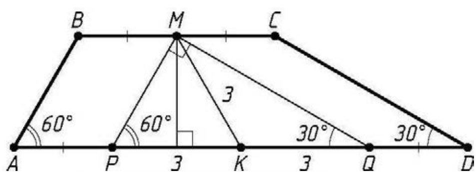
Решение. Через середину M меньшего основания BC трапеции $ABCD$ проведём прямую, параллельную боковой стороне AB, до пересечения с основанием AD в точке P и прямую, параллельную боковой стороне CD, до пересечения с прямой AD в точке Q. Если K — середина AD, то

$$PK = AK - AP = AK - BM = DK - MC = DK - QD = KQ.$$

Поэтому MK — медиана треугольника PMQ, а так как

$$\angle PMQ = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ,$$

то $PK = KQ = MK = 3$.



Если $\angle A = 60^\circ$, то $\angle MPK = 60^\circ$. Поэтому треугольник PMK равносторонний и его высота равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, высота трапеции равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

4.28. В трапеции $ABCD$ известны боковые стороны $AB = 27$, $CD = 28$, основание $BC = 5$ и $\cos\angle BCD = -\frac{2}{7}$. Найдите диагональ AC.

Ответ: 28, $2\sqrt{181}$.

Решение. Поскольку $\cos\angle BCD = -\frac{2}{7} < 0$, угол BCD тупой, поэтому угол ADC острый и $\cos\angle ADC = \frac{2}{7}$. Опустим перпендикуляр CH на основание AD. Тогда

$$DH = CD\cos\angle ADC = 28\cdot\frac{2}{7} = 8,$$

$$CH = CD\sin\angle ADC = 28\sqrt{1-\frac{4}{49}} = 12\sqrt{5}.$$

Через вершину C проведём прямую, параллельную боковой стороне AB, до пересечения с прямой AD в точке P. Тогда

$$PH = \sqrt{CP^2 - CH^2} = \sqrt{AB^2 - CH^2} = \sqrt{27^2 - (12\sqrt{5})^2} = 3.$$

Если точка P лежит между A и H (см. рисунок слева), то

$$AH = AP + PH = 5 + 3 = 8.$$

В этом случае

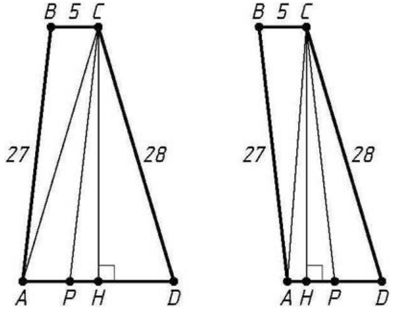
$$AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{64 + 144\cdot 5} = 28.$$

Если точка P лежит между D и H (см. рисунок справа), то

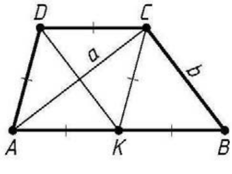
$$AH = AP - PH = 5 - 3 = 2.$$

В этом случае

$$AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{4 + 144\cdot 5} = 2\sqrt{181}.$$



4.29. Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое больше основания CD и вдвое больше боковой стороны AD. Диагональ AC равна a, а боковая сторона BC равна b. Найдите площадь трапеции.



Ответ: $\frac{3}{4}ab$.

Решение. Через вершину D проведём прямую, параллельную BC. Пусть K — точка пересечения проведённой прямой с основанием AB. Тогда $ADCK$ — ромб, а $DCBK$ — параллелограмм. Поэтому

$$DK = BC = b, \quad S_{ADCK} = \frac{1}{2}DK \cdot AC = \frac{1}{2}ab,$$

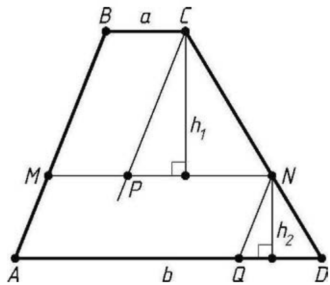
$$S_{\Delta KCB} = S_{\Delta AKC} = \frac{1}{2}S_{ADCK} = \frac{1}{4}ab.$$

Следовательно, $S_{ABCD} = \frac{3}{4}ab$.

4.30. Трапеция $ABCD$ разделена прямой, параллельной её основаниям AD и BC, на две равновеликие трапеции. Найдите отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами, если основания трапеции равны a и b.

Ответ: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Решение. Первый способ. Пусть точки M и N расположены на боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$, P — точка пересечения с MN прямой, проходящей через точку C параллельно AB, Q — точка пересечения с AD прямой, проходящей через точку N параллельно AB. Обозначим $MN = x$, и пусть h_1 и h_2 — высоты подобных треугольников PCN и QND.



Пусть $BC = a$ и $AD = b$ $(b > a)$. Из равенства площадей трапеций $BMNC$ и $MADN$ следует, что

$$(x+a)h_1 = (b+x)h_2,$$

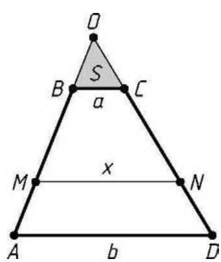
откуда $\frac{h_1}{h_2} = \frac{b+x}{x+a}$.

Из подобия треугольников CPN и NQD следует, что $\frac{h_1}{h_2} = \frac{x-a}{b-x}$. Поэтому

$$\frac{b+x}{x+a} = \frac{x-a}{b-x}.$$

Из этого уравнения находим, что $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Второй способ. Пусть O — точка пересечения продолжений боковых сторон AB и DC, S — площадь треугольника BOC, $MN = x$ — искомый отрезок. Тогда $S_{\Delta MNO} - S = S_{\Delta AOD} - S_{\Delta MNO}$, или



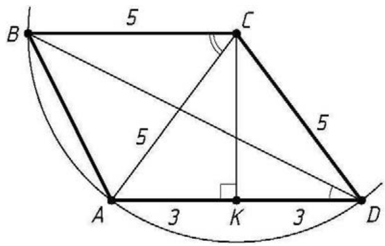
$$\frac{x^2}{a^2} \cdot S - S = \frac{b^2}{a^2} \cdot S - \frac{x^2}{a^2} \cdot S.$$

Отсюда находим, что $x^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$.

4.31. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) угол ADB в два раза меньше угла ACB. Известно, что $BC = AC = 5$ и $AD = 6$. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 22.

Решение. Построим окружность с центром в точке C и радиусом $CB = CA = 5$. Поскольку $\angle ADB = \frac{1}{2}\angle ACB$, точка D принадлежит этой окружности, значит, $CD = CA = 5$.



Пусть CK — высота равнобедренного треугольника ACD. Тогда

$$CK = \sqrt{AC^2 - AK^2} = \sqrt{25 - 9} = 4.$$

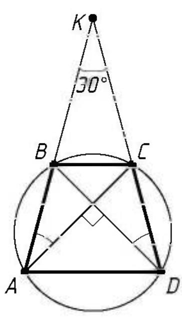
Поскольку CK — высота трапеции $ABCD$, то

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CK = \frac{6 + 5}{2} \cdot 4 = 22.$$

4.32. Дана трапеция $ABCD$, диагонали AC и BD которой пересекаются под прямым углом, а продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке K под углом 30°. Известно, что $\angle BAC = \angle CDB$, а площадь трапеции равна S. Найдите площадь треугольника AKD.

Ответ: $\frac{3}{2}S$ или $\frac{1}{2}S$.

Решение. Пусть $AD > BC$. Тогда точки K и A лежат по разные стороны от прямой BC. Поскольку $\angle BAC = \angle CDB$, около трапеции $ABCD$ можно описать окружность. Поэтому трапеция равнобедренная. Следовательно, треугольники AKD и BKC также равнобедренные.

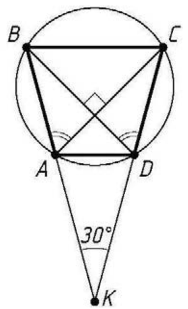


Поскольку

$$\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ,$$

то треугольник ACK равнобедренный, $CK = AC$. Тогда

$$S_{\Delta BKC} = \frac{1}{2}CK^2 \sin 30^\circ = \frac{1}{4}CK^2,$$



а так как

$$S = S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}AC^2 = \frac{1}{2}CK^2,$$

то $S_{\Delta BKC} = \frac{1}{2}S$. Следовательно,

$$S_{\Delta AKD} = \frac{1}{2}S + S = \frac{3}{2}S.$$

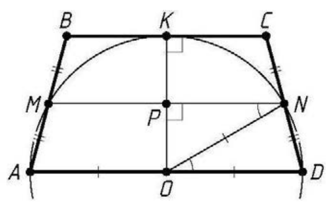
Если $AD < BC$, то точки K и A лежат по одну сторону от прямой BC. В этом случае, рассуждая аналогично, получим, что

$$S_{\Delta AKD} = \frac{1}{2}S.$$

4.33. Окружность, построенная на основании AD трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины боковых сторон AB и CD трапеции и касается основания BC. Найдите углы трапеции.

Ответ: 75°, 75°, 105°, 105°.

Решение. Пусть M и N — середины боковых сторон соответственно AB и CD трапеции $ABCD$. Тогда $MN \parallel AD$.



Пусть O — центр окружности, K — точка касания с основанием BC, P — точка пересечения радиуса OK со средней линией MN. Тогда

$$OP = \frac{1}{2}OK = \frac{1}{2}ON.$$

Из прямоугольного треугольника PNO находим, что $\angle PNO = 30°$. Тогда

$$\angle NOD = \angle PNO = 30°, \quad \angle CDA = \angle NDO = \frac{180° - 30°}{2} = 75°.$$

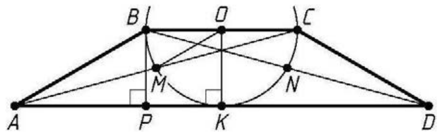
Аналогично находим, что $\angle BAD = 75°$.

4.34. Окружность, построенная на основании BC трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины диагоналей AC и BD трапеции и касается основания AD. Найдите углы трапеции.

Ответ: 30°, 30°, 150°, 150°.

Решение. Обозначим через R радиус окружности. Пусть O — её центр, M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно, K — точка касания окружности с основанием AD, P — проекция вершины B на основание AD. Тогда $OM = R$ — средняя линия треугольника ABC. Поэтому

$$AB = 2OM = 2R, \quad BP = OK = R.$$



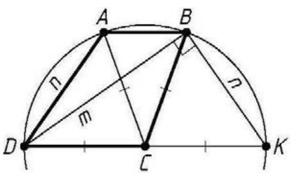
Из прямоугольного треугольника BAP находим, что $\angle BAP = 30^\circ$. Аналогично $\angle CDA = 30^\circ$.

4.35. Диагональ BD трапеции $ABCD$ равна m, а боковая сторона AD равна n. Найдите основание CD, если известно, что основание, диагональ и боковая сторона трапеции, выходящие из вершины C, равны между собой.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2}$.

Решение. Поскольку $CD = CA = CB$, то точки D, A и B лежат на окружности с центром в точке C и радиусом CD.

Пусть K — вторая точка пересечения прямой CD с этой окружностью. Тогда DK — диаметр, $AB \parallel DK$. Поэтому $BK = AD = n$, а $\angle DBK = 90^\circ$.



По теореме Пифагора

$$DK = \sqrt{DB^2 + BK^2} = \sqrt{m^2+n^2}.$$

Следовательно,

$$CD = \frac{1}{2}DK = \frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2}.$$

4.36. Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Найдите углы трапеции.

Ответ: 45°, 135°.

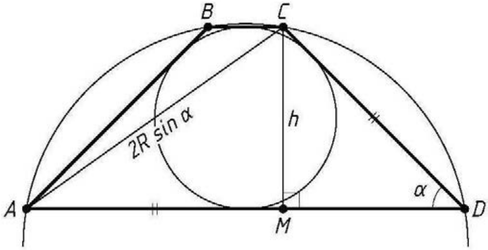
Решение. Пусть α — острый угол трапеции $ABCD$, h — высота трапеции, R — радиус описанной окружности, M — проекция вершины C меньшего основания BC на большее основание AD. Тогда

$$AM = \frac{1}{2}(BC + AD) = \frac{1}{2}(AB + CD) = \frac{1}{2}\cdot 2CD = CD,$$

$$AC = 2R\sin\alpha, \quad AM = CD = \frac{CM}{\sin\alpha} = \frac{h}{\sin\alpha}, \quad AM^2 + MC^2 = AC^2,$$

или

$$\frac{h^2}{\sin^2\alpha} + h^2 = 4R^2\sin^2\alpha, \quad \frac{\left(\frac{h}{R}\right)^2}{\sin^2\alpha} + \left(\frac{h}{R}\right)^2 = 4\sin^2\alpha.$$



Поскольку $\frac{h}{R} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, то

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+1\right) = 4\sin^2\alpha, \quad \text{или} \quad 6\sin^4\alpha - \sin^2\alpha - 1 = 0.$$

Отсюда находим, что $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha = 45^\circ.$$

4.37. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ взяты точки P и Q соответственно, причём $AP : PB = 2 : 3$. Отрезок PQ разбивает трапецию на части, одна из которых по площади втрое больше другой. Найдите отношение $CQ : QD$, если $AD = 2BC$.

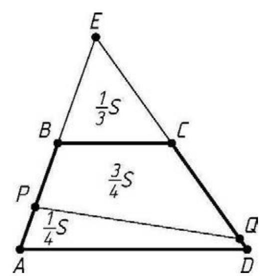
Ответ: $3 : 29$.

Решение. Пусть продолжения боковых сторон AB и CD трапеции пересекаются в точке E. Тогда BC — средняя линия треугольника AED, так как $BC = \frac{1}{2}AD$ и $BC \parallel AD$. Поэтому

$$\frac{EP}{EA} = \frac{EB+BP}{EA} = \frac{\frac{1}{2}EA + \frac{3}{5}AB}{EA} = \frac{\frac{1}{2}EA + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}EA}{EA} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Обозначим через S площадь трапеции $ABCD$. Тогда площадь треугольника BEC равна $\frac{1}{3}S$.

Предположим, что площадь четырёхугольника $APQD$ в три раза меньше площади четырёхугольника $PBCQ$. Тогда



$$S_{\triangle AED} = \frac{4}{3}S, \quad S_{PBCQ} = \frac{3}{4}S,$$
$$S_{\triangle PEQ} = \frac{1}{3}S + \frac{3}{4}S = \frac{13}{12}S,$$

а так как

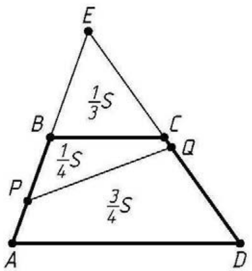
$$S_{\triangle PEQ} = \frac{EP}{EA}\cdot\frac{EQ}{ED}S_{\triangle AED},$$

то

$$\frac{13}{12}S = \frac{4}{5}\cdot\frac{EQ}{ED}\cdot\frac{4}{3}S,$$

откуда находим, что $\frac{EQ}{ED} = \frac{65}{64} > 1$, т. е. $EQ > ED$, что невозможно, так как точка Q должна лежать на отрезке CD.

Пусть теперь площадь четырёхугольника $PBCQ$ в три раза меньше площади четырёхугольника $APQD$. Тогда



$$S_{\Delta AED} = \frac{4}{3}S, \quad S_{PBCQ} = \frac{1}{4}S,$$

$$S_{\Delta PEQ} = \frac{1}{3}S + \frac{1}{4}S = \frac{7}{12}S,$$

а так как

$$S_{\Delta PEQ} = \frac{EP}{EA}\cdot\frac{EQ}{ED}S_{\Delta AED},$$

то

$$\frac{7}{12}S = \frac{4}{5}\cdot\frac{EQ}{ED}\cdot\frac{4}{3}S,$$

откуда находим, что $\frac{EQ}{ED} = \frac{35}{64}$. Следовательно,

$$\frac{EQ}{QD} = \frac{35}{29}, \quad \frac{CQ}{QD} = \frac{35-32}{29} = \frac{3}{29}.$$

4.38. Около окружности описана трапеция $ABCD$, боковая сторона AB перпендикулярна основаниям, M — точка пересечения диагоналей трапеции. Площадь треугольника CMD равна S. Найдите радиус окружности.

Ответ: $\sqrt{S}$.

Решение. Первый способ. Поскольку треугольники BAC и BDC равновелики, а треугольник BMC — их общая часть, то площадь треугольника AMB также равна S.

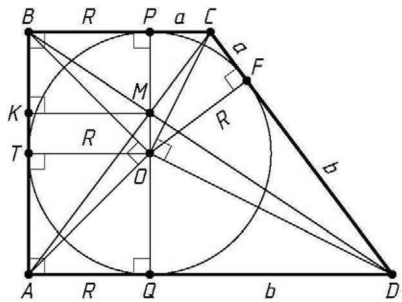
Пусть O — центр окружности; R — её радиус; P, F и Q — точки касания со сторонами BC, CD и AD соответственно; K — проекция точки M на сторону AB. Тогда

$$CF = CP = BC - BP = BC - R, \quad DF = DQ = AD - AQ = AD - R.$$

Отрезок OF — высота прямоугольного треугольника COD, проведённая из вершины прямого угла, поэтому

$$R^2 = OF^2 = CF\cdot DF = (BC - R)(AD - R).$$

Отсюда находим, что $R = \frac{AD\cdot BC}{AD+BC}$.



С другой стороны, из подобия треугольников AKM и ABC следует, что $KM=\frac{BC\cdot AM}{AC}$, а из подобия треугольников AMD и CMB — что $\frac{AM}{AC}=\frac{AD}{AD+BC}$, поэтому $KM=\frac{BC\cdot AD}{AD+BC}=R$.

Поскольку $AB=2R$, то

$$S=S_{\Delta AMB}=\frac{1}{2}AB\cdot KM=\frac{1}{2}\cdot 2R\cdot R=R^2.$$

Следовательно, $R=\sqrt{S}$.

Второй способ. Пусть O — центр окружности; R — её радиус; P, F, Q и T — точки касания со сторонами BC, CD, AD и AB соответственно. Обозначим $CF=CP=a$, $DF=DQ=b$. Тогда

$$BC=BP+CP=R+a,\quad AD=AQ+DQ=R+b,\quad \frac{CM}{MA}=\frac{BC}{AD}=\frac{R+a}{R+b}.$$

Отрезок OF — высота прямоугольного треугольника COD, проведённая из вершины прямого угла, поэтому $R=OF=\sqrt{CF\cdot DF}=\sqrt{ab}$, значит,

$$\frac{CM}{MA}=\frac{R+a}{R+b}=\frac{\sqrt{ab}+a}{\sqrt{ab}+b}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{a}{\sqrt{ab}}=\frac{a}{R}=\frac{CP}{AQ},$$

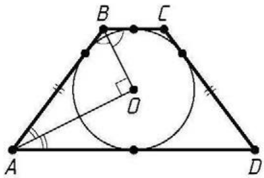
а так как $\angle MCP=\angle MAQ$, то треугольники MPC и MQA подобны по двум сторонам и углу между ними. Тогда $\angle CMP=\angle AMQ$, значит, точки P, M и Q лежат на одной прямой, а так как $OP\perp AC$, то на этой прямой лежит и точка O. Следовательно, $OM\parallel AB$ и $S_{\Delta AOB}=S_{\Delta AMB}=S_{\Delta CMD}=S$, а так как $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}AB\cdot OT=R\cdot R=R^2$, то $S=R^2$. Отсюда находим, что $R=\sqrt{S}$.

Задачи на доказательство и вычисление

4.39.1. Окружность с центром O вписана в равнобедренную трапецию $ABCD$ с боковой стороной AB.

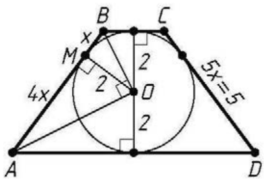
а) Докажите, что треугольник AOB прямоугольный.

б) Найдите площадь трапеции, если радиус окружности равен 2, а точка касания делит боковую сторону трапеции в отношении $1:4$.



Ответ: 20.

Решение. а) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO и BO — биссектрисы углов трапеции при боковой стороне AB. Сумма этих углов равна 180°, значит, сумма их половин равна 90°. Следовательно, $\angle AOB = 90^\circ$.



б) Пусть M — точка касания окружности, вписанной в трапецию, с боковой стороной AB. Тогда OM — высота прямоугольного треугольника AOB, проведённая из вершины прямого угла. Положим $MD = x$, $MA = 4x$. Тогда $OM^2 = MD \cdot MA$, или $4 = 4x^2$. Значит, $x = 1$ и $CD = AB = 5x = 5$.

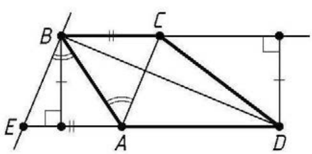
Сумма боковых сторон трапеции $ABCD$ равна сумме оснований, а так как боковые стороны равны, то сумма оснований равна 10. Тогда средняя линия трапеции равна 5. Высота трапеции равна диаметру вписанной окружности, т. е. 4. Следовательно, площадь трапеции равна $5 \cdot 4 = 20$.

4.40.1. Через вершину B трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC проведена прямая, параллельная диагонали AC. Пусть эта прямая пересекается с продолжением основания AD в точке E.

а) Докажите, что треугольник DBE равновелик трапеции $ABCD$.

б) Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 10 и 24, а средняя линия равна 13.

Ответ: 120.

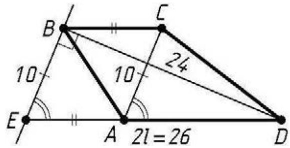


Решение. а) Противоположные стороны четырёхугольника $ACBE$ попарно параллельны, значит, это параллелограмм. Поэтому $AE = BC$. Треугольники BAE и DBC равновелики, так как у них равны высоты, опущенные из вершин B и D, и равны стороны AE и BC. Треугольник ABD — общая часть трапеции $ABCD$ и треугольника DBE, следовательно, $S_{ABCD} = S_{\Delta DBE}$.

б) Пусть $AC = 10$, $BD = 24$, а средняя линия трапеции $ABCD$ равна l. Тогда

$$l = \frac{1}{2}(BC + AD) = \frac{1}{2}(AE + AD) = \frac{1}{2}DE.$$

Отсюда находим, что $DE = 2l = 26$. Треугольник DBE прямоугольный, так как $DE^2 = 676 = 100 + 576 = BE^2 + BD^2$, поэтому



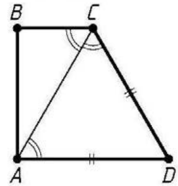
$$S_{ABCD} = S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} BE \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 = 120.$$

4.41.1. Боковая сторона CD трапеции $ABCD$ равна основанию AD.

а) Докажите, что CA — биссектриса угла BCD.

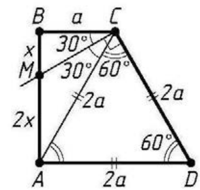
б) Прямая, проходящая через вершину C перпендикулярно CD, пересекает боковую сторону AB в точке M. Найдите отношение $BM : AM$, если известно, что $AD = CD = 2BC$ и $\angle ADC = 60^\circ$.

Ответ: $1:2$.



Решение. а) Треугольник ADC равнобедренный, поэтому $\angle ACD = \angle CAD = \angle ACB$. Следовательно, CA — биссектриса угла BCD.

б) Обозначим $BC = a$. Тогда $AD = CD = 2a$. Треугольник ADC равносторонний, поэтому $AC = 2a$. CM — биссектриса треугольника ABC, так как



$$\angle BCM = \angle BCD - \angle MCD = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ = \frac{1}{2}\angle ACB.$$

По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{BM}{AM} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

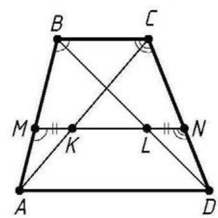
4.42.1. Прямая, параллельная основаниям BC и AD трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB и CD в точках M и N соответственно, а диагонали AC и BD — в точках K и L соответственно, причём точка K лежит между M и L.

а) Докажите, что $MK = NL$.

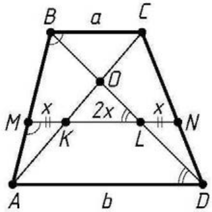
б) Найдите MN, если $BC = a$, $AD = b$ и $MK : KL : LN = 1:2:1$.

Ответ: $\dfrac{4ab}{3a+b}$.

Решение. а) Треугольник AMK подобен треугольнику ABC по двум углам, причём коэффициент подобия равен $\dfrac{AM}{AB}$. Треугольник DNL подобен треугольнику DCB с коэффициентом $\dfrac{DN}{DC}$, а так как $MN \parallel BC$, то $\dfrac{DN}{DC} = \dfrac{AM}{AB}$. Значит,



$$MK = BC \cdot \frac{AM}{AB} = BC \cdot \frac{DN}{DC} = NL.$$



б) Пусть диагонали трапеции пересекаются в точке O. Заметим, что точка K не может лежать между O и C, так как в этом случае $MK > KL$, что не соответствует условию задачи ($MK:KL = 1:2$).

Следовательно, точка K лежит между A и O. Обозначим $MK = NL = x$. Тогда $KL = 2x$, $ML = 3x$.

Из подобия треугольников AMK и ABC следует, что $\frac{x}{a} = \frac{MK}{BC} = \frac{AM}{AB}$. Из подобия треугольников MBL и ABD следует, что $\frac{3x}{b} = \frac{ML}{AD} = \frac{BM}{AB}$. Сложив эти равенства, получим, что

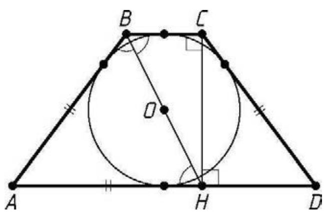
$$\frac{x}{a} + \frac{3x}{b} = \frac{AM}{AB} + \frac{BM}{AB} = \frac{AM+BM}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1.$$

Из уравнения $\frac{x}{a} + \frac{3x}{b} = 1$ находим, что $x = \frac{ab}{3a+b}$. Следовательно, $MN = 4x = \frac{4ab}{3a+b}$.

4.43.1. В равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность, CH — высота трапеции.

а) Докажите, что центр окружности, вписанной в трапецию, лежит на отрезке BH.

б) Найдите диагональ AC, если средняя линия трапеции равна $2\sqrt{7}$, а $\angle AOD = 120°$, где O — центр окружности, вписанной в трапецию, а AD — большее основание.



Ответ: 7.

Решение. а) Поскольку трапеция равнобедренная, $AH = \frac{1}{2}(AD + BC)$ (см. п. 5 приложения 2), а так как суммы противоположных сторон описанного четырёхугольника равны, то $AD + BC = AB + CD = 2AB = 2CD$. Значит,

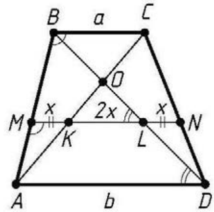
$$AB = \frac{1}{2}(AD + BC) = AH.$$

Треугольник ABH равнобедренный, поэтому углы при его основании BH равны. Тогда $\angle CBH = \angle AHB = \angle ABH$, значит, BH — биссектриса угла ABC. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, следовательно, центр O окружности, вписанной в трапецию $ABCD$, лежит на BH.

б) Точка O лежит на биссектрисе угла ADC, поэтому

$$\angle ADC = 2\angle ADO = 2(60° - 30°) = 60°.$$

Средняя линия трапеции равна полусумме оснований, поэтому $AH = AB = CD = \frac{1}{2}(AD + BC) = 2\sqrt{7}$. Из прямоугольного треугольника CDH находим, что



$$CH = CD \sin 60^\circ = 2\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{21}.$$

Следовательно,

$$AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{28 + 21} = 7.$$

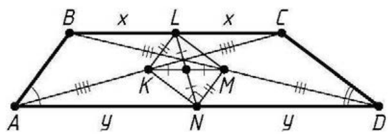
4.44.1. Точки L и N — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$ соответственно, а точки K и M — середины диагоналей AC и BD соответственно. Известно, что $KM = LN$.

а) Докажите, что сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90°.

б) Найдите высоту трапеции, если площадь четырёхугольника $KLMN$ равна 12, а разность оснований трапеции равна 10.

Ответ: 4,8.

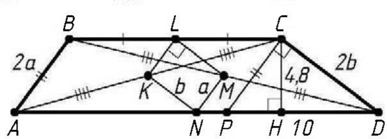
Решение. а) Предположим, что $BC < AD$. Отрезки KL и MN — средние линии треугольников ABC и ABD, поэтому $KL = MN$ и $KL \parallel MN$. Значит, $KLMN$ — параллелограмм, а так как его диагонали KM и LN равны, то это прямоугольник. Поскольку $AB \parallel KL$, $CD \parallel LM$ и $KL \perp LM$, то $AB \perp CD$. Следовательно, $\angle BAD + \angle CDA = 90^\circ$.



б) Через вершину C проведём прямую, параллельную AB. Пусть эта прямая пересекает основание AD в точке P. Четырёхугольник $ABCP$ — параллелограмм, поэтому $AP = BC$. Тогда $DP = AD - AP = AD - BC = 10$. Поскольку $AB \perp CD$, то $CP \perp CD$. Значит, треугольник DCP прямоугольный.

Пусть CH — высота трапеции. Тогда CH — высота прямоугольного треугольника DCP, проведённая из вершины прямого угла. Следовательно,

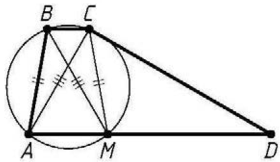
$$CH = \frac{CD \cdot CP}{PD} = \frac{CD \cdot AB}{PD} = \frac{2LM \cdot 2KL}{PD} = 4 \cdot \frac{LM \cdot KL}{PD} = 4 \cdot \frac{S_{KLMN}}{PD} = 4 \cdot \frac{12}{10} = 4{,}8.$$

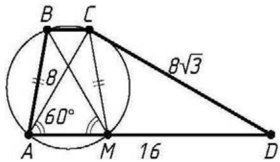


4.45.1. Окружность, проходящая через вершины A, B и C трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, вторично пересекает прямую AD в точке M.

а) Докажите, что $AC = BM$.

б) Найдите AC, если $AD = 16$, $CD = 8\sqrt{3}$ и $\angle AMB = 60^\circ$.





Ответ: 8.

Решение. а) Трапеция $ABCM$ вписана в окружность, поэтому она равнобедренная. Диагонали равнобедренной трапеции равны, следовательно, $AC = BM$.

б) Диагонали равнобедренной трапеции образуют равные углы с основанием, поэтому $\angle CAM = \angle AMB = 60^\circ$. Обозначим $AC = x$. Применяя теорему косинусов к треугольнику ACD, получим уравнение

$$(8\sqrt{3})^2 = x^2 + 16^2 - 16x,$$

из которого находим, что $x = 8$.

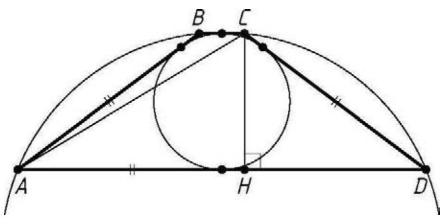
4.46.1. Дана трапеция, в которую можно вписать окружность и около которой можно описать окружность.

а) Докажите, что проекция диагонали этой трапеции на большее основание равна боковой стороне.

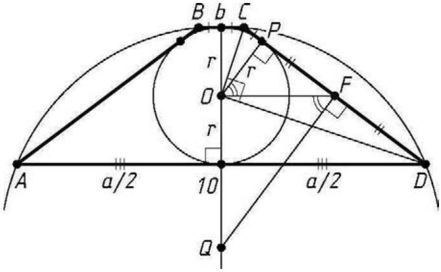
б) Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей, если основания трапеции равны 3 и 27.

Ответ: 10.

Решение. а) Трапеция, вписанная в окружность, равнобедренная. Пусть $AD > BC$ — её основания, CH — высота. Тогда AH — проекция диагонали AC на большее основание. Известно, что $AH = \frac{1}{2}(AD + BC)$ (см. п. 5 приложения 2), а так как в трапецию вписана окружность, то сумма оснований равна сумме боковых сторон, т. е. $AD + BC = AB + CD = 2AB$. Следовательно, $AH = AB$.



б) Пусть O и Q — центры вписанной и описанной окружностей трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = b$ $(a > b)$, P — точка касания вписанной окружности с боковой стороной CD, F — середина CD.



Прямая OQ — серединный перпендикуляр отрезков BC и AD, прямая QF — серединный перпендикуляр к отрезку CD, отрезок OF — половина средней линии трапеции $ABCD$. Треугольники OPF и FOQ подобны по двум углам. Поэтому

$$\frac{OQ}{OF} = \frac{PF}{OP}, \quad OF = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(a+b) = \frac{a+b}{4},$$

$$PF = CF - CP = CF - \frac{1}{2}BC = \frac{a+b}{4} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{4}.$$

Пусть радиус вписанной в трапецию окружности равен r. Треугольник COD прямоугольный, а OP — его высота, опущенная на гипотенузу, поэтому

$$OP = r = \sqrt{CP\cdot PD} = \frac{\sqrt{ab}}{2}.$$

Следовательно,

$$OQ = OF\cdot\frac{PF}{OP} = \frac{(a+b)(a-b)}{8\sqrt{ab}} = \frac{a^2-b^2}{8\sqrt{ab}} = \frac{27^2-3^2}{8\sqrt{27\cdot 3}} = \frac{720}{8\cdot 9} = 10.$$

4.47.1. Диагональ BD трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и DC.

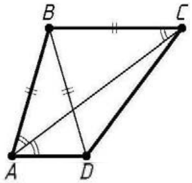
а) Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD.

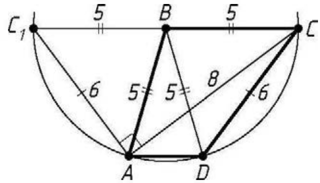
б) Найдите CD, если известны диагонали трапеции: $BD = 5$ и $AC = 8$.

Ответ: 6.

Решение. а) Имеем $\angle BAC = \angle ACB = \angle CAD$, следовательно, AC — биссектриса угла BAD.

б) Поскольку $BA = BD = BC = 5$, точки A, D и C лежат на окружности радиуса 5 с центром B. Продолжим основание BC за точку B до пересечения с этой окружностью в точке C_1. Тогда CC_1 — диаметр окружности, а $ADCC_1$ — равнобедренная трапеция. Поэтому





$AC_1 = CD$, а так как точка A лежит на окружности с диаметром CC_1, то $\angle CAC_1 = 90^\circ$. Из прямоугольного треугольника ACC_1 находим, что

$$AC_1 = \sqrt{CC_1^2 - AC^2} = \sqrt{100-64} = 6.$$

Следовательно, $CD = AC_1 = 6$.

4.48.1. Окружность с центром O_1 вписана в прямоугольную трапецию $ABCD$ с прямым углом при вершине A. Окружность с центром O_2 касается большей боковой стороны CD и продолжений оснований трапеции.

а) Докажите, что O_1CO_2D — прямоугольник.

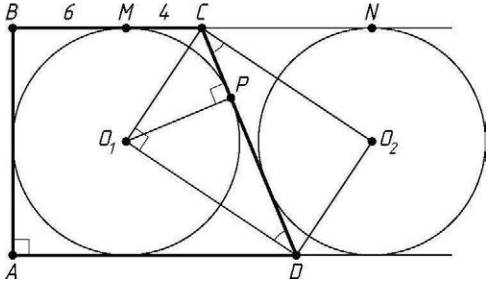
б) Найдите площадь этого прямоугольника, если точка касания M вписанной в трапецию окружности делит меньшее основание на отрезки $BM = 6$ и $CM = 4$.

Ответ: 78.

Решение. а) Пусть окружность с центром O_2 касается продолжения основания BC в точке N. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому

$$\angle DCO_2 = \frac{1}{2}\angle DCN = \frac{1}{2}\angle ADC = \angle CDO_1.$$

Значит, $CO_2 \parallel DO_1$. Аналогично $DO_2 \parallel CO_1$, следовательно, O_1CO_2D — параллелограмм, а так как $\angle CO_1D = 90^\circ$ (как угол между биссектрисами внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей), то это прямоугольник.



б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AB в точке E. Тогда BEO_1M — квадрат, поэтому $O_1M = BM = 6$, т. е. радиус обеих окружностей равен 6.

Пусть окружность с центром O_1 касается стороны CD в точке P. Тогда $CP = CM = 4$, а так как радиус O_1P — высота прямоугольного треугольника CO_1D, проведённая из вершины прямого угла, то

$$DP = \frac{O_1P^2}{CP} = \frac{36}{4} = 9.$$

Тогда

$$CD = CP + DP = 4 + 9 = 13.$$

Следовательно,

$$S_{O_1CO_2D} = 2S_{\Delta CO_1D} = 2 \cdot \frac{1}{2} CD \cdot O_1P = 13 \cdot 6 = 78.$$

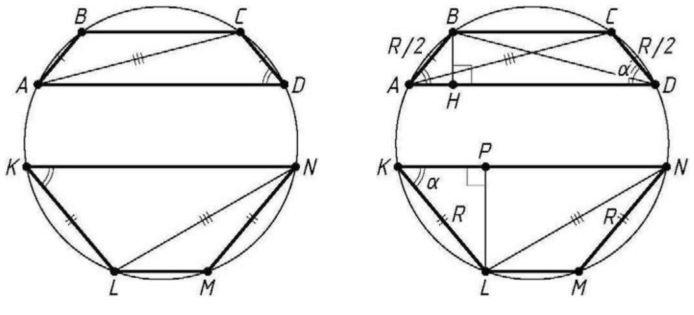
4.49.1. В окружность вписаны две трапеции. Основания и боковые стороны одной из них соответственно параллельны основаниям и боковым сторонам другой.

а) Докажите, что диагонали одной трапеции равны диагоналям другой.

б) Найдите отношение площадей этих трапеций, если известно, что боковая сторона одной из них равна радиусу окружности, а боковая сторона другой в два раза меньше.

Ответ: $4 : \sqrt{5}$.

Решение. а) Обе трапеции равнобедренные, так как они вписаны в окружность. Пусть трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC и трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM вписаны в окружность радиуса R, причём $AD \parallel KN$, $AB \parallel MN$ и $CD \parallel KL$. Тогда $\angle ADC = \angle LKN$ как углы с соответственно сонаправленными сторонами. По теореме синусов $AC = 2R \sin \angle ADC$ и $LN = 2R \sin \angle LKN$. Следовательно, $AC = LN$.



б) Обозначим $\angle ADC = \angle LKN = \alpha$. Пусть $KL = R$, $AB = \frac{R}{2}$. Проведём высоту LP трапеции $KLMN$ и высоту BH трапеции $ABCD$. Тогда отрезки NP и DH равны средним линиям соответствующих трапеций (см. п. 5 приложения 2). Из прямоугольных треугольников KPL и AHB находим, что

$$LP = KL\sin\alpha = R\sin\alpha, \quad BH = \frac{R}{2}\sin\alpha,$$

а из прямоугольных треугольников LPN и BHD — что

$$NP = \sqrt{LN^2 - LP^2} = \sqrt{4R^2\sin^2\alpha - R^2\sin^2\alpha} = R\sqrt{3}\sin\alpha,$$

$$DH = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{4R^2\sin^2\alpha - \frac{R^2}{4}\sin^2\alpha} = \frac{1}{2}R\sqrt{15}\sin\alpha.$$

Проекция диагонали равнобедренной трапеции на основание равна полусумме оснований, т. е. $\frac{KN + LM}{2} = NP$ и $\frac{AD + BC}{2} = DH$. Значит,

$$S_{KLMN} = NP \cdot LP = R\sqrt{3}\sin\alpha \cdot R\sin\alpha = R^2\sqrt{3}\sin^2\alpha,$$

$$S_{ABCD} = DH \cdot BH = \frac{1}{2}R\sqrt{15}\sin\alpha \cdot \frac{1}{2}R\sin\alpha = \frac{R^2}{4}\sqrt{15}\sin^2\alpha.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \frac{R^2\sqrt{3}\sin^2\alpha}{\frac{R^2}{4}\sqrt{15}\sin^2\alpha} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

§ 5. Как находить высоты и биссектрисы треугольника

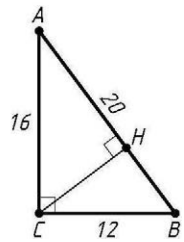
Подготовительные задачи

5.1. Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны 12 и 20 соответственно. Найдите высоту, проведённую из вершины прямого угла.

Ответ: 9,6.

Решение. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с катетом $BC = 12$ и гипотенузой $AB = 20$, CH — его высота. По теореме Пифагора

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{(20-12)(20+12)} = \sqrt{8 \cdot 32} = 16.$$



С одной стороны,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot CH = 10CH,$$

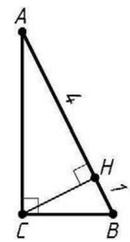
с другой —

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96.$$

Из равенства $10CH = 96$ находим, что $CH = 9{,}6$.

5.2. Найдите высоту прямоугольного треугольника, опущенную на гипотенузу, если известно, что основание этой высоты делит гипотенузу на отрезки, равные 1 и 4.

Ответ: 2.



Решение. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с гипотенузой AB, CH — его высота, $BH = 1$, $AH = 4$.

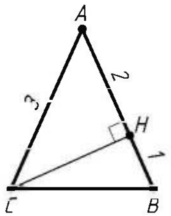
По теореме о высоте прямоугольного треугольника, проведённой из вершины прямого угла,

$$CH^2 = BH \cdot AH = 1 \cdot 4 = 4.$$

Следовательно, $CH = 2$.

5.3. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на боковую сторону, разбивает её на отрезки, равные 2 и 1, считая от вершины треугольника. Найдите эту высоту.

Ответ: $\sqrt{5}$.



Решение. Пусть CH — высота равнобедренного треугольника ABC, опущенная на боковую сторону AB, $AH = 2$, $BH = 1$. Тогда $AC = AB = 3$.

По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ACH находим, что

$$CH^2 = AC^2 - AH^2 = 9 - 4 = 5.$$

Следовательно, $CH = \sqrt{5}$.

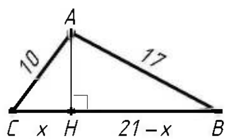
5.4. Стороны треугольника равны 10, 17 и 21. Найдите высоту треугольника, проведённую из вершины наибольшего угла.

Ответ: 8.

Решение.

Пусть стороны AC, AB и BC треугольника ABC равны 10, 17 и 21 соответственно, AH — высота, опущенная на сторону BC.

Первый способ. Поскольку BC — наибольшая сторона треугольника, основание H высоты, опущенной на эту сторону, лежит на отрезке BC. Обозначим $CH = x$. Тогда $BH = BC - CH = 21 - x$.



Выражая по теореме Пифагора из прямоугольных треугольников ACH и ABH квадрат общего катета AH, получим уравнение

$$10^2 - x^2 = 17^2 - (21 - x)^2,$$

из которого найдём, что $x = 6$. Следовательно,

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100 - 36} = 8.$$

Второй способ. Пусть p — полупериметр треугольника ABC, $p = \frac{10+17+21}{2} = 24$. По формуле Герона

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p - AC)(p - AB)(p - BC)} =$$
$$= \sqrt{24(24-10)(24-17)(24-21)} = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84.$$

С другой стороны,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot AH = \frac{21}{2} AH.$$

Из равенства $\frac{21}{2} AH = 84$ находим, что $AH = 8$.

Третий способ. По теореме косинусов

$$\cos\angle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{100 + 441 - 289}{2 \cdot 10 \cdot 21} = \frac{3}{5}.$$

Тогда $\sin\angle ACB = \frac{4}{5}$. Из прямоугольного треугольника ACH находим, что

$$AH = AC\sin\angle ACB = 10\cdot\frac{4}{5} = 8.$$

5.5. В треугольнике ABC известно, что $AB=a$, $AC=b$, $\angle BAC=120^\circ$. Найдите биссектрису AM.

Ответ: $\frac{ab}{a+b}$.

Решение. Поскольку $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABM}+S_{\Delta ACM}$, то

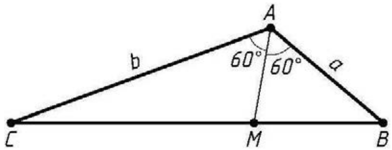
$$\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC = \frac{1}{2}AB\cdot AM\sin\angle BAM + \frac{1}{2}AM\cdot AC\sin\angle CAM,$$

или

$$\frac{1}{2}ab\sin 120^\circ = \frac{1}{2}a\cdot AM\sin 60^\circ + \frac{1}{2}b\cdot AM\sin 60^\circ,$$

$$\frac{1}{2}ab\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}a\cdot AM\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}b\cdot AM\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad ab = AM(a+b).$$

Следовательно, $AM=\frac{ab}{a+b}$.

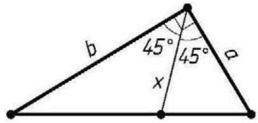


5.6. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Найдите биссектрису, проведённую из вершины прямого угла.

Ответ: $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

Решение. Пусть x — искомая биссектриса. Сумма площадей треугольников, на которые биссектриса разбивает данный треугольник, равна площади данного треугольника, т. е.

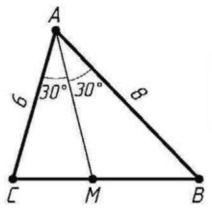
$$\frac{1}{2}ax\sin 45^\circ + \frac{1}{2}bx\sin 45^\circ = \frac{ab}{2}.$$



Отсюда находим, что $x=\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

5.7. В треугольнике ABC известно, что $AB=8$, $AC=6$, $\angle BAC=60^\circ$. Найдите биссектрису AM.

Ответ: $\frac{24\sqrt{3}}{7}$.



Решение. Поскольку $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABM}+S_{\triangle ACM}$, то

$$\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC =$$

$$=\frac{1}{2}AB\cdot AM\sin\angle BAM+\frac{1}{2}AM\cdot AC\sin\angle CAM,$$

или

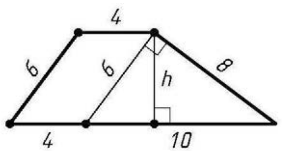
$$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 6\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot AM\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot AM\sin 30^\circ,$$

или $12\sqrt{3}=\frac{1}{2}\cdot 7AM$. Следовательно, $AM=\frac{24\sqrt{3}}{7}$.

5.8. Найдите высоту трапеции, боковые стороны которой равны 6 и 8, а основания равны 4 и 14.

Ответ: $\frac{24}{5}$.

Решение. Через вершину меньшего основания трапеции проведём прямую, параллельную боковой стороне. Эта прямая отсекает от трапеции треугольник со сторонами 6, 8 и 10. Этот треугольник прямоугольный. Его высота $h=\frac{6\cdot 8}{10}=\frac{24}{5}$ является также высотой трапеции.



Тренировочные задачи

5.9. Найдите высоты треугольника, если его площадь равна S, а углы равны α, β и γ.

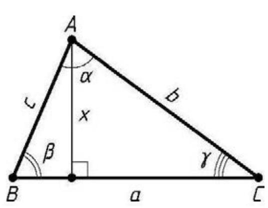
Ответ: $\frac{\sqrt{2S\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}{\sin\alpha}$; $\frac{\sqrt{2S\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}{\sin\beta}$; $\frac{\sqrt{2S\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}{\sin\gamma}$.

Решение. Пусть высоты, опущенные на стороны $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, равны x, y и z соответственно. Тогда

$$b=\frac{x}{\sin\gamma},\quad c=\frac{x}{\sin\beta},\quad S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{\frac{1}{2}x^2\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Отсюда находим, что

$$x^2=\frac{2S\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$



Следовательно,

$$x=\frac{\sqrt{2S\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}{\sin\alpha}.$$

Аналогично найдём y и z.

5.10. Расстояния от точки M, лежащей внутри треугольника ABC, до его сторон AC и BC соответственно равны 2 и 4. Найдите расстояние от точки M до прямой AB, если $AB=10$, $BC=17$, $AC=21$.

Ответ: $\frac{29}{5}$.

Решение. По формуле Герона

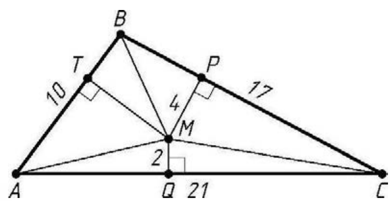
$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{24\cdot 3\cdot 7\cdot 14}=7\cdot 3\cdot 4=84.$$

Пусть P и Q — проекции точки M на стороны BC и AC, а T — на сторону AB. Тогда

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta BMC}+S_{\Delta AMC}+S_{\Delta AMB}=$$
$$=\frac{1}{2}BC\cdot MP+\frac{1}{2}AC\cdot MQ+\frac{1}{2}AB\cdot MT=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 17\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 21\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 10\cdot MT=34+21+5MT.$$

Отсюда находим, что

$$MT=\frac{S_{\Delta ABC}-34-21}{5}=\frac{84-34-21}{5}=\frac{29}{5}.$$

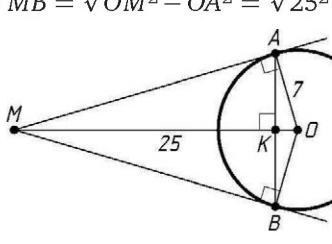


5.11. К окружности радиуса 7 проведены две касательные из одной точки, удалённой от центра на расстояние, равное 25. Найдите расстояние между точками касания.

Ответ: 13,44.

Решение. Пусть прямые, проходящие через точку M, касаются данной окружности в точках A и B, O — центр окружности, K — середина AB. Тогда

$$MA=MB=\sqrt{OM^2-OA^2}=\sqrt{25^2-7^2}=24.$$



Поскольку $OM \cdot AK = AM \cdot AO$ (удвоенная площадь треугольника OAM), то

$$AK = \frac{AM \cdot AO}{OM} = \frac{24 \cdot 7}{25} = \frac{168}{25}.$$

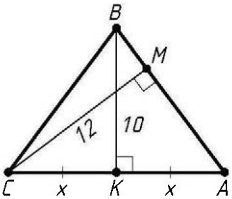
Следовательно,

$$AB = 2AK = \frac{336}{25} = 13{,}44.$$

5.12. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание, равна 10, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12.

Ответ: 75.

Решение. Пусть BK и CM — высоты равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$, $BK = 10$, $CM = 12$). Обозначим $AK = KC = x$. Тогда



$$AB^2 = BK^2 + AK^2 = 100 + x^2,$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BK = \frac{1}{2}AB \cdot CM.$$

Поэтому

$$AC \cdot BK = AB \cdot CM, \quad \text{или} \quad 2x \cdot 10 = \sqrt{100 + x^2} \cdot 12.$$

Из этого уравнения находим, что $x = \frac{15}{2}$. Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BK = 75.$$

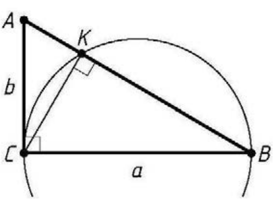
5.13. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке K. Найдите площадь треугольника CKB, если катет BC равен a, а катет AC равен b.

Ответ: $\frac{a^3 b}{2(a^2 + b^2)}$.

Решение. По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Точка K лежит на окружности с диаметром BC, поэтому $\angle BKC = 90^\circ$. Треугольник CBK подобен треугольнику ABC по двум углам, причём коэффициент подобия равен $\frac{BC}{AB} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.



Поскольку площадь треугольника CBK равна площади треугольника ABC, умноженной на квадрат коэффициента подобия, то

$$S_{\Delta CBK} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}ab = \frac{a^3 b}{2(a^2 + b^2)}.$$

5.14. На высоте CD, опущенной из вершины C прямоугольного треугольника ABC на гипотенузу AB, как на диаметре построена окружность, которая пересекает катет AC в точке E, а катет BC в точке F. Найдите площадь четырёхугольника $CFDE$, если катет AC равен b, а катет BC равен a.

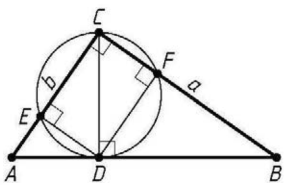
Ответ: $\dfrac{a^3b^3}{(a^2+b^2)^2}$.

Решение. Поскольку $2S_{\triangle ABC}=AB\cdot CD=AC\cdot BC$, то

$$CD=BC\cdot\frac{AC}{AB}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Поскольку DF — высота прямоугольного треугольника CDB, проведённая из вершины прямого угла, то

$$CF=\frac{CD^2}{BC}=\frac{ab^2}{a^2+b^2}.$$



Аналогично находим, что $CE=\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}$.

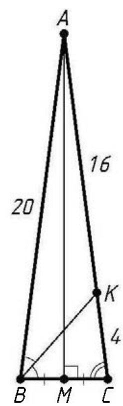
Поскольку $CFDE$ — прямоугольник, то

$$S_{CFDE}=CF\cdot CE=\frac{a^3b^3}{(a^2+b^2)^2}.$$

5.15. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины угла при основании.

Ответ: 6.

Решение. Пусть BK — биссектриса равнобедренного треугольника ABC $(AB=AC=20,\ BC=5)$, M — середина BC.



Из прямоугольного треугольника AMC находим, что

$$\cos\angle C=\frac{MC}{AC}=\frac{1}{8}.$$

По свойству биссектрисы треугольника

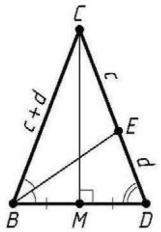
$$\frac{AK}{KC}=\frac{AB}{BC}=4.$$

Поэтому $KC=\frac{1}{5}AC=4$. По теореме косинусов из треугольника BKC находим, что

$$BK^2=BC^2+KC^2-2BC\cdot KC\cos\angle C=25+16-2\cdot5\cdot4\cdot\frac{1}{8}=36.$$

5.16. В равнобедренном треугольнике BCD с основанием BD проведена биссектриса BE. Известно, что $CE=c$ и $DE=d$. Найдите BE.

Ответ: $d\sqrt{2+\dfrac{d}{c}}$.



Решение. Первый способ. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{BC}{BD}=\frac{CE}{DE}$, откуда находим, что

$$BD=\frac{BC\cdot DE}{CE}=\frac{(c+d)d}{c}.$$

Пусть CM — высота треугольника BCD. Тогда

$$DM=\frac{1}{2}BD=\frac{(c+d)d}{2c}.$$

Из прямоугольного треугольника CMD находим, что

$$\cos\angle BDC=\frac{DM}{CD}=\frac{\frac{(c+d)d}{2c}}{c+d}=\frac{d}{2c}.$$

По теореме косинусов из треугольника BDE находим, что

$$BE^2=BD^2+DE^2-2BD\cdot DE\cos\angle BDC=$$

$$=\left(\frac{(c+d)d}{c}\right)^2+d^2-2\cdot\frac{(c+d)d}{c}\cdot d\cdot\frac{d}{2c}=d^2\left(2+\frac{d}{c}\right).$$

Следовательно, $BE=d\sqrt{2+\frac{d}{c}}$.

Второй способ. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{BC}{BD}=\frac{CE}{DE}$, откуда находим, что

$$BD=\frac{BC\cdot DE}{CE}=\frac{(c+d)d}{c}.$$

По формуле для квадрата биссектрисы

$$BE^2=BC\cdot BD-CE\cdot DE=(c+d)\cdot\frac{(c+d)d}{c}-cd=d^2\left(2+\frac{d}{c}\right).$$

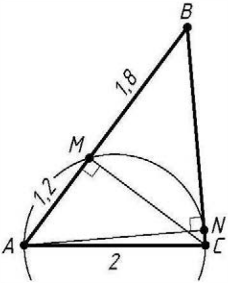
Следовательно, $BE=d\sqrt{2+\frac{d}{c}}$.

5.17. В треугольнике ABC на стороне AC как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону AB в точке M, а сторону BC — в точке N. Известно, что $AC=2$, $AB=3$, $AM:MB=2:3$. Найдите AN.

Ответ: $\frac{24}{\sqrt{145}}$.

Решение. Поскольку точки M и N лежат на окружности с диаметром AC, то

$$\angle AMC=\angle ANC=90^\circ.$$



По теореме Пифагора

$$MC^2 = AC^2 - AM^2 = 2^2 - \left(\frac{2}{5}\cdot 3\right)^2 = \frac{64}{25},$$

$$BC = \sqrt{MC^2 + BM^2} = \sqrt{\frac{64}{25} + \left(\frac{3}{5}\cdot 3\right)^2} = \frac{\sqrt{145}}{5}.$$

Поскольку

$$AB\cdot CM = BC\cdot AN, \quad \text{то} \quad AN = \frac{AB\cdot CM}{BC} = \frac{24}{\sqrt{145}}.$$

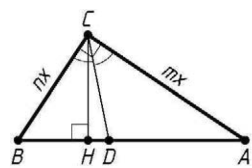
5.18. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса CD из вершины прямого угла C. Известно, что $AD = m$, $BD = n$. Найдите высоту, опущенную из вершины C.

Ответ: $\dfrac{mn(m+n)}{m^2+n^2}$.

Решение. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам, поэтому $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{m}{n}$. Положим $AC = mx$, $BC = nx$. По теореме Пифагора

$$AB^2 = AC^2 + BC^2, \quad (m+n)^2 = m^2x^2 + n^2x^2,$$

откуда находим, что $x^2 = \dfrac{(m+n)^2}{m^2+n^2}$.



Пусть CH — искомая высота. Выражая площадь треугольника ABC двумя способами, получим, что

$$\frac{1}{2}AB\cdot CH = \frac{1}{2}BC\cdot AC,$$

следовательно,

$$CH = \frac{BC\cdot AC}{AB} = \frac{xn\cdot xm}{m+n} = x^2\cdot\frac{mn}{m+n} = \frac{(m+n)^2}{m^2+n^2}\cdot\frac{mn}{m+n} = \frac{mn(m+n)}{m^2+n^2}.$$

5.19. В треугольнике ABC угол C равен 60°, а биссектриса CD равна $5\sqrt{3}$. Длины сторон AC и BC относятся как $5:2$. Найдите тангенс угла A и сторону BC.

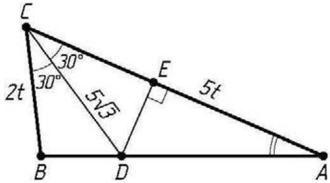
Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; 7.

Решение. Положим $BC = 2t$, $AC = 5t$. Тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot AC\sin 60^\circ = \frac{5}{2}t^2\sqrt{3},$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCD} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot CD\sin 30^\circ + \frac{1}{2}\cdot AC\cdot CD\sin 30^\circ =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2t\cdot 5\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 5t\cdot 5\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot 7t\cdot 5\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{35}{4}t\sqrt{3}.$$



Из уравнения $\frac{5}{2}t^2\sqrt{3} = \frac{35}{4}t\sqrt{3}$ находим, что $t = \frac{7}{2}$. Тогда $BC = 2t = 7$, $AC = 5t = \frac{35}{2}$.

Пусть E — проекция точки D на прямую AC. Поскольку $BC < AC$, то $\angle DAC = \angle BAC < 90^\circ$, поэтому точка E лежит на стороне AC, а не на её продолжении. Тогда из прямоугольных треугольников CED и AED находим, что

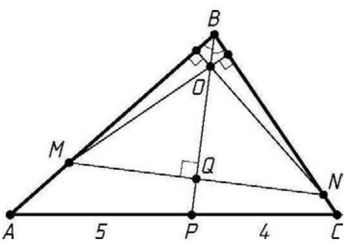
$$DE = CD\sin 30^\circ = \frac{1}{2}CD = \frac{5\sqrt{3}}{2}, \quad CE = CD\cos 30^\circ = 5\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{2},$$

$$AE = AC - CE = \frac{35}{2} - \frac{15}{2} = 10, \quad \operatorname{tg}\angle DAE = \frac{DE}{AE} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

5.20. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC отмечены точки M и N соответственно, причём $BM = BN$. Через точку M проведена прямая, перпендикулярная BC, а через точку N — прямая, перпендикулярная AB. Эти прямые пересекаются в точке O. Продолжение отрезка BO пересекает сторону AC в точке P и делит её на отрезки $AP = 5$ и $PC = 4$. Найдите BP, если известно, что $BC = 6$.

Ответ: 5.

Решение. Высоты треугольника BMN, проведённые из вершин M и N, пересекаются в точке O, значит, его высота, проведённая из вершины B, также проходит через точку O, а так как треугольник BMN равнобедренный, то луч BO — биссектриса угла MBN. Тогда BP — биссектриса треугольника ABC. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{CP} = \frac{5}{4}$, откуда находим, что



$$AB = BC\cdot\frac{AP}{CP} = 6\cdot\frac{5}{4} = \frac{15}{2}.$$

По формуле для биссектрисы треугольника

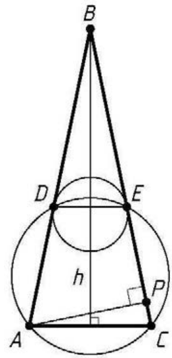
$$BP^2 = BC\cdot AB - CP\cdot AP = 6\cdot\frac{15}{2} - 4\cdot 5 = 45 - 20 = 25.$$

Следовательно, $BP = 5$.

5.21. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E соответственно. Найдите высоту треугольника ABC, опущенную из вершины A, если $AB = 5$, $AC = 2$, а точки A, D, E, C лежат на одной окружности.

Ответ: $\frac{4\sqrt{6}}{5}$.

Решение. По свойству вписанного четырёхугольника $\angle DAC = 180^\circ - \angle CED = \angle BED$. Аналогично $\angle ACE = \angle BDE$, а так как $BD = BE$ как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, то $\angle BDE = \angle BED$. Значит, $\angle BAC = \angle BCA$, треугольник ABC равнобедренный, $AB = BC = 5$.



Пусть h — высота треугольника ABC, опущенная из вершины B. Тогда

$$h = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{25 - 1} = 2\sqrt{6}.$$

Если AP — высота треугольника ABC, то $AC \cdot h = BC \cdot AP$. Следовательно,

$$AP = \frac{AC \cdot h}{BC} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{6}}{5} = \frac{4\sqrt{6}}{5}.$$

5.22. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AE и CD. Найдите длины отрезков CD, CE, DE и расстояние между центрами окружностей, вписанной в треугольник ABC и описанной около треугольника ABC, если $AC = 2$, $BC = 4$, $\angle ACB = \arccos\frac{11}{16}$.

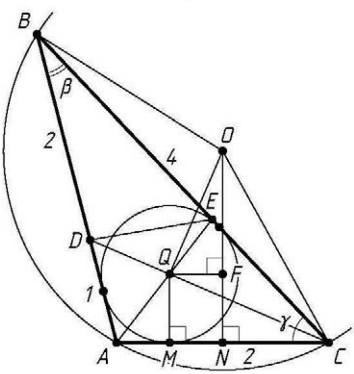
Ответ: $CD = \sqrt{6}$, $CE = \frac{8}{5}$, $DE = \frac{\sqrt{34}}{5}$, $\rho = 2\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Решение. Обозначим $\angle ACB = \gamma$, $\angle ABC = \beta$. По условию задачи $\cos\gamma = \frac{11}{16}$. Тогда

$$\sin\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\gamma} = \sqrt{1 - \frac{121}{256}} = \frac{3\sqrt{15}}{16}.$$

По теореме косинусов

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC\cos\gamma} = \sqrt{4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{11}{16}} = \sqrt{20 - 11} = 3.$$



По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{BC}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\quad \frac{CE}{BE}=\frac{AC}{AB}=\frac{2}{3},$$

поэтому

$$AD=\frac{1}{3}AB=1,\quad BD=\frac{2}{3}AB=2,$$

$$CE=\frac{2}{5}BC=\frac{2}{5}\cdot 4=\frac{8}{5},\quad BE=\frac{12}{5}.$$

По формуле для биссектрисы треугольника

$$CD=\sqrt{AC\cdot BC-AD\cdot BD}=\sqrt{2\cdot 4-1\cdot 2}=\sqrt{6}.$$

Пусть R — радиус описанной окружности треугольника ABC, O — центр этой окружности. По теореме синусов

$$R=\frac{AB}{2\sin\gamma}=\frac{3}{2\cdot\frac{3\sqrt{15}}{16}}=\frac{8}{\sqrt{15}},\quad \sin\beta=\frac{AC}{2R}=\frac{2}{2\cdot\frac{8}{\sqrt{15}}}=\frac{\sqrt{15}}{8}.$$

Тогда $\cos\beta=\frac{7}{8}$. Из треугольника BDE по теореме косинусов находим, что

$$DE=\sqrt{BD^2+BE^2-2BD\cdot BE\cos\beta}=\sqrt{4+\frac{144}{25}-2\cdot 2\cdot\frac{12}{5}\cdot\frac{7}{8}}=\frac{\sqrt{34}}{5}.$$

Пусть r — радиус вписанной окружности треугольника ABC, p — полупериметр треугольника, S — площадь. Тогда

$$p=\frac{2+3+4}{2}=\frac{9}{2},\quad S=\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin\gamma=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{3\sqrt{15}}{16}=\frac{3\sqrt{15}}{4}.$$

Следовательно,

$$r=\frac{S}{p}=\frac{\frac{3\sqrt{15}}{4}}{\frac{9}{2}}=\frac{\sqrt{15}}{6}.$$

Пусть вписанная окружность с центром Q касается стороны AC треугольника ABC в точке M, а N — середина этой стороны. Тогда

$$CM=p-AB=\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2},\quad MN=|CM-CN|=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}.$$

По теореме Пифагора

$$ON=\sqrt{OC^2-CN^2}=\sqrt{R^2-CN^2}=\sqrt{\frac{64}{15}-1}=\frac{7}{\sqrt{15}}.$$

Искомый отрезок OQ есть бóльшая боковая сторона прямоугольной трапеции $MNOQ$ с основаниями MQ и ON. Пусть F — основание перпендикуляра, опущенного из точки Q на ON. Тогда

$$OF = |ON - FN| = |ON - QM| = \left|\frac{7}{\sqrt{15}} - \frac{5}{2\sqrt{15}}\right| = \frac{9}{2\sqrt{15}},$$

$$QF = MN = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\rho = OQ = \sqrt{QF^2 + OF^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{27}{20}} = 2\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

(Заметим, что отрезок OQ можно было найти по формуле Эйлера: $\rho = \sqrt{R^2 - 2Rr}$.)

5.23. В треугольнике ABC отношение стороны BC к стороне AC равно 3, а $\angle ACB = \alpha$. Из вершины C проведены два луча, делящие угол ACB на три равные части. Найдите отношение отрезков этих лучей, заключённых внутри треугольника ABC.

Ответ: $\dfrac{2\cos\frac{\alpha}{3} + 3}{6\cos\frac{\alpha}{3} + 1}$.

Решение. Пусть M и N — точки пересечения указанных лучей со стороной AB (M лежит между A и N). Обозначим $AC = x$, $CM = y$, $CN = z$. Тогда $BC = 3x$.

$$S_{\Delta ACN} = \frac{1}{2}xz\sin\frac{2\alpha}{3} = S_{\Delta ACM} + S_{\Delta MCN} = \frac{1}{2}xy\sin\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2}yz\sin\frac{\alpha}{3}.$$

Отсюда находим, что $y = \dfrac{2xz\cos\frac{\alpha}{3}}{x+z}$. Из треугольника MCB аналогично находим, что

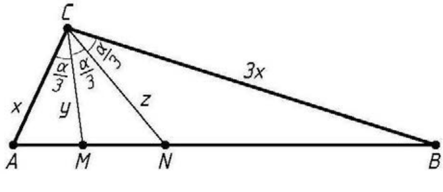
$$z = \frac{6xy\cos\frac{\alpha}{3}}{y+3x}.$$

Выразим x из полученных равенств:

$$x = \frac{yz}{2z\cos\frac{\alpha}{3} - y}, \quad x = \frac{yz}{6y\cos\frac{\alpha}{3} - 3z}.$$

Приравняв правые части этих выражений, получим уравнение

$$2z\cos\frac{\alpha}{3} - y = 6y\cos\frac{\alpha}{3} - 3z.$$



Разделим обе части этого уравнения на z и найдём нужное отношение $\frac{y}{z}$:

$$\frac{y}{z} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{3}+3}{6\cos\frac{\alpha}{3}+1}.$$

5.24. Биссектриса CD угла ACB при основании BC равнобедренного треугольника ABC делит сторону AB так, что $AD = BC$. Найдите биссектрису CD и площадь треугольника ABC, если $BC = 2$.

Ответ: 2; $\operatorname{tg} 72^\circ = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

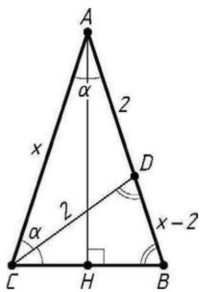
Решение. Первый способ. Обозначим $AB = AC = x$. Тогда $BD = x - 2$. По формуле для квадрата биссектрисы треугольника

$$CD^2 = AC \cdot BC - AD \cdot BD = x \cdot 2 - 2 \cdot (x-2) = 2x - 2x + 4 = 4.$$

Значит, $CD = 2$.

Поскольку $CD = AD = BC$, треугольники ACD и CBD равнобедренные. Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда

$$\angle ACD = \angle CAD = \alpha, \quad \angle CBD = \angle BDC = \angle CAD + \angle ACD = 2\alpha,$$



а так как сумма углов треугольника BCD равна 180°, получаем уравнение

$$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ,$$

из которого находим, что $\alpha = 36^\circ$.

Пусть AH — высота треугольника ABC. Тогда $BH = CH = 1$. Из прямоугольного треугольника ABH находим, что

$$AH = BH \operatorname{tg} \angle CBA = 1 \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} 72^\circ.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{tg} 72^\circ = \operatorname{tg} 72^\circ.$$

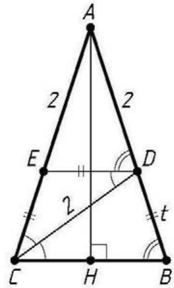
Если воспользоваться свойством биссектрисы треугольника, то можно легко вычислить $\operatorname{tg} 72^\circ$. Действительно,

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{2}{x-2} \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 + \sqrt{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 72^\circ = \cos \angle ABC = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} 72^\circ = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 72^\circ} - 1} = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2 - 1} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

Второй способ. Пусть прямая, проведённая через точку D параллельно BC, пересекает сторону AC в точке E. Тогда $\angle CDE = \angle BCD = \angle DCE$, поэтому треугольник CDE равнобедренный. Значит, $BD = CE = DE$, а так как $\angle ADE = \angle ABC$ и $AD = BC$, то треугольник BCD равен треугольнику ADE по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $CD = AE = AD = 2$.



Обозначим $CE = BD = t$. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC}$, или $\frac{2}{t+2} = \frac{t}{2}$, откуда $t = \sqrt{5} - 1$, поэтому $AB = t + 2 = \sqrt{5} + 1$.

Пусть AH — высота треугольника ABC. По теореме Пифагора

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2 - 1} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$$

5.25. В треугольнике KLM проведена биссектриса KP. Окружность, вписанная в треугольник KLP, касается стороны KL в точке Q, причём $LQ = a$. На сторонах KL и LM выбраны точки E и R соответственно так, что прямая ER проходит через центр окружности, вписанной в треугольник KLM. Найдите длину биссектрисы KP, если известно, что $EL + LR = b$, а отношение площадей треугольников KLP и ELR равно α.

Ответ: $\alpha b - 2a$.

Решение. Первый способ. Пусть O — центр окружности радиуса r, вписанной в треугольник KLM, A и B — её точки касания со сторонами LM и KL соответственно. Тогда

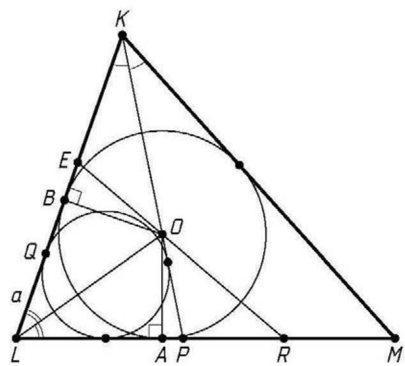
$$S_{\Delta KLP} = \frac{1}{2} LP \cdot OA + \frac{1}{2} KL \cdot OB = \frac{1}{2}(LP + KL)r,$$

$$S_{\Delta ELR} = \frac{1}{2} LR \cdot OA + \frac{1}{2} LE \cdot OB = \frac{1}{2}(LR + LE)r = \frac{1}{2} br,$$

а так как

$$\alpha = \frac{S_{\Delta KLP}}{S_{\Delta ELR}} = \frac{LP + KL}{b},$$

то $LP + KL = \alpha b$.



Пусть p — полупериметр треугольника KLP. Окружность, вписанная в треугольник KLP, касается стороны KL в точке Q, поэтому

$$a = LQ = p - KP = \frac{LP + KL - KP}{2} = \frac{\alpha b - KP}{2},$$

откуда находим, что $KP = \alpha b - 2a$.

Второй способ. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник KLM. Тогда LO — биссектриса треугольников KLP и ELR. Обозначим $\angle KLM = \gamma$. По формуле для биссектрисы треугольника

$$LO = \frac{2 \cdot LE \cdot LR \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{LE + LR} \quad \text{и} \quad LO = \frac{2 \cdot LK \cdot LP \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{LK + LP}.$$

Поэтому

$$\frac{LK \cdot LP}{LK + LP} = \frac{LE \cdot LR}{LE + LR} = \frac{LE \cdot LR}{b} \Rightarrow LK + LP = b \cdot \frac{LK \cdot LP}{LE \cdot LR},$$

а так как

$$\frac{S_{\Delta KLP}}{S_{\Delta ELR}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot LK \cdot LP \cdot \sin\gamma}{\frac{1}{2} \cdot LE \cdot LR \cdot \sin\gamma} = \frac{LK \cdot LP}{LE \cdot LR} = \alpha,$$

то $LK + LP = \alpha b$.

Пусть p — полупериметр треугольника KLP. Окружность, вписанная в треугольник KLP, касается стороны KL в точке Q, поэтому

$$a = LQ = p - KP = \frac{LP + KL - KP}{2} = \frac{\alpha b - KP}{2},$$

откуда находим, что $KP = \alpha b - 2a$.

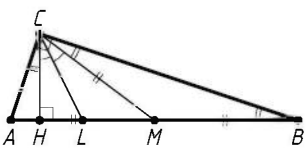
Задачи на доказательство и вычисление

5.26.1. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены медиана CM и высота CH.

а) Докажите, что биссектриса CL треугольника ABC является также биссектрисой треугольника CMH.

б) Найдите CL, если $CM = 10$, $CH = 6$.

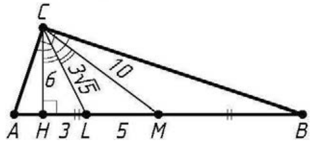
Ответ: $3\sqrt{5}$.



Решение. а) Предположим, что точка M лежит на отрезке BH. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, поэтому треугольник BMC равнобедренный. Значит, $\angle BCM = \angle CBM = \angle ACH$. Следовательно,

$$\angle HCL = \angle ACL - \angle ACH = \angle BCL - \angle BCM = \angle MCL.$$

б) Из прямоугольного треугольника CMH находим, что $MH = 8$. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам, значит,



$$\frac{HL}{ML} = \frac{CH}{CM} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

а так как $MH = 8$, то $HL = 3$ и $LM = 5$. По теореме Пифагора находим, что

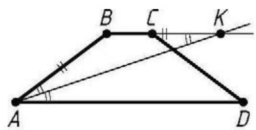
$$CL = \sqrt{CH^2 + HL^2} = \sqrt{36+9} = 3\sqrt{5}.$$

5.27.1. Дана трапеция $ABCD$. Биссектриса угла BAD пересекает продолжение основания BC в точке K.

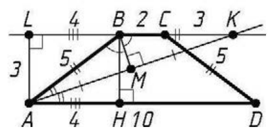
а) Докажите, что треугольник ABK равнобедренный.

б) Найдите биссектрису BM треугольника ABK, если $AD = 10$, $BC = 2$, $AB = CD = 5$.

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{2}$.



Решение. а) Поскольку $\angle BAK = \angle DAK = \angle AKB$, два угла треугольника ABK равны. Следовательно, этот треугольник равнобедренный.



б) Пусть BH — высота равнобедренной трапеции $ABCD$. Тогда

$$AH = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{10-2}{2} = 4$$

(см. п. 5 приложения 2). Из прямоугольного треугольника ABH находим, что $BH = 3$. Пусть AL — ещё одна высота трапеции. Тогда

$$BL = AH = 4, \quad KL = KB + BL = AB + BL = 5 + 4 = 9.$$

Из прямоугольного треугольника ALK находим, что

$$AK = \sqrt{AL^2 + KL^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90}.$$

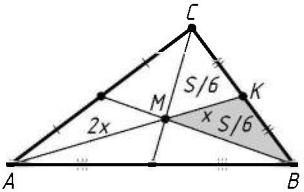
Биссектриса BM равнобедренного треугольника ABK является его высотой и медианой, поэтому $AM = \frac{1}{2}AK = \frac{\sqrt{90}}{2}$. Следовательно,

$$BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{25 - \frac{90}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

5.28.1. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M.

а) Докажите, что треугольники AMB, AMC и BMC равновелики.

б) Известно, что треугольник ABC прямоугольный, а точка M удалена от катетов на расстояния 3 и 4. Найдите расстояние от этой точки до гипотенузы.



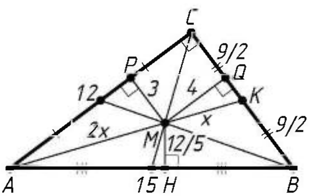
Ответ: 2,4.

Решение. а) Пусть площадь треугольника ABC равна S, K — середина стороны BC. Медиана разбивает треугольник на два равновеликих, поэтому $S_{\triangle AKB}=\frac{S}{2}$. Медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении $2:1$, считая от вершины, поэтому $MK=\frac{1}{3}AK$. Значит,

$$S_{\triangle BMK}=\frac{1}{3}S_{\triangle AKB}=\frac{1}{3}\cdot\frac{S}{2}=\frac{S}{6}.$$

Аналогично докажем, что площадь каждого из треугольников, на которые медианы разбивают данный треугольник, равна $\frac{S}{6}$. Тогда площадь каждого из треугольников AMB, AMC и BMC равна $\frac{S}{3}$.

б) Пусть P и Q — проекции точки M на катеты AC и BC соответственно, $MP=3$, $MQ=4$. Поскольку $\frac{AC}{AP}=\frac{AK}{AM}=\frac{3}{2}$, коэффициент подобия треугольников ACK и APM равен $\frac{3}{2}$. Поэтому $CK=\frac{3}{2}PM=\frac{9}{2}$, а $BC=9$. Аналогично находим, что $\frac{1}{2}AC=\frac{3}{2}MQ=6$, а $AC=12$. Тогда



$$AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{81+144}=15.$$

Пусть MH — высота треугольника AMB. Тогда

$$S_{\triangle AMB}=\frac{1}{2}AB\cdot MH=\frac{15}{2}MH.$$

С другой стороны,

$$S_{\triangle AMB}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AC\cdot BC=18.$$

Из равенства $\frac{15}{2}MH=18$ находим, что $MH=\frac{12}{5}$.

5.29.1. Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30°. Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC=120^\circ$.

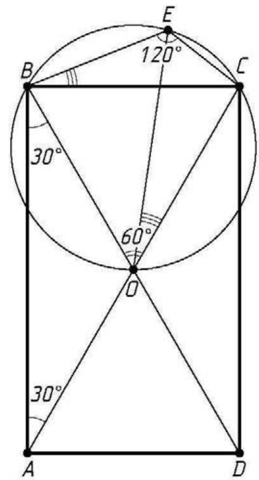
а) Докажите, что $\angle CBE=\angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K. Найдите EK, если $BE=40$ и $CE=24$.

Ответ: 113.

Решение. а) По теореме о внешнем угле треугольника $\angle BOC=$ $=2\angle BAO=2\cdot 30^\circ=60^\circ$. Поэтому

$$\angle BEC+\angle BOC=120^\circ+60^\circ=180^\circ.$$

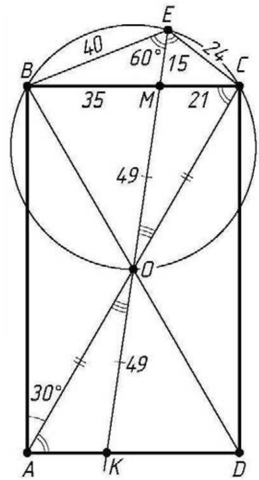


Значит, точки B, E, C и O лежат на одной окружности. Вписанные в эту окружность углы CBE и COE опираются на одну и ту же дугу, следовательно, $\angle CBE = \angle COE$.

б) По теореме косинусов

$$BC = \sqrt{BE^2 + CE^2 - 2BE \cdot CE \cos 120^\circ} =$$
$$= \sqrt{40^2 + 24^2 - 2 \cdot 40 \cdot 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} =$$
$$= 8\sqrt{25+9+15} = 8 \cdot 7 = 56.$$

Вписанные углы BEO и CEO опираются на равные хорды BO и CO, значит, EO — биссектриса угла BEC. Пусть M — точка её пересечения со стороной BC. По формуле для биссектрисы треугольника (см. п. 21а приложения 2)



$$EM = \frac{2BE \cdot CE \cos\left(\frac{1}{2}\angle BEC\right)}{BE + CE} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 24 \cos 60^\circ}{40 + 24} = 15.$$

По свойству биссектрисы треугольника $\frac{CM}{BM} = \frac{CE}{BE} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$, значит, $CM = \frac{3}{8}BC = \frac{3}{8} \cdot 56 = 21$, $BM = 35$.

По теореме о произведении пересекающихся хорд $EM \cdot MO = BM \cdot CM$, откуда находим, что $MO = \frac{BM \cdot CM}{EM} = \frac{35 \cdot 21}{15} = 49$. Треугольники COM и AOK равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, поэтому $OK = OM$. Следовательно,

$$EK = EM + 2OM = 15 + 98 = 113.$$

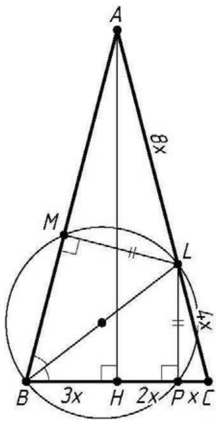
5.30.1. Окружность, построенная на биссектрисе BL равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, пересекает основание BC в точке P. Боковая сторона треугольника вдвое больше его основания.

а) Докажите, что $BP = 5CP$.

б) Пусть указанная окружность пересекает сторону AB в точке M. Найдите BL, если $ML = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

Ответ: $\sqrt{10}$.

Решение. а) Пусть AH — высота треугольника ABC. Точка P лежит на окружности с диаметром BL, поэтому $\angle BPL = 90^\circ$, значит, $LP \parallel AH$.



По теореме о пропорциональных отрезках и свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{CP}{PH} = \frac{CL}{LA} = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Значит,

$$PC = \frac{1}{3}CH = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}BC = \frac{1}{6}BC.$$

Следовательно, $BP = 5CP$.

б) Пусть $BC = 6x$, $AB = AC = 12x$. Тогда

$$CP = \frac{1}{6}BC = x, \quad CL = \frac{1}{3}AC = 4x.$$

Точка L лежит на биссектрисе угла ABC, поэтому она равноудалена от сторон этого угла, а так как $\angle BML = \angle BPL = 90^\circ$, то $LP = LM = \frac{\sqrt{15}}{2}$. По теореме Пифагора $CL^2 = LP^2 + CP^2$, или $16x^2 = \frac{15}{4} + x^2$. Отсюда находим, что $x = \frac{1}{2}$. Тогда $PB = 5x = \frac{5}{2}$. Следовательно,

$$BL = \sqrt{BP^2 + LP^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{15}{4}} = \sqrt{10}.$$

5.31.1. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 4$, $BC = 6$ и $AC = 8$.

а) Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения медиан и центр вписанной окружности, параллельна стороне BC.

б) Найдите длину биссектрисы треугольника ABC, проведённой из вершины A.

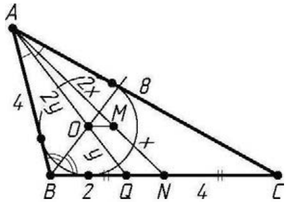
Ответ: $2\sqrt{6}$.

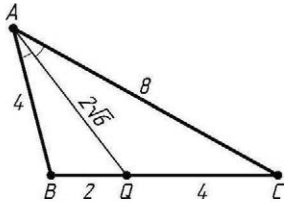
Решение. а) Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC, AN — медиана треугольника, M — точка пересечения медиан. Поскольку O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, биссектриса AQ проходит через точку O. По теореме о биссектрисе треугольника $\frac{BQ}{CQ} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, значит, $BQ = \frac{1}{3}BC = 2$, а так как BO — биссектриса треугольника ABQ, то $\frac{AO}{OQ} = \frac{AB}{BQ} = \frac{4}{2} = 2$.

Поскольку AN — медиана треугольника ABC, то $\frac{AM}{MN} = 2$. Таким образом, $\frac{AO}{OQ} = \frac{AM}{MN}$. Следовательно, $OM \parallel BC$.

б) По теореме косинусов

$$\cos\angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB\cdot BC} = \frac{16+36-64}{2\cdot4\cdot6} = -\frac{1}{4}.$$





Следовательно,

$$AQ=\sqrt{AB^2+BQ^2-2AB\cdot BQ\cos\angle ABC}=\sqrt{16+4+2\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{1}{4}}=2\sqrt{6}.$$

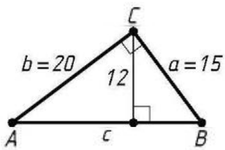
5.32.1. Высоты, проведённые из вершин A, B и C треугольника ABC, равны 20, 15 и 12 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите длину биссектрисы треугольника, проведённой из вершины C.

Ответ: $\dfrac{60\sqrt{2}}{7}$.

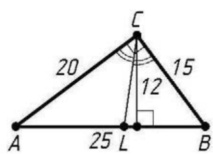
Решение. а) Обозначим $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Поскольку площадь треугольника равна половине произведения стороны на проведённую к ней высоту, то $20a=15b=12c$, откуда $a=\dfrac{3c}{5}$ и $b=\dfrac{4c}{5}$. Треугольник ABC прямоугольный, так как



$$BC^2+AC^2=a^2+b^2=\left(\frac{3c}{5}\right)^2+\left(\frac{4c}{5}\right)^2=c^2=AB^2.$$

б) Площадь треугольника ABC равна половине произведения катетов, поэтому $ab=12c$, или $\dfrac{3c}{5}\cdot\dfrac{4c}{5}=12c$, откуда находим, что $AB=c=25$. Тогда $BC=a=\dfrac{3c}{5}=15$ и $AC=b=\dfrac{4c}{5}=20$.

Пусть CL — биссектриса треугольника ABC. Тогда



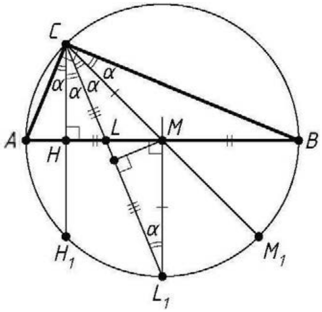
$$CL=\frac{2BC\cdot AC\cos\frac{1}{2}\angle ACB}{BC+AC}=\frac{2\cdot 20\cdot 15\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{20+15}=\frac{60\sqrt{2}}{7}$$

(см. п. 21а приложения 2).

5.33.1. В треугольнике ABC высота CH, биссектриса CL и медиана CM делят угол ACB на четыре равных угла.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите длины высоты CH, биссектрисы CL и медианы CM, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R.

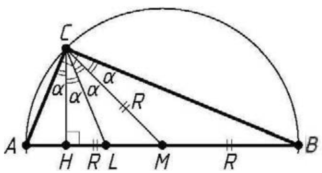


Ответ: $\frac{R\sqrt{2}}{2}$, $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, R.

Решение. а) Пусть лучи CH, CL и CM пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках H_1, L_1 и M_1 соответственно. Обозначим

$$\angle ACH_1 = \angle H_1CL_1 = \angle L_1CM_1 = \angle BCM_1 = \alpha.$$

Из равенства дуг AL_1 и BL_1, не содержащих точку C, следует что L_1 — середина дуги AB, а так как M — середина хорды AB, то прямая L_1M — серединный перпендикуляр к этой хорде. Значит, прямая L_1M проходит через центр окружности. Прямые CH и L_1M параллельны, поэтому $\angle CL_1M = \angle MCL_1 = \alpha$, следовательно, треугольник CML_1 равнобедренный. Его высота, опущенная на основание CL_1, лежит на серединном перпендикуляре к хорде CL_1, а значит, также проходит через центр окружности. Точка M лежит на двух различных диаметрах окружности, поэтому она совпадает с центром окружности. Тогда AB — также диаметр. Следовательно, $\angle ACB = 90°$.



б) Поскольку радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R, гипотенуза AB треугольника равна $2R$. Следовательно, $CM = \frac{1}{2}AB = R$.

Из равенства $4\alpha = 90°$ следует, что $\alpha = 22{,}5°$. Тогда $\angle CMH = 2\alpha = 45°$. Следовательно, $CH = \frac{CM\sqrt{2}}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Из прямоугольного треугольника CHL находим, что

$$CL = \frac{CH}{\sin\alpha} = \frac{\frac{R\sqrt{2}}{2}}{\cos 22{,}5°} = \frac{R}{\sqrt{2}\cos 22{,}5°} = \frac{R}{\sqrt{1+\cos 45°}} = \frac{R}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

§ 6. Отношение отрезков

Подготовительные задачи

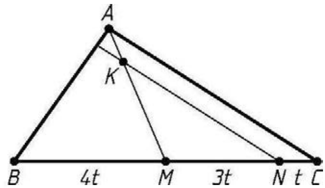
6.1. На медиане AM треугольника ABC взята точка K, причём $AK:KM=1:3$. Найдите отношение, в котором прямая, проходящая через точку K параллельно стороне AC, делит сторону BC.

Ответ: $1:7$.

Решение. Пусть прямая, о которой говорится в условии задачи, пересекает сторону BC в точке N. Обозначим $NC=t$. По теореме о пропорциональных отрезках $MN:NC=MK:KA=3:1$, значит,

$$MN=3NC=3t,$$

$$BN=BM+MN=CM+MN=4t+3t=7t.$$



Следовательно,

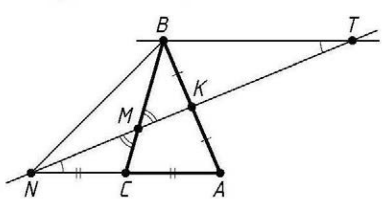
$$\frac{NC}{BN}=\frac{t}{7t}=\frac{1}{7}.$$

6.2. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N, причём $CN=AC$; точка K — середина стороны AB. В каком отношении прямая KN делит сторону BC?

Ответ: $2:1$, считая от точки B.

Решение. Первый способ. Пусть M — точка пересечения прямых KN и BC. В треугольнике ABN отрезки BC и NK — медианы. Поэтому $BM:MC=2:1$.

Второй способ. Пусть M — точка пересечения прямых KN и BC. Через вершину B проведём прямую, параллельную AC, и продолжим NK до пересечения с этой прямой в точке T.



Треугольник BKT равен треугольнику AKN по стороне и двум прилежащим к ней углам, поэтому $BT=AN$.

Треугольник BTM подобен треугольнику CNM по двум углам, значит,

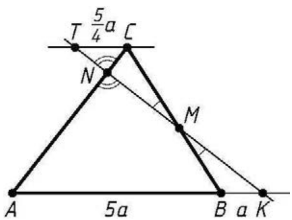
$$\frac{BM}{MC}=\frac{BT}{CN}=\frac{AN}{CN}=\frac{2CN}{CN}=2.$$

6.3. На стороне BC треугольника ABC и на продолжении стороны AB за вершину B расположены точки M и K соответственно, причём $BM : MC = 4 : 5$ и $BK : AB = 1 : 5$. Прямая KM пересекает сторону AC в точке N. Найдите отношение $CN : AN$.

Ответ: $5 : 24$.

Решение. Через точку C проведём прямую, параллельную AB. Пусть прямая KM пересекает её в точке T.

Положим $BK = a$, $AB = 5a$. Из подобия треугольников CMT и BMK



(коэффициент $\frac{5}{4}$) находим, что

$$CT = \frac{5}{4}BK = \frac{5}{4}a,$$

а из подобия треугольников CNT и ANK — что

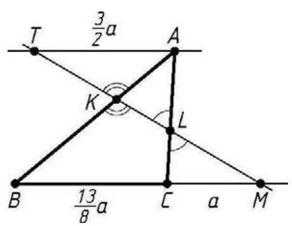
$$\frac{CN}{NA} = \frac{CT}{AK} = \frac{\frac{5}{4}a}{5a+a} = \frac{5}{24}.$$

6.4. На сторонах AB и AC треугольника ABC расположены точки K и L, причём $AK : KB = 4 : 7$ и $AL : LC = 3 : 2$. Прямая KL пересекает продолжение стороны BC в точке M. Найдите отношение $CM : BC$.

Ответ: $8 : 13$.

Решение. Через точку A проведём прямую, параллельную BC. Пусть T — точка её пересечения с прямой KL. Обозначим $CM = a$.

Из подобия треугольников ALT и CLM (коэффициент $\frac{3}{2}$) находим,



что

$$AT = \frac{3}{2}CM = \frac{3}{2}a,$$

а из подобия треугольников AKT и BKM (коэффициент $\frac{4}{7}$) — что

$$BM = \frac{7}{4}AT = \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{2}a = \frac{21}{8}a.$$

Тогда

$$BC = BM - CM = \frac{21}{8}a - a = \frac{13}{8}a.$$

Следовательно,

$$\frac{CM}{BC} = \frac{a}{\frac{13}{8}a} = \frac{8}{13}.$$

6.5. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ расположены точки N и M соответственно, причём $AN : NB = 3 : 2$, $BM : MC = 2 : 5$.

Прямые AM и DN пересекаются в точке O. Найдите отношения $OM:OA$ и $ON:OD$.

Ответ: $20:21$; $6:35$.

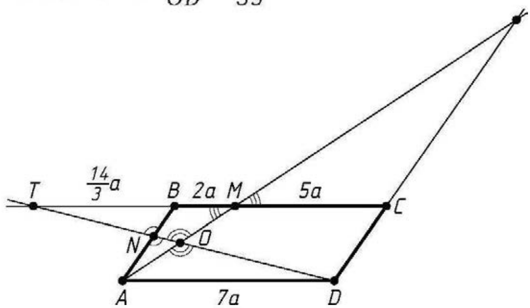
Решение. Продолжим DN до пересечения с прямой BC в точке T. Положим $BM=2a$, $CM=5a$. Из подобия треугольников TNB и DNA (коэффициент $\frac{2}{3}$) находим, что

$$TB=\frac{2}{3}AD=\frac{2}{3}BC=\frac{2}{3}\cdot 7a=\frac{14}{3}a,$$

а из подобия треугольников TOM и DOA — что

$$\frac{OM}{OA}=\frac{TM}{AD}=\frac{\frac{14}{3}a+2a}{7a}=\frac{20}{21}.$$

Аналогично находим, что $\frac{ON}{OD}=\frac{6}{35}$.



6.6. На сторонах AB и AC треугольника ABC расположены точки N и M соответственно, причём $AN:NB=3:2$, $AM:MC=4:5$. Прямые BM и CN пересекаются в точке O. Найдите отношения $OM:OB$ и $ON:OC$.

Ответ: $5:6$; $8:25$.

Решение. Через точку B проведём прямую, параллельную AC. Пусть T — точка её пересечения с прямой CN. Положим $AM=4a$, $MC=5a$.

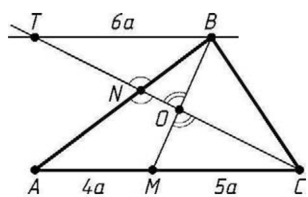
Из подобия треугольников BNT и ANC (коэффициент $\frac{2}{3}$) находим, что

$$BT=\frac{2}{3}AC=\frac{2}{3}(AM+MC)=\frac{2}{3}(4a+5a)=6a,$$

а из подобия треугольников COM и TOB — что

$$\frac{OM}{OB}=\frac{CM}{BT}=\frac{5a}{6a}=\frac{5}{6}.$$

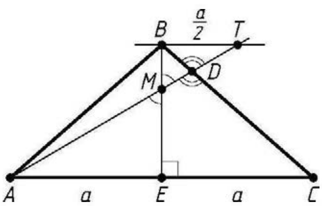
Аналогично находим, что $\frac{ON}{OC}=\frac{8}{25}$.



6.7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на стороне BC взята точка D так, что $BD : DC = 1 : 4$. В каком отношении прямая AD делит высоту BE треугольника ABC, считая от вершины B?

Ответ: $1:2$.

Решение. Пусть M — точка пересечения AD и BE. Через точку B проведём прямую, параллельную основанию AC, и продолжим AD до пересечения с этой прямой в точке T. Пусть $AE = a$. Тогда $AC = 2a$.



Из подобия треугольников BDT и CDA находим, что

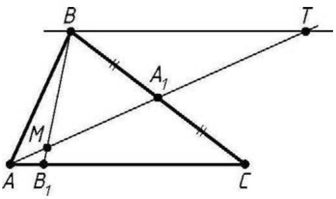
$$BT = \frac{1}{4}AC = \frac{a}{2}.$$

Из подобия треугольников AME и TMB находим, что

$$\frac{BM}{ME} = \frac{BT}{AE} = \frac{1}{2}.$$

6.8. На медиане AA_1 треугольника ABC взята точка M, причём $AM : MA_1 = 1 : 3$. В каком отношении прямая BM делит сторону AC?

Ответ: $1:6$, считая от точки A.



Решение. Проведём через точку B прямую, параллельную AC, и продолжим AA_1 до пересечения с этой прямой в точке T. Пусть B_1 — точка пересечения прямой BM со стороной AC.

Из равенства треугольников BA_1T и CA_1A следует, что $BT = AC$ и $TA_1 = AA_1$. Поэтому

$$\frac{TM}{MA} = \frac{TA_1 + A_1M}{MA} = \frac{AA_1 + A_1M}{MA} = \frac{4MA + 3MA}{MA} = 7.$$

Из подобия треугольников AMB_1 и TMB (коэффициент $\frac{1}{7}$) следует, что

$$AB_1 = \frac{1}{7}BT = \frac{1}{7}AC.$$

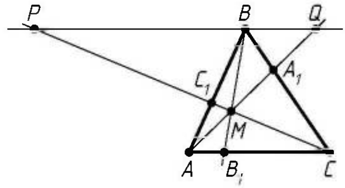
Следовательно,

$$B_1C = \frac{6}{7}AC, \quad \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{1}{6}.$$

6.9. Точки A_1 и C_1 расположены на сторонах BC и AB треугольника ABC. Отрезки AA_1 и CC_1 пересекаются в точке M. В каком отношении прямая BM делит сторону AC, если $AC_1 : C_1B = 2 : 3$ и $BA_1 : A_1C = 1 : 2$?

Ответ: $1:3$, считая от точки A.

Решение. Через вершину B проведём прямую, параллельную AC, и продолжим CC_1 и AA_1 до пересечения с ней в точках P и Q соответственно. Если B_1 — точка пересечения прямой BM со стороной AC, то треугольник PBM подобен треугольнику CB_1M, а треугольник QMB — треугольнику AMB_1, причём коэффициент подобия один и тот же — $\frac{BM}{MB_1}$. Поэтому



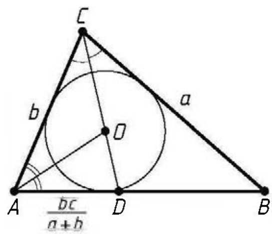
$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{BQ}{BP}=\frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{3}{2}AC}=\frac{1}{3}$$

($BQ=\frac{1}{2}AC$ из подобия треугольников BA_1Q и CA_1A, а $BP=\frac{3}{2}AC$ из подобия треугольников PBC_1 и CAC_1).

6.10. В треугольнике ABC известно, что $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$. В каком отношении центр вписанной окружности треугольника делит биссектрису CD?

Ответ: $\frac{a+b}{c}$.

Решение. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}$, а так как $AB=c$, то



$$AD=b\cdot\frac{c}{a+b}=\frac{bc}{a+b}.$$

Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC. Тогда O — точка пересечения биссектрис треугольника, поэтому AO — биссектриса треугольника ACD. Следовательно,

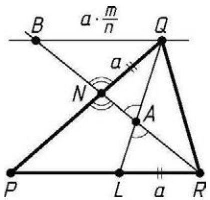
$$\frac{CO}{OD}=\frac{AC}{AD}=\frac{b}{\frac{bc}{a+b}}=\frac{a+b}{c}.$$

Тренировочные задачи

6.11. На стороне PQ треугольника PQR взята точка N, а на стороне PR — точка L, причём $NQ=LR$. Точка пересечения отрезков QL и NR делит отрезок QL в отношении $m:n$, считая от точки Q. Найдите отношение $PN:PR$.

Ответ: $\frac{n}{m}$.

Решение. Пусть отрезки QL и NR пересекаются в точке A. Обозначим $NQ=LR=a$.



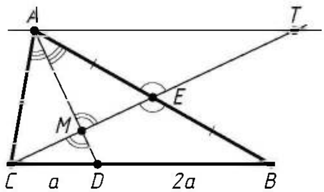
Через точку Q проведём прямую, параллельную PR. Пусть эта прямая пересекается с прямой NR в точке B. Из подобия треугольников BAQ и RAL следует, что $BQ = LR \cdot \frac{AQ}{AL} = a \cdot \frac{m}{n}$. Из подобия треугольников BNQ и RNP находим, что

$$\frac{PN}{PR} = \frac{NQ}{BQ} = \frac{a}{a\cdot\frac{m}{n}} = \frac{n}{m}.$$

6.12. В треугольнике ABC биссектриса AD делит сторону BC в отношении $BD : DC = 2 : 1$. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису?

Ответ: $3 : 1$, считая от вершины A.

Решение. Пусть медиана CE и биссектриса AD пересекаются в точке M. Через вершину A проведём прямую, параллельную BC, и продолжим медиану CE до пересечения с этой прямой в точке T. Положим $CD = a$, $BD = 2a$.



Из равенства треугольников AET и BEC следует, что $AT = BC = 3a$, а из подобия треугольников AMT и DMC — что $\frac{AM}{MD} = \frac{AT}{CD} = \frac{3a}{a} = 3$.

6.13. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки K, L и M, причём $AK : KB = 2 : 3$, $BL : LC = 1 : 2$, $CM : MA = 3 : 1$. В каком отношении отрезок KL делит отрезок BM?

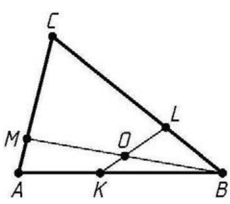
Ответ: $1 : 1$.

Решение. Пусть O — точка пересечения отрезков BM и KL. Обозначим $\frac{BO}{BM} = x$, $S_{\Delta ABC} = S$. Тогда

$$S_{\Delta BKL} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}S = \frac{1}{5}S, \quad S_{\Delta ABM} = \frac{1}{4}S, \quad S_{\Delta BCM} = \frac{3}{4}S,$$

$$S_{\Delta BOK} = \frac{3}{5}\cdot x\cdot S_{\Delta ABM} = \frac{3}{20}xS, \quad S_{\Delta BOL} = \frac{1}{3}xS_{\Delta BCM} = \frac{1}{4}xS,$$

а так как



$$S_{\Delta BKL} = S_{\Delta BOK} + S_{\Delta BOL},$$

то

$$\frac{1}{5} = \frac{3}{20}x + \frac{1}{4}x.$$

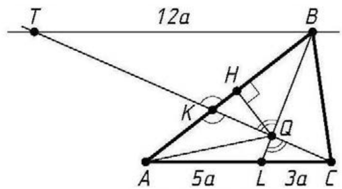
Отсюда находим, что $x = \frac{1}{2}$.

6.14. В треугольнике ABC, площадь которого равна 6, на стороне AB взята точка K, делящая эту сторону в отношении $AK : BK = 2 : 3$, а на стороне AC взята точка L, делящая AC в отношении $AL : LC = 5 : 3$. Точка Q пересечения прямых CK и BL отстоит от прямой AB на расстояние 1,5. Найдите сторону AB.

Ответ: 4.

Решение. Положим $AL = 5a$, $LC = 3a$, тогда $AC = 8a$. Через точку B проведём прямую, параллельную AC, и продолжим отрезок CK до пересечения с этой прямой в точке T. Из подобия треугольников BKT и AKC находим, что

$$BT = \frac{BK}{AK} \cdot AC = \frac{3}{2} \cdot 8a = 12a,$$



а из подобия треугольников BQT и LQC — что

$$\frac{BQ}{QL} = \frac{BT}{LC} = \frac{12a}{3a} = 4,$$

поэтому $\frac{BQ}{BL} = \frac{4}{5}$.

У треугольников ABL и ABC одна и та же высота, проведённая из вершины B, значит, отношение их площадей равно отношению оснований, т. е. $\frac{S_{\Delta ABL}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AL}{AC} = \frac{5}{8}$. Аналогично $\frac{S_{\Delta ABQ}}{S_{\Delta ABL}} = \frac{BQ}{BL} = \frac{4}{5}$. Следовательно,

$$S_{\Delta ABQ} = \frac{4}{5}S_{\Delta ABL} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{8}S_{\Delta ABC} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{8} \cdot 6 = 3.$$

Пусть QH — высота треугольника ABQ. Тогда

$$S_{\Delta ABQ} = \frac{1}{2}AB \cdot QH = \frac{1}{2}AB \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}AB = 3.$$

Отсюда находим, что $AB = 4$.

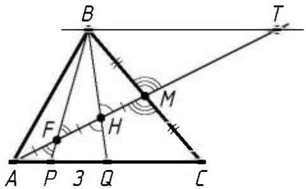
6.15. В треугольнике ABC на основании AC взяты точки P и Q так, что $AP < AQ$. Прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что $PQ = 3$. Найдите AC.

Ответ: 10.

Решение. Проведём через вершину B прямую, параллельную AC, и продолжим медиану AM до пересечения с этой прямой в точке T. Из равенства треугольников BMT и CMA следует, что $BT = AC$ и $MT = AM$.

Пусть F и H — точки пересечения медианы AM с отрезками BP и BQ соответственно. Тогда

$$AF = \frac{1}{6}AT, \quad AH = \frac{1}{3}AT.$$



Из подобия треугольников AFP и TFB следует, что

$$AP = \frac{1}{5}BT = \frac{1}{5}AC,$$

а из подобия треугольников AHQ и THB —

$$AQ = \frac{1}{2}BT = \frac{1}{2}AC.$$

Поскольку $AQ - AP = PQ = 3$, то $\frac{1}{2}AC - \frac{1}{5}AC = 3$. Отсюда находим, что $AC = 10$.

6.16. Дан треугольник ABC. Известно, что $AB = 4$, $AC = 2$ и $BC = 3$. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке K. Прямая, проходящая через точку B параллельно AC, пересекает продолжение биссектрисы AK в точке M. Найдите KM.

Ответ: $2\sqrt{6}$.

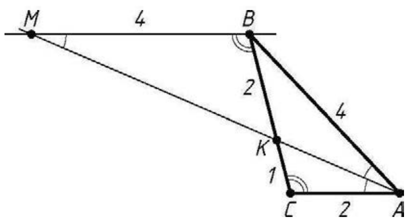
Решение. По теореме косинусов из треугольника ABC находим, что

$$\cos\angle C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{4 + 9 - 16}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{4}.$$

По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{2} = 2.$$

Поэтому $BK = 2$.



Поскольку

$$\angle AMB = \angle CAM = \angle MAB,$$

треугольник ABM равнобедренный, $BM = AB = 4$. Кроме того,

$$\angle KBM = \angle KCA = \angle C.$$

Следовательно,

$$KM^2 = BK^2 + BM^2 - 2BK \cdot BM \cos\angle KBM = 4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 24.$$

6.17. Около окружности описана равнобедренная трапеция $ABCD$. Боковые стороны AB и CD касаются окружности в точках M и N, K — середина AD. В каком отношении прямая BK делит отрезок MN?

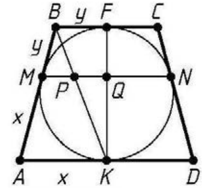
Ответ: $1:3$.

Решение. Обозначим $x = AK$, $y = BF$, где F — середина BC. Пусть Q — точка пересечения KF и MN, а P — точка пересечения MN и BK. Тогда

$$AM = AK = x, \quad BM = BF = y$$

и Q — середина MN.

Поскольку прямая MN параллельна основаниям трапеции, треугольник BMP подобен треугольнику BAK, а треугольник KPQ подобен треугольнику KBF. Поэтому



$$\frac{PM}{x} = \frac{y}{x+y}, \quad \frac{PQ}{y} = \frac{x}{x+y},$$

значит, $PM = PQ$ и $PM = \frac{1}{4}MN$. Следовательно, $\frac{PM}{PN} = \frac{1}{3}$.

6.18. Около окружности описана равнобедренная трапеция $ABCD$. Боковая сторона AB касается окружности в точке M, а основание AD — в точке N. Отрезки MN и AC пересекаются в точке P, причём $NP : PM = 2$. Найдите отношение $AD : BC$.

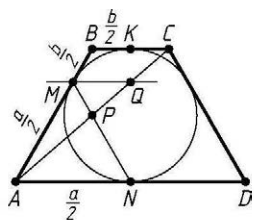
Ответ: 3.

Решение. Пусть K — точка касания окружности с основанием BC. Проведём через точку M прямую, параллельную AD, до пересечения с диагональю AC в точке Q. Обозначим $AD = a$, $BC = b$. Тогда

$$AM = AN = \frac{a}{2}, \quad BM = BK = \frac{b}{2}.$$

Из подобия треугольников MQP и NAP находим, что

$$MQ = \frac{1}{2}AN = \frac{a}{4},$$



а из подобия треугольников AMQ и ABC — что

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MQ}{BC}, \quad \text{или} \quad \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}+\frac{b}{2}} = \frac{\frac{a}{4}}{b}.$$

Следовательно, $a = 3b$.

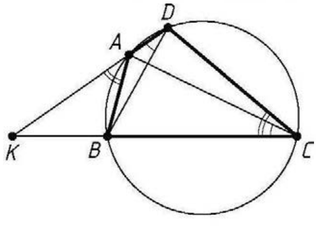
6.19. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ известны отношения $AB : DC = 1 : 2$ и $BD : AC = 2 : 3$. Найдите $DA : BC$.

Ответ: $1 : 4$.

Решение. Пусть прямые AD и BC пересекаются в точке K (они не могут быть параллельными, так как $AB \neq CD$). Поскольку

$$\angle KCA = \angle BCA = \angle BDA = \angle KDB,$$

треугольники KAC и KBD подобны по двум углам. Значит, $KC:KD=$ $=AC:BD=3:2$. Пусть $KC=3a$, $KD=2a$. Поскольку



$$\angle KAB = 180^\circ - \angle BAD = \angle KCD,$$

треугольники KAB и KCD подобны по двум углам. Значит,

$$KB : KD = KA : KC = AB : CD = 1 : 2,$$

поэтому

$$KB = \frac{1}{2}KD = a, \quad KA = \frac{1}{2}KC = \frac{3a}{2}.$$

Тогда

$$BC = KC - KB = 2a, \quad AD = KD - KA = 2a - \frac{3a}{2} = \frac{a}{2}.$$

Следовательно, $AD:BC=1:4$.

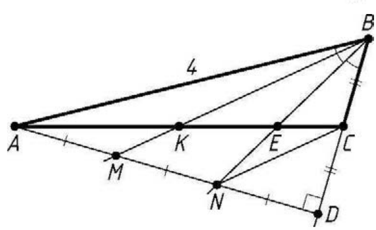
6.20. В треугольнике ABC проведена высота AD. Прямые, одна из которых содержит медиану BK, а вторая — биссектрису BE, делят эту высоту на три равных отрезка. Известно, что $AB=4$. Найдите сторону AC.

Ответ: $\sqrt{13}$.

Решение. Пусть M и N — точки пересечения прямых BK и BE с отрезком AD, $AM=MN=ND$. Предположим, что точка N лежит между A и M. Тогда по свойству биссектрисы в прямоугольном треугольнике ABD стороны AB и BD пропорциональны отрезкам AN и DN и, таким образом, $BD=2AB$, т. е. гипотенуза меньше катета, что невозможно. Следовательно, точка N лежит между D и M. Тогда, так как $\frac{BD}{AB}=\frac{DN}{NA}=\frac{1}{2}$, то

$$BD = \frac{1}{2}AB = 2, \quad AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}.$$

Поскольку M — середина AN, а K — середина AC, отрезок MK — средняя линия треугольника ACN, значит, $MK \parallel CN$, а так как N — середина DM и $CN \parallel BM$, то CN — средняя линия треугольника DBM. Следовательно, C — середина BD. Тогда $CD = \frac{1}{2}BD = 1$ и из прямо-

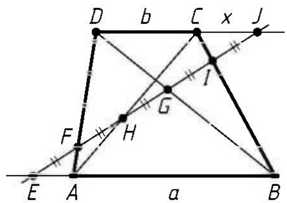


угольного треугольника ACD находим, что

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{12+1} = \sqrt{13}.$$

6.21. При каком отношении оснований трапеции существует прямая, на которой шесть точек пересечения с диагоналями, боковыми сторонами и продолжениями оснований трапеции высекают пять равных отрезков?

Ответ: $1:2$.



Решение. Пусть указанная прямая пересекает продолжение основания AB трапеции $ABCD$ в точке E, боковую сторону AD — в точке F, диагональ BD — в точке G, диагональ AC — в точке H, боковую сторону BC — в точке I, продолжение основания CD — в точке J.

Обозначим $AB = a$, $CD = b$, $CJ = x$. Из подобия треугольников IBE и ICJ находим, что $BE = CJ \cdot \frac{IE}{IJ} = 4x$, а из подобия треугольников HAE и HCJ — $AE = CJ \cdot \frac{HE}{HJ} = \frac{2}{3}x$. Из равенства

$$4x = BE = AE + AB = \frac{2}{3}x + a$$

следует, что $a = \frac{10}{3}x$.

Из подобия треугольников GBE и GDJ следует, что

$$x + b = DJ = BE \cdot \frac{GJ}{GE} = 4x \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}x.$$

Значит, $b = \frac{5}{3}x$. Следовательно,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{a}{b} = \frac{\frac{10}{3}x}{\frac{5}{3}x} = 2.$$

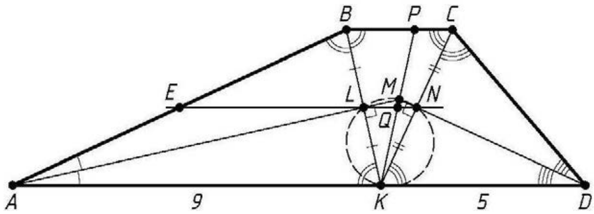
6.22. В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 9$ и $CD = 5$ биссектриса угла D пересекает биссектрисы углов A и C в точках M и N соответственно, а биссектриса угла B пересекает те же две биссектрисы в точках L и K, причём точка K лежит на основании AD.

а) В каком отношении прямая LN делит сторону AB, а прямая MK — сторону BC?

б) Найдите отношение $MN : KL$, если $LM : KN = 3 : 7$.

Ответ: а) $1:1$; $5:9$; б) $5:21$.

Решение. Поскольку BK — биссектриса угла ABC, а прямые BC и AD параллельны, то $\angle ABK = \angle KBC = \angle AKB$, поэтому треугольник ABK



равнобедренный. Значит, $AK = AB = 9$ и биссектриса AL этого треугольника является его медианой и высотой, т. е. $BL = KL$ и $AL \perp BK$. Аналогично докажем, что $DK = CD = 5$, $CN = KN$ и $DN \perp CK$.

Таким образом, LN — средняя линия треугольника BKC, поэтому прямая LN параллельна основаниям трапеции, а точка E пересечения прямых LN и AB — середина стороны AB. Следовательно, $AE : BE = 1 : 1$.

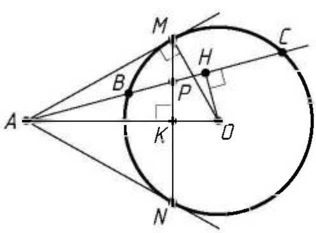
Пусть прямая MK пересекается с прямыми BC и LN в точках P и Q соответственно. Поскольку $LN \parallel BC$ и $LN \parallel AD$, то $CP : PB = NQ : QL = DK : AK = 5 : 9$.

Отрезок MK виден из точек L и N под прямым углом, значит, точки L и N лежат на окружности с диаметром MK, поэтому треугольники MQL и NQK подобны по двум углам. Тогда $MQ : NQ = LM : KN = \frac{3}{7}$, откуда находим, что $MQ = NQ \cdot \frac{LM}{KN} = \frac{3}{7} \cdot NQ$.

Из подобия треугольников MQN и LQK следует, что

$$\frac{MN}{KL} = \frac{MQ}{QL} = \frac{\frac{3}{7}NQ}{QL} = \frac{3}{7} \cdot \frac{NQ}{QL} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{21}.$$

6.23. Из точки A проведены к окружности две касательные (M и N — точки касания) и секущая, пересекающая эту окружность в точках B и C, а хорду MN — в точке P. Известно, что $AB : BC = 2 : 3$. Найдите $AP : PC$.



Ответ: 4 : 3.

Решение. Пусть O — центр окружности, а прямая AO пересекает хорду MN в точке K. Тогда $AK \perp MN$. Из прямоугольного треугольника AOM находим, что $AM^2 = AO \cdot AK$.

Пусть H — проекция точки O на хорду BC. Тогда H — середина BC. Прямоугольные треугольники AKP и AHO подобны по двум углам, поэтому $\frac{AK}{AP} = \frac{AH}{AO}$, откуда $AO \cdot AK = AH \cdot AP$.

По теореме о касательной и секущей $AM^2 = AB \cdot AC$.

Из полученных равенств следует, что

$$AB \cdot AC = AM^2 = AO \cdot AK = AH \cdot AP.$$

Обозначим $AB = 2x$, $BC = 3x$. Тогда

$$AC = AB + BC = 5x, \quad AH = \frac{1}{2} \cdot (AB + AC) = \frac{7}{2}x.$$

Из равенства $AB \cdot AC = AH \cdot AP$ находим, что

$$AP = \frac{AB \cdot AC}{AH} = \frac{2x \cdot 5x}{\frac{7}{2}x} = \frac{20x}{7}.$$

Тогда $PC = AC - AP = 5x - \frac{20x}{7} = \frac{15x}{7}$.

Следовательно,

$$\frac{AP}{PC} = \frac{\frac{20x}{7}}{\frac{15x}{7}} = \frac{4}{3}.$$

Задачи на доказательство и вычисление

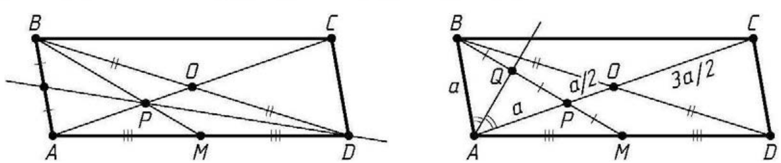
6.24.1. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны AD, P — точка пересечения отрезка BM с диагональю AC.

а) Докажите, что прямая DP проходит через середину стороны AB.

б) Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BM в точке Q. Найдите отношение $PM : BQ$, если $AB : AC = 1 : 3$.

Ответ: $1 : 1$.

Решение. а) Пусть O — центр параллелограмма $ABCD$. Тогда AO и BM — медианы треугольника ABD, а так как медианы пересекаются в одной точке, то прямая DP содержит третью медиану. Следовательно, эта прямая проходит через середину стороны AB.



б) Положим $AB = a$, $AC = 3a$. Тогда

$$AP = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}a = a,$$

значит, биссектриса AQ равнобедренного треугольника ABP является его медианой и

$$BQ = \frac{1}{2}BP = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BM = \frac{1}{3}BM,$$

а так как P — точка пересечения медиан треугольника ABD, то $PM = \frac{1}{3}BM$. Следовательно, $\frac{PM}{BQ} = 1$.

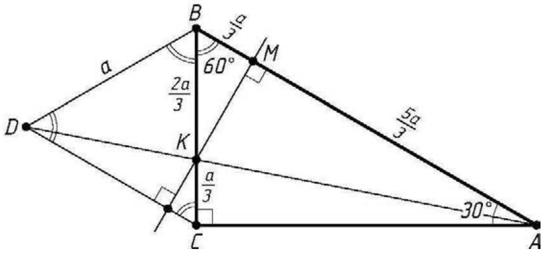
6.25.1. На катете BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C и с углом 30° при вершине A вне треугольника построен равносторонний треугольник BCD. Прямая AD пересекает сторону BC в точке K.

а) Докажите, что $CK : KB = 1 : 2$.

б) Прямая, проходящая через точку K перпендикулярно CD, пересекает гипотенузу AB в точке M. Найдите отношение $AM : MB$.

Ответ: 5 : 1.

Решение. а) Обозначим $BC = a$. Тогда $BD = CD = a$, $AB = 2a$, а так как $\angle BCD = 60^\circ = \angle ABC$, то $CD \parallel AB$. Значит, треугольник DKC подобен треугольнику AKB, причём коэффициент подобия равен $\frac{CD}{AB} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\frac{CK}{KB} = \frac{1}{2}$.



б) Поскольку прямые AB и CD параллельны, $KM \perp AB$. Из прямоугольного треугольника BMK находим, что

$$MB = \frac{1}{2}BK = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BC = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}a.$$

Тогда

$$AM = AB - MB = 2a - \frac{1}{3}a = \frac{5}{3}a.$$

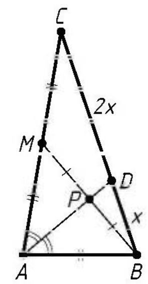
Следовательно,

$$\frac{AM}{MB} = \frac{\frac{5}{3}a}{\frac{1}{3}a} = 5.$$

6.26.1. Биссектриса AD треугольника ABC делит его медиану BM пополам.

а) Докажите, что площадь треугольника ACD вдвое больше площади треугольника ABD.

б) В каком отношении медиана BM делит биссектрису AD?



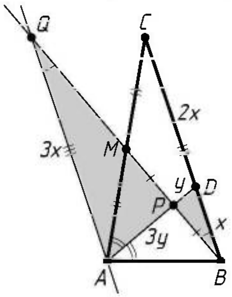
Ответ: 3 : 1.

Решение. а) Пусть P — точка пересечения AD и BM. Тогда P — середина BM. Медиана AP треугольника ABM является его биссектрисой, значит, треугольник ABM равнобедренный, $AB = AM$. Поэтому $AC = 2AB$. По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{BD}{CD} = \frac{1}{2}.$$



б) Через точку A проведём прямую, параллельную BC. Пусть эта прямая пересекается с прямой BM в точке Q. Из равенства треугольников AMQ и CMB следует, что $AQ = BC$, а из подобия треугольников DPB и APQ — что

$$\frac{PD}{AP} = \frac{BD}{AQ} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{3}.$$

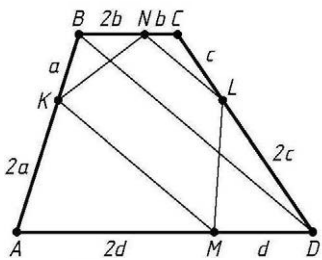
6.27.1. На основаниях AD и BC трапеции $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, а на боковых сторонах AB и CD — точки K и L соответственно. При этом $DM : AM = CN : BN = BK : AK = CL : LD = 1 : 2$.

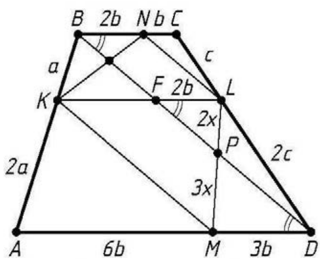
а) Докажите, что четырёхугольник $KMLN$ — трапеция.

б) Известно, что $AD = 3BC$. В каком отношении диагональ BD трапеции $ABCD$ делит боковые стороны трапеции $KMLN$?

Ответ: 2 : 3.

Решение. а) Поскольку $\frac{CN}{CB} = \frac{CL}{CD}$, прямая NL параллельна диагонали BD. Аналогично прямая KM также параллельна BD. Значит, $NL \parallel KM$, а так как $NL = \frac{1}{3}BD$ и $KM = \frac{2}{3}BD$, то $NL \neq KM$. Следовательно, $KMLN$ — трапеция.





б) Точки L и K делят боковые стороны CD и AB трапеции $ABCD$ в одном и том же отношении, значит, $KL \parallel AD$. Пусть P и F — точки пересечения BD с ML и KL соответственно. Треугольник FDL подобен треугольнику BDC с коэффициентом $\frac{2}{3}$, поэтому $FL = \frac{2}{3}BC$. Треугольник FPL подобен треугольнику DPM, поэтому

$$\frac{LP}{PM} = \frac{FL}{MD} = \frac{\frac{2}{3}BC}{\frac{1}{3}AD} = 2 \cdot \frac{BC}{AD} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

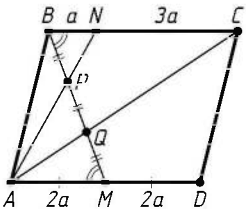
а так как $BD \parallel KM$, то прямая BD делит боковую сторону KN трапеции $KMLN$ в том же отношении.

6.28.1. На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N, причём M — середина AD, а $BN : NC = 1 : 3$.

а) Докажите, что прямые AN и AC делят отрезок BM на три равные части.

б) Найдите площадь четырёхугольника, образованного пересечениями прямых AN, AC, BD и BC, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 40.

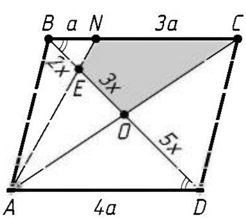
Ответ: 9.



Решение. а) Пусть отрезок BM пересекает отрезки AN и AC в точках P и Q соответственно. Положим $BN = a$, $NC = 3a$. Тогда $AD = BC = 4a$, $AM = MD = 2a$. Треугольники BPN и MPA подобны с коэффициентом $\frac{BN}{AM} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, поэтому $BP = \frac{1}{3}BM$.

Треугольники AQM и CQB подобны с коэффициентом $\frac{AM}{BC} = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2}$, поэтому $QM = \frac{1}{3}BM$. Значит,

$$PQ = BM - BP - QM = BM - \frac{1}{3}BM - \frac{1}{3}BM = \frac{1}{3}BM.$$



Следовательно, $BP = PQ = QM$.

б) Пусть O — центр параллелограмма, E — точка пересечения диагонали BD с отрезком AN. Требуется найти площадь четырёхугольника $COEN$.

Треугольник BEN подобен треугольнику DEA с коэффициентом $\frac{BN}{AD} = \frac{a}{4a} = \frac{1}{4}$, поэтому $\frac{BE}{ED} = \frac{1}{4}$. Тогда $\frac{BE}{BD} = \frac{1}{5}$, а $\frac{BE}{BO} = \frac{2}{5}$. Значит,

$$\frac{S_{\Delta BEN}}{S_{\Delta BOC}} = \frac{BE}{BO} \cdot \frac{BN}{BC} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

(см. п. 24д приложения 2). Следовательно,

$$S_{COEN}=S_{\Delta BOC}-S_{\Delta BEN}=S_{\Delta BOC}-\frac{1}{10}S_{\Delta BOC}=$$
$$=\frac{9}{10}S_{\Delta BOC}=\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{4}S_{ABCD}=\frac{9}{40}\cdot 40=9.$$

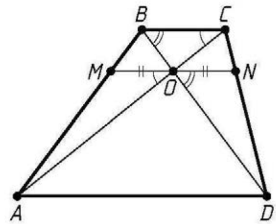
6.29.1. Через точку пересечения O диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию и пересекающая боковые стороны в точках M и N.

а) Докажите, что O — середина отрезка MN.

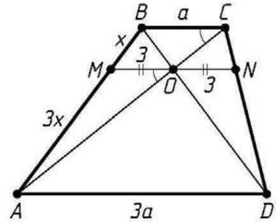
б) Найдите основания, если известно, что одно из них втрое больше другого, а $MN=6$.

Ответ: 4 и 12.

Решение. а) Пусть диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O, а прямая, проходящая через точку O параллельно основаниям, пересекает боковые стороны AB и CD в точках M и N соответственно.



Треугольник AMO подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{AO}{AC}$. Значит, $OM=BC\cdot\frac{AO}{AC}=BC\cdot\frac{AD}{AD+BC}$. Треугольник DNO подобен треугольнику DCB с коэффициентом $\frac{DO}{DB}$. Значит, $ON=BC\cdot\frac{DO}{DB}=BC\cdot\frac{AD}{AD+BC}$. Следовательно, $OM=ON$.



б) Положим $BC=a$, $AD=3a$. Тогда $OM=BC\cdot\frac{AD}{AD+BC}$, или $3=a\cdot\frac{3a}{3a+a}$. Отсюда находим, что $a=4$. Следовательно, $BC=4$ и $AD=12$.

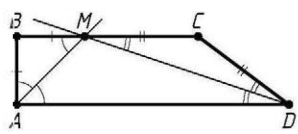
6.30.1. Точка пересечения биссектрис углов при большем основании трапеции лежит на меньшем основании.

а) Докажите, что меньшее основание равно сумме боковых сторон.

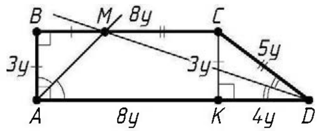
б) Найдите углы трапеции, если отношение оснований трапеции равно $3:2$, а отношение боковых сторон равно $5:3$.

Ответ: 90°, 90°, $\arcsin\frac{3}{5}$, $180^\circ-\arcsin\frac{3}{5}$.

Решение. а) Пусть биссектрисы углов при вершинах A и D трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD>BC$) пересекаются в точке M, лежащей на основании BC.



Тогда $\angle AMB = \angle DAM = \angle BAM$, значит, треугольник ABM равнобедренный, $BM = AB$. Аналогично $CM = CD$. Следовательно, $BC = BM + CM = AB + CD$.



б) Пусть $BC = 2x$, $AD = 3x$, $AB = 3y$, $CD = 5y$. Тогда $5y + 3y = 2x$. Отсюда находим, что $x = 4y$. Значит, $BC = 8y$, $AD = 12y$.

Через точку C проведём прямую, параллельную боковой стороне AB. Пусть эта прямая пересекает AD в точке K. Получим треугольник CKD со сторонами

$$CK = AB = 3y, \quad CD = 5y,$$
$$DK = AD - AK = AD - BC = 12y - 8y = 4y.$$

Этот треугольник CKD прямоугольный с прямым углом при вершине K, так как

$$CD^2 = 25y^2 = 16y^2 + 9y^2 = DK^2 + CK^2.$$

Следовательно,

$$\angle CDK = \arcsin\frac{CK}{CD} = \arcsin\frac{3}{5}, \quad \angle BAD = \angle CKD = 90^\circ.$$

6.31.1. Вневписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.

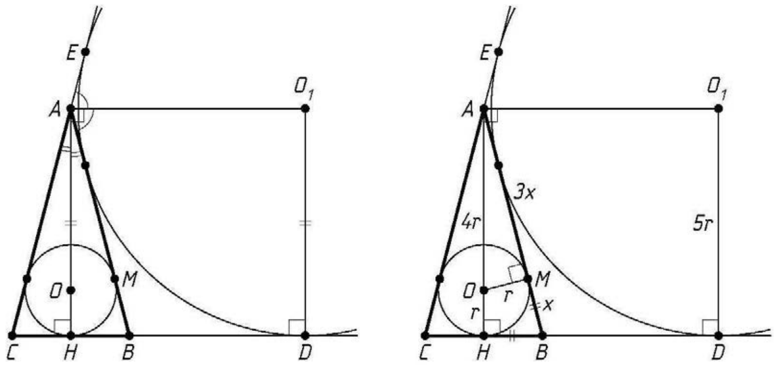
а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на основание.

б) Известно, что радиус этой окружности в пять раз больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

Ответ: $1:3$.

Решение. а) Пусть вписанная окружность с центром O касается боковой стороны AB и основания BC равнобедренного треугольника ABC в точках M и H, а окружность с центром O_1 касается боковой стороны AB, продолжения основания BC в точке D и продолжения боковой стороны AC в точке E. Тогда AH — высота треугольника ABC.

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO_1 — биссектриса угла BAE. В четырёхугольнике $AHDO_1$ угол HAO_1 прямой как угол между биссектрисами смежных углов BAC и BAE, а так как $\angle HDO_1 = \angle AHD = 90^\circ$, то $AHDO_1$ — прямоугольник, поэтому $O_1D = AH$.



б) Пусть радиус окружности с центром O равен r. Тогда радиус окружности с центром O_1 равен $5r$,

$$AH = O_1D = 5r, \quad OA = AH - OH = 5r - r = 4r.$$

Из прямоугольного треугольника AOM находим, что

$$AM = \sqrt{AO^2 - OM^2} = \sqrt{16r^2 - r^2} = r\sqrt{15}.$$

Прямоугольные треугольники AOM и ABH подобны по двум углам, поэтому $\frac{AM}{OM} = \frac{AH}{BH}$, откуда

$$BH = \frac{OM \cdot AH}{AM} = \frac{r \cdot 5r}{r\sqrt{15}} = \frac{r\sqrt{15}}{3}.$$

По теореме об отрезках касательных, проведённых к окружности из одной точки, $BM = BH = \frac{r\sqrt{15}}{3}$. Следовательно,

$$\frac{BM}{AM} = \frac{\frac{r\sqrt{15}}{3}}{r\sqrt{15}} = \frac{1}{3}.$$

6.32.1. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Биссектриса угла ADC проходит через середину боковой стороны AB.

а) Докажите, что сумма оснований трапеции равна боковой стороне CD.

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AB = 8$, $BC = 2$ и $CD = 10$.

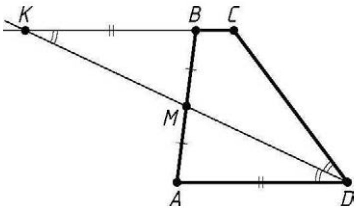
Ответ: 40.

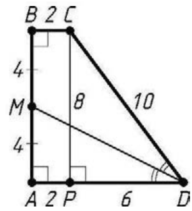
Решение. а) Пусть M — середина AB. Продолжим биссектрису DM угла ADC до пересечения с продолжением основания BC в точке K. Поскольку

$$\angle CKD = \angle ADK = \angle CDK,$$

треугольник KCD равнобедренный, $KC = CD$. Из равенства треугольников AMD и BMK следует, что $BK = AD$. Следовательно,

$$CD = KC = BK + BC = AD + BC.$$





б) Проведём через вершину C прямую, параллельную стороне AB. Пусть эта прямая пересекает основание AD в точке P. Тогда

$$CP = AB = 8, \quad AD = BK = CK - BC = CD - BC = 10 - 2 = 8,$$
$$DP = AD - AP = AD - BC = 8 - 2 = 6.$$

Треугольник CPD прямоугольный, так как

$$CD^2 = 10^2 = 6^2 + 8^2 = DP^2 + PC^2.$$

Поэтому CP — высота трапеции. Следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)CP = \frac{1}{2}CD \cdot CP = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 = 40.$$

6.33.1. В треугольнике ABC точка D делит сторону AB пополам, а точка E лежит на стороне BC, причём отрезок BE в 3 раза меньше стороны BC. Отрезки AE и CD пересекаются в точке O, $AE = 5$, $OC = 4$.

а) Докажите, что $CD = AE$.

б) Найдите сторону AB, если $\angle AOC = 120^\circ$.

Ответ: $2\sqrt{7}$.

Решение. а) Проведём через точку C прямую, параллельную AB, и продолжим отрезок AE до пересечения с этой прямой в точке T. Из подобия треугольников CET и BEA следует, что $CT = 2AB = 4AD$. Из подобия треугольников COT и DOA находим, что

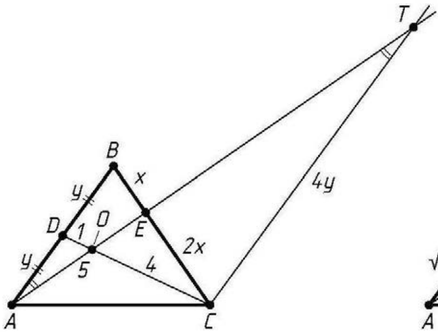
$$\frac{CO}{OD} = \frac{TO}{OA} = \frac{CT}{AD} = 4.$$

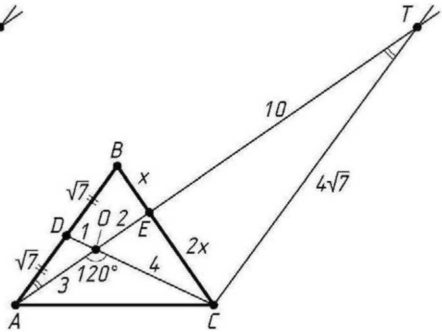
Следовательно,

$$CD = OC + OD = 4 + 1 = 5 = AE.$$

б) Из того же подобия получаем, что

$$AO = \frac{1}{5}AT = \frac{1}{5}(AE + ET) = \frac{1}{5}(AE + 2AE) = \frac{1}{5} \cdot 3AE = \frac{1}{5} \cdot 3 \cdot 5 = 3.$$





По теореме косинусов из треугольника AOD находим, что

$$AD^2 = AO^2 + DO^2 - 2AO\cdot DO\cos\angle AOD = 9 + 1 - 2\cdot 3\cdot 1\cdot\cos 60^\circ = 7.$$

Следовательно, $AB = 2AD = 2\sqrt{7}$.

6.34.1. На отрезке BD взята точка C. Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD.

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos\angle ABC = \frac{1}{3}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB?

Ответ: $9:16$.

Решение. Первый способ. а) Обозначим $\angle ABL = \angle CBL = \alpha$. Тогда

$$\angle ACB = \angle ABC = 2\alpha, \quad \angle BDL = \angle DBL = \alpha,$$

а так как ACB — внешний угол треугольника DCL, то

$$\angle DLC = \angle ACB - \angle CDL = 2\alpha - \alpha = \alpha.$$

Значит, $\angle DLC = \angle CDL$. Следовательно, треугольник DCL равнобедренный.

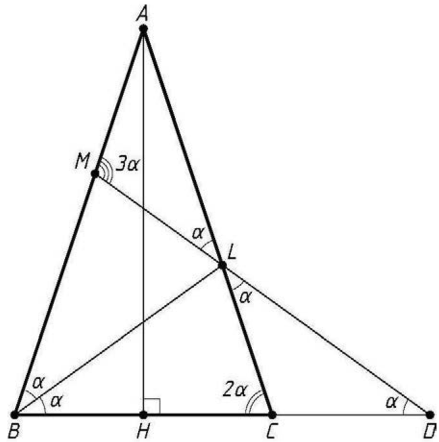
б) Пусть AH — высота равнобедренного треугольника ABC. Тогда H — середина BC. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам, поэтому $\frac{CL}{AL} = \frac{BC}{AB}$, а так как

$$\frac{BH}{AB} = \cos\angle ABC = \cos 2\alpha = \frac{1}{3},$$

то $\frac{BC}{AB} = \frac{2BH}{AB} = \frac{2}{3}$. Значит, $\frac{CL}{AL} = \frac{2}{3}$, поэтому $AL = \frac{3}{5}AC = \frac{3}{5}AB$.

Пусть прямая DL пересекает сторону AB в точке M. Тогда

$$\angle AML = 180^\circ - \angle MAL - \angle ALM = 180^\circ - (180^\circ - 4\alpha) - \alpha = 3\alpha.$$



Применив теорему синусов к треугольнику AML, получим, что $\frac{AM}{\sin\alpha} = \frac{AL}{\sin 3\alpha}$, откуда

$$AM = \frac{AL\sin\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{AL\sin\alpha}{\sin(\alpha+2\alpha)} = \frac{AL\sin\alpha}{\sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha} = \frac{AL\sin\alpha}{\sin\alpha(\cos 2\alpha + 2\cos^2\alpha)} = \frac{AL}{\cos 2\alpha + 1 + \cos 2\alpha} = \frac{AL}{2\cos 2\alpha + 1} = \frac{AL}{2\cdot\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{5}AL = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}AB = \frac{9}{25}AB.$$

Значит, $MB = AB - AM = \frac{16}{25}AB$. Следовательно, $\frac{AM}{MB} = \frac{9}{16}$.

Второй способ. б) Положим $BC = 2x$. Тогда

$$CH = x, \quad AB = AC = 3x, \quad AL = \frac{3}{5}AC = \frac{3}{5}\cdot 3x = \frac{9}{5}x,$$

$$CD = CL = \frac{2}{5}AC = \frac{2}{5}\cdot 3x = \frac{6}{5}x, \quad BD = BC + CD = 2x + \frac{6}{5}x = \frac{16}{5}x.$$

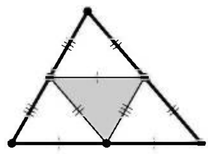
По теореме Менелая $\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CL}{AL} = 1$, следовательно,

$$\frac{AM}{MB} = \frac{CD}{BD}\cdot\frac{AL}{CL} = \frac{\frac{6}{5}x}{\frac{16}{5}x}\cdot\frac{\frac{9}{5}x}{\frac{6}{5}x} = \frac{9}{16}.$$

§ 7. Отношение площадей

Подготовительные задачи

7.1. Найдите площадь треугольника, вершины которого — середины сторон треугольника площади 4.



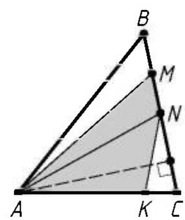
Ответ: 1.

Решение. Средние линии разбивают треугольник на четыре равных треугольника.

7.2. Точки M и N расположены на стороне BC треугольника ABC, а точка K — на стороне AC, причём $BM:MN:NC=1:1:2$ и $CK:AK=$ $=1:4$. Известно, что площадь треугольника ABC равна 1. Найдите площадь четырёхугольника $AMNK$.

Ответ: $\frac{13}{20}$.

Решение. У треугольников AMB и ABC общая высота, проведённая из вершины A, поэтому их площади относятся как основания, значит,



$$S_{\Delta AMB}=\frac{BM}{BC}\cdot S_{\Delta ABC}=\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{4}.$$

Аналогично

$$S_{\Delta ANC}=\frac{1}{2},\quad S_{\Delta CNK}=\frac{CK}{AC}\cdot S_{\Delta ANC}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{10}.$$

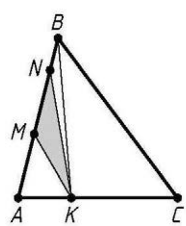
Следовательно,

$$S_{AMNK}=S_{\Delta ABC}-S_{\Delta AMB}-S_{\Delta CNK}=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{10}=1-\frac{7}{20}=\frac{13}{20}.$$

7.3. На стороне AB треугольника ABC взяты точки M и N, причём $AM:MN:NB=2:2:1$, а на стороне AC — точка K, причём $AK:KC=$ $=1:2$. Найдите площадь треугольника MNK, если площадь треугольника ABC равна 1.

Ответ: $\frac{2}{15}$.

Решение. Соединим K и B. Тогда

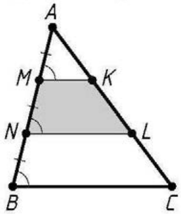


$$S_{\Delta AKB}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC},\quad S_{\Delta MNK}=\frac{2}{5}S_{\Delta AKB}.$$

Поэтому

$$S_{\Delta MNK}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}=\frac{2}{15}.$$

7.4. Через точки M и N, делящие сторону AB треугольника ABC на три равные части, проведены прямые, параллельные стороне BC. Найдите площадь части треугольника, заключённой между этими прямыми, если площадь треугольника ABC равна 1.



Ответ: $\frac{1}{3}$.

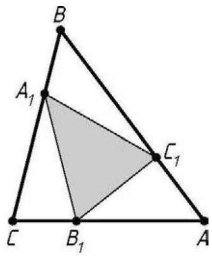
Решение. Пусть $AM = MN = NB$, точки K и L лежат на стороне AC и $MK \parallel NL \parallel BC$. Тогда треугольник AMK подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{1}{3}$, а треугольник ANL подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{2}{3}$, следовательно,

$$S_{MKLN} = S_{\Delta ANL} - S_{\Delta AMK} = \frac{4}{9}S_{\Delta ABC} - \frac{1}{9}S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.$$

7.5. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно, причём

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{1}{2}.$$

Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 1.



Ответ: $\frac{1}{3}$.

Решение. Заметим, что

$$S_{\Delta C_1BA_1} = \frac{BC_1}{BA} \cdot \frac{BA_1}{BC} \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} = \frac{2}{9}.$$

Аналогично

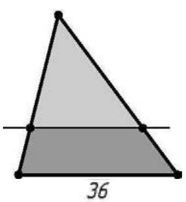
$$S_{\Delta B_1AC_1} = S_{\Delta B_1CA_1} = \frac{2}{9}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta A_1B_1C_1} = 1 - 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{3}.$$

7.6. Сторона треугольника равна 36. Прямая, параллельная этой стороне, делит площадь треугольника пополам. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого между сторонами треугольника.

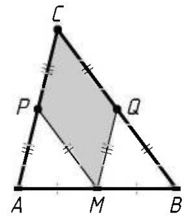
Ответ: $18\sqrt{2}$.



Решение. Указанная прямая отсекает от данного треугольника подобный ему треугольник, площадь которого относится к площади данного как 1 : 2. Поэтому коэффициент подобия равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, длина искомого отрезка равна $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 36 = 18\sqrt{2}$.

7.7. Из середины основания треугольника площади S проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите площадь полученного таким образом параллелограмма.

Ответ: $\frac{1}{2}S$.



Решение. Пусть M — середина стороны AB треугольника ABC; P и Q — вершины параллелограмма $MPCQ$, принадлежащие сторонам AC и BC. Тогда P и Q — середины сторон AC и BC. Следовательно,

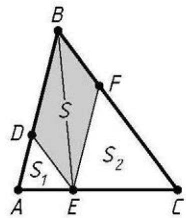
$$S_{MPCQ} = CQ \cdot CP \sin\angle C = \frac{1}{2}BC \cdot \frac{1}{2}AC \sin\angle C = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

Тренировочные задачи

7.8. Из точки на основании треугольника проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Они разбивают треугольник на параллелограмм и два треугольника с площадями S_1 и S_2. Найдите площадь параллелограмма.

Ответ: $2\sqrt{S_1S_2}$.

Решение. Пусть E — точка на стороне AC треугольника ABC, D и F — точки на сторонах AB и BC соответственно, причём $DE \parallel BC$ и $EF \parallel AB$, $S_{\triangle ADE} = S_1$ и $S_{\triangle CFE} = S_2$. Обозначим $S_{BDEF} = S$. Тогда $S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2}S$.



Треугольники ADE и EFC подобны, причём коэффициент подобия равен квадратному корню из отношения их площадей, т. е. $\frac{EF}{AD} = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}$, поэтому

$$\frac{\frac{1}{2}S}{S_1} = \frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{BD}{AD} = \frac{EF}{AD} = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}.$$

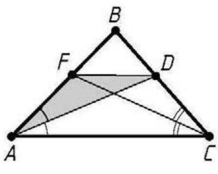
Отсюда находим, что $S = 2\sqrt{S_1S_2}$.

7.9. В треугольнике ABC проведены биссектрисы CF и AD. Найдите отношение площадей треугольников AFD и ABC, если $AB : AC : BC = 21 : 28 : 20$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Решение. По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}.$$



Поэтому $S_{\triangle ABD} = \frac{3}{7}S_{\triangle ABC}$, а так как

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{CB} = \frac{28}{20} = \frac{7}{5},$$

то

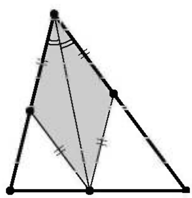
$$S_{\Delta AFD} = \frac{7}{12}S_{\Delta ABD} = \frac{7}{12}\cdot\frac{3}{7}S_{\Delta ABC} = \frac{3}{12}S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}S_{\Delta ABC}.$$

7.10. Треугольник и вписанный в него ромб имеют общий угол. Стороны треугольника, заключающие этот угол, относятся как $m:n$. Найдите отношение площади ромба к площади треугольника.

Ответ: $\dfrac{2mn}{(m+n)^2}$.

Решение. Диагональ ромба, проведённая из общей с треугольником вершины, является биссектрисой треугольника. Поэтому она делит сторону в отношении $\dfrac{m}{n}$.

Стороны ромба отсекают от треугольника подобные ему треугольники с коэффициентами подобия $\dfrac{n}{m+n}$ и $\dfrac{m}{m+n}$. Поэтому их площади равны $\dfrac{n^2}{(m+n)^2}\cdot S$ и $\dfrac{m^2}{(m+n)^2}\cdot S$, где S — площадь данного треугольника. Значит, площадь ромба равна



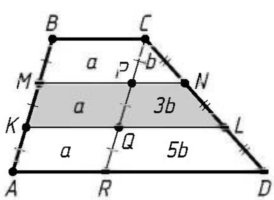
$$S - \frac{n^2}{(m+n)^2}\cdot S - \frac{m^2}{(m+n)^2}\cdot S = \frac{2mn}{(m+n)^2}\cdot S.$$

7.11. Две прямые, параллельные основаниям трапеции, делят каждую из боковых сторон на три равные части. Вся трапеция разделена ими на три части. Найдите площадь средней части, если площади крайних равны S_1 и S_2.

Ответ: $\dfrac{S_1+S_2}{2}$.

Решение. Пусть MN и KL — указанные прямые, параллельные основаниям AD и BC трапеции $ABCD$ (M и K лежат на AB, N и L — на CD); прямая, проходящая через вершину C меньшего основания параллельно боковой стороне AB, пересекает MN, KL и AD в точках P, Q и R соответственно.

Обозначим площади равных параллелограммов $MBCP$, $KMPQ$ и $AKQR$ через a, а площадь треугольника CPN через b. Тогда



$$S_{QPNL} = 4b - b = 3b, \quad S_{RQLD} = 9b - 4b = 5b,$$
$$S_1 = S_{MBCN} = a + b, \quad S_2 = S_{AKLD} = a + 5b.$$

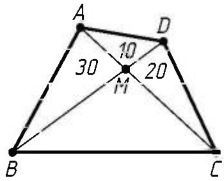
Следовательно,

$$S_3 = S_{KMNL} = a + 3b = \frac{2a+6b}{2} = \frac{a+b+a+5b}{2}\frac{S_1+S_2}{2}.$$

7.12. Четырёхугольник разделён диагоналями на четыре треугольника. Площади трёх из них равны 10, 20 и 30, и каждая меньше площади четвёртого треугольника. Найдите площадь данного четырёхугольника.

Ответ: 120.

Решение. Пусть M — точка пересечения диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$. Если



$$S_{\Delta AMD} = 30, \quad S_{\Delta AMB} = 10, \quad S_{\Delta CMD} = 20,$$

то

$$\frac{BM}{MD} = \frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta AMD}} = \frac{1}{3}, \quad S_{\Delta BMC} = \frac{1}{3}S_{\Delta CMD} = \frac{20}{3} < 10.$$

Следовательно, этот случай невозможен. Разбирая остальные случаи, убеждаемся, что возможны только два из них:

$$S_{\Delta AMB} = 20, \quad S_{\Delta AMD} = 10, \quad S_{\Delta CMD} = 30$$

или

$$S_{\Delta AMB} = 30, \quad S_{\Delta AMD} = 10, \quad S_{\Delta CMD} = 20.$$

В каждом из возможных случаев $S_{\Delta BMC} = 60$.

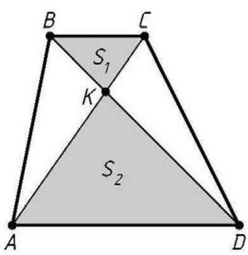
Следовательно, $S_{ABCD} = 10 + 20 + 30 + 60 = 120$.

7.13. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции и её основаниями, равны S_1 и S_2. Найдите площадь трапеции.

Ответ: $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.

Решение. Пусть K — точка пересечения диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$ и $S_{\Delta BKC} = S_1$, $S_{\Delta AKD} = S_2$. Из подобия треугольников BKC и DKA следует, что

$$\frac{CK}{AK} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}},$$



поэтому

$$S_{\Delta ABK} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}} \cdot S_1 = \sqrt{S_1 S_2}.$$

Аналогично

$$S_{\Delta DKC} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}} \cdot S_1 = \sqrt{S_1 S_2}.$$

Следовательно,

$$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2.$$

7.14. Площадь трапеции $ABCD$ равна 30. Точка P — середина боковой стороны AB. Точка R на стороне CD выбрана так, что $2CD = 3RD$. Прямые AR и PD пересекаются в точке Q. Найдите площадь треугольника APQ, если $AD = 2BC$.

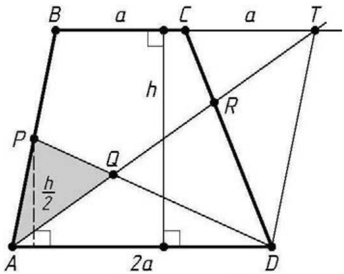
Ответ: $\frac{10}{3}$.

Решение. Пусть $BC = a$, $AD = 2a$; h — высота данной трапеции. Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2}\cdot h = \frac{3}{2}ah = 30.$$

Отсюда находим, что $ah = 20$.

Пусть T — точка пересечения прямых AR и BC. Из подобия треугольников CRT и DRA находим, что



$$CT = \frac{CR}{RD}\cdot AD = \frac{1}{2}AD = a.$$

Поэтому $BT = AD$, а $ABTD$ — параллелограмм.

Из подобия треугольников APQ и TDQ находим, что

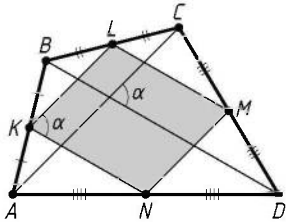
$$\frac{PQ}{QD} = \frac{AP}{TD} = \frac{AP}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle APQ} = \frac{1}{3}S_{\triangle APD} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AD\cdot\frac{h}{2} = \frac{1}{12}AD\cdot h = \frac{1}{6}ah = \frac{1}{6}\cdot 20 = \frac{10}{3}.$$

7.15. Дан выпуклый четырёхугольник площади S. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в серединах сторон данного.

Ответ: $\frac{1}{2}S$.



Решение. Первый способ. Пусть d_1 и d_2 — диагонали данного четырёхугольника, α — угол между ними. Четырёхугольник с вершинами в серединах сторон данного — параллелограмм со сторонами $\frac{1}{2}d_1$ и $\frac{1}{2}d_2$ и углом α между ними. Его площадь равна

$$\frac{1}{2}d_1\cdot\frac{1}{2}d_2\sin\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha\right) = \frac{1}{2}S.$$

Второй способ. Пусть S — площадь данного четырёхугольника $ABCD$, s — площадь четырёхугольника, вершины которого — середины K, L, M и N сторон AB, BC, CD и AD соответственно.

Поскольку KL и MN — средние линии треугольников ABC и ADC, то

$$S_{\triangle KBL} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}, \quad S_{\triangle MDN} = \frac{1}{4}S_{\triangle ADC}.$$

Поэтому

$$S_{\triangle KBL} + S_{\triangle MDN} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC} + \frac{1}{4}S_{\triangle ADC} = \frac{1}{4}(S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC}) = \frac{1}{4}S.$$

Аналогично

$$S_{\triangle KAN} + S_{\triangle MCL} = \frac{1}{4}S.$$

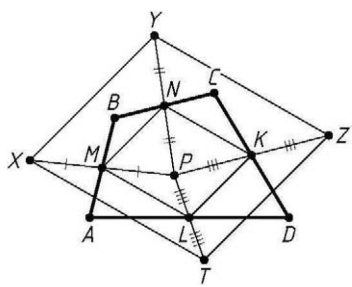
Следовательно,

$$s = S - S_{\triangle KBL} - S_{\triangle MDN} - S_{\triangle KAN} - S_{\triangle MCL} = S - \frac{1}{4}S - \frac{1}{4}S = \frac{1}{2}S.$$

7.16. Дан выпуклый четырёхугольник площади S. Внутри него выбирается точка и отображается симметрично относительно середин его сторон. Получаются четыре вершины нового четырёхугольника. Найдите его площадь.

Ответ: $2S$.

Решение. Пусть M, N, K и L — середины сторон соответственно AB, BC, CD и AD четырёхугольника $ABCD$, P — точка внутри этого четырёхугольника; X, Y, Z и T — образы точки P при симметрии относительно точек M, N, K и L соответственно.



Тогда MN — средняя линия треугольника XPY. Поэтому

$$S_{\triangle XPY} = 4S_{\triangle MNP}.$$

Записав аналогичные равенства для треугольников YPZ, ZPT и TPX, получим, что

$$S_{XYZT} = 4(S_{\triangle MNP} + S_{\triangle NKP} + S_{\triangle KLP} + S_{\triangle LMP}) = 4S_{MNKL},$$

а так как площадь параллелограмма $MNKL$ вдвое меньше площади четырёхугольника $ABCD$, то

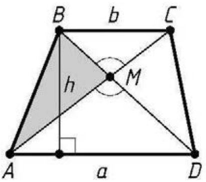
$$S_{XYZT} = 4S_{MNKL} = 4 \cdot \frac{1}{2}S = 2S.$$

7.17. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) диагонали пересекаются в точке M, $BC = b$, $AD = a$. Найдите отношение площади треугольника ABM к площади трапеции $ABCD$.

Ответ: $\dfrac{ab}{(a+b)^2}$.

Решение. Из подобия треугольников BMC и DMA следует, что
$$\frac{BM}{MD}=\frac{BC}{AD}=\frac{b}{a},$$
поэтому
$$\frac{BM}{BD}=\frac{b}{a+b},\quad S_{\Delta ABM}=\frac{BM}{BD}\cdot S_{\Delta ABD}=\frac{b}{a+b}\cdot S_{\Delta ABD}.$$

Пусть h — высота трапеции. Тогда



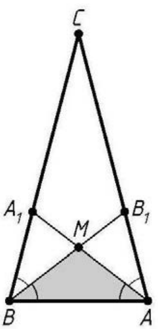
$$S_{ABCD}=\frac{a+b}{2}\cdot h,\quad S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}ah,\quad \frac{S_{\Delta ABD}}{S_{ABCD}}=\frac{a}{a+b}.$$

Следовательно,
$$\frac{S_{\Delta ABM}}{S_{ABCD}}=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{ABCD}}=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b}=\frac{ab}{(a+b)^2}.$$

7.18. В равнобедренном треугольнике ABC боковые стороны BC и AC в два раза больше основания AB. Биссектрисы углов при основании пересекаются в точке M. Какую часть треугольника ABC составляет площадь треугольника AMB?

Ответ: $\frac{1}{5}$.

Решение. Пусть AA_1 и BB_1 — биссектрисы углов при основании AB треугольника ABC. Поскольку



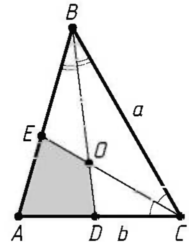
$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2},\quad BA_1=\frac{1}{3}BC,$$
то
$$S_{\Delta ABA_1}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.$$

Поскольку BM — биссектриса треугольника BAA_1, то
$$\frac{A_1M}{AM}=\frac{BA_1}{AB}=\frac{2}{3},\quad AM=\frac{3}{5}AA_1.$$

Следовательно,
$$S_{\Delta AMB}=\frac{3}{5}S_{\Delta ABA_1}=\frac{1}{5}S_{\Delta ABC}.$$

7.19. В треугольнике ABC, площадь которого равна S, проведены биссектриса CE и медиана BD, пересекающиеся в точке O. Найдите площадь четырёхугольника $ADOE$, зная, что $BC=a$, $AC=b$.

Ответ: $\frac{b(3a+b)S}{2(a+b)(2a+b)}$.



Решение. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{BO}{OD}=\frac{BC}{CD}=\frac{2a}{b}$. Поэтому $\frac{BO}{BD}=\frac{2a}{2a+b}$. Аналогично $\frac{BE}{EA}=\frac{a}{b}$. Поэтому $\frac{BE}{AB}=\frac{a}{a+b}$. Тогда

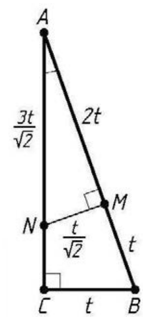
$$S_{\Delta BOE}=\frac{BO}{BD}\cdot\frac{BE}{BA}S_{\Delta ABD}=\frac{2a}{2a+b}\cdot\frac{a}{a+b}\cdot\frac{1}{2}S=$$
$$=a^2\cdot\frac{S}{(2a+b)(a+b)},$$

$$S_{ADOE}=\frac{1}{2}S-\frac{a^2S}{(2a+b)(a+b)}=\frac{1}{2}S\left(1-\frac{2a^2}{(2a+b)(a+b)}\right)=\frac{b(3a+b)S}{2(2a+b)(a+b)}.$$

7.20. В прямоугольном треугольнике синус меньшего угла равен $\frac{1}{3}$. Перпендикулярно гипотенузе проведена прямая, разбивающая треугольник на две равновеликие части. В каком отношении эта прямая делит гипотенузу?

Ответ: $2:1$.

Решение. Пусть M — точка на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, $\sin\angle A=\frac{1}{3}$, N — точка на катете AC, $MN\perp AB$ и $S_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$.



Обозначим $BC=t$. Тогда

$$AB=\frac{BC}{\sin\angle A}=\frac{t}{\frac{1}{3}}=3t.$$

Треугольник ANM подобен треугольнику ABC с коэффициентом, равным квадратному корню из отношения площадей, т. е. $\frac{1}{\sqrt{2}}$, значит, $MN=\frac{t}{\sqrt{2}}$.

Из прямоугольного треугольника ANM находим, что

$$AN=\frac{MN}{\sin\angle A}=3MN=\frac{3t}{\sqrt{2}},\quad AM=\sqrt{AN^2-MN^2}=\sqrt{\frac{9t^2}{2}-\frac{t^2}{2}}=2t,$$

поэтому $MB=AB-AM=3t-2t=t$. Следовательно,

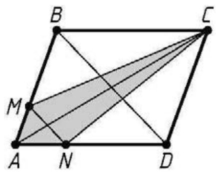
$$\frac{AM}{MB}=\frac{2t}{t}=2.$$

7.21. На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N так, что прямые MC и NC разбивают параллелограмм на три равновеликие части. Найдите MN, если $BD=d$.

Ответ: $\frac{1}{3}d$.

Решение. Поскольку

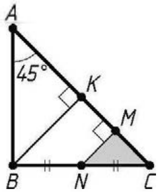
$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta CDA},\quad S_{\Delta MBC}=\frac{2}{3}S_{\Delta ABC},$$



то $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$. Аналогично $\frac{AN}{ND} = \frac{1}{2}$. Следовательно, треугольник AMN подобен треугольнику ABD с коэффициентом $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$. Поэтому

$$MN = \frac{1}{3}BD = \frac{1}{3}d.$$

7.22. В треугольнике ABC угол A равен 45°, а угол C острый. Из середины стороны BC опущен перпендикуляр NM на сторону AC. Площади треугольников NMC и ABC относятся как 1 : 8. Найдите углы треугольника ABC.



Ответ: 45°, 90°, 45°.

Решение. Поскольку

$$\frac{S_{\Delta NMC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{CN}{BC} \cdot \frac{CM}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CM}{AC} = \frac{1}{8},$$

то $\frac{CM}{AC} = \frac{1}{4}$.

Пусть BK — высота треугольника ABC. Тогда NM — средняя линия треугольника BKC. Поэтому $KM = MC$ и $AK = KC$, т. е. треугольник ABC равнобедренный. Следовательно,

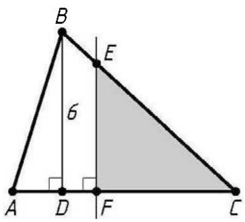
$$\angle C = 45^\circ, \quad \angle B = 90^\circ.$$

7.23. В треугольнике ABC из точки E стороны BC проведена прямая, параллельная высоте BD и пересекающая сторону AC в точке F. Отрезок EF делит треугольник ABC на две равновеликие фигуры. Найдите EF, если $BD = 6$, $\frac{AD}{DC} = \frac{2}{7}$.

Ответ: $9\sqrt{\frac{2}{7}}$.

Решение. Заметим, что

$$\frac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta CBA}} = \frac{CE}{CB} \cdot \frac{CF}{AC} = \frac{1}{2},$$



а так как $AC = \frac{9}{7}CD$, то

$$\frac{CE}{CB} \cdot \frac{CF}{\frac{9}{7}CD} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда находим, что

$$\frac{CE}{CB} \cdot \frac{CF}{CD} = \frac{9}{14}.$$

Из подобия треугольников CEF и CBD следует, что $\frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CD}$. Поэтому

$$\left(\frac{CE}{CB}\right)^2 = \frac{9}{14}, \quad \frac{CE}{CB} = \frac{3}{\sqrt{14}}, \quad EF = \frac{BD \cdot CE}{CB} = \frac{6 \cdot 3}{\sqrt{14}} = \frac{18}{\sqrt{14}} = 9\sqrt{\frac{2}{7}}.$$

7.24. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями S_1, S_2, S_3. Найдите площадь данного треугольника.

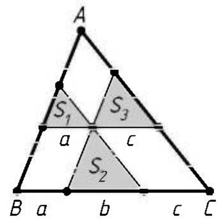
Ответ: $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$.

Решение. Каждый из получившихся треугольников подобен данному с коэффициентом соответственно $\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}$, $\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}$, $\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}$, где S — искомая площадь данного треугольника ABC.

Обозначим стороны этих треугольников, параллельные стороне BC треугольника ABC, через a, b и c соответственно. Тогда $a+b+c=BC$,

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}=\frac{a}{BC},\quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\frac{b}{BC},\quad \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{c}{BC}.$$

Сложив почленно последние три равенства, получим



$$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{a+b+c}{BC}=1.$$

Отсюда находим, что

$$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}.$$

Следовательно,

$$S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2.$$

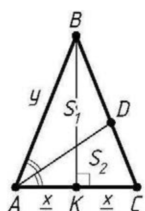
7.25. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB=BC)$ проведена биссектриса AD. Площади треугольников ABD и ADC равны соответственно S_1 и S_2. Найдите AC.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{S_2(S_1+S_2)}}{\sqrt[4]{4S_1^2-S_2^2}}$.

Решение. Обозначим $AB=BC=y$, $AC=x$. Пусть BK — высота треугольника ABC. Тогда

$$S_2+S_1=\frac{1}{2}AC\cdot BK=\frac{1}{2}x\sqrt{y^2-\frac{x^2}{4}},\qquad \frac{S_1}{S_2}=\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{y}{x}.$$

Выразим y из второго равенства и подставим в первое. После возведения обеих частей в квадрат получим



$$\frac{x^4(4S_1^2-S_2^2)}{4S_2^2}=4(S_1+S_2)^2.$$

Отсюда находим, что

$$x=\frac{2\sqrt{S_2(S_1+S_2)}}{\sqrt[4]{4S_1^2-S_2^2}}.$$

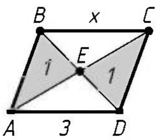
7.26. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 1, площадь всего четырёхугольника не превосходит 4, $AD=3$. Найдите сторону BC.

Ответ: 3.

Решение. Треугольники ABD и ACD равновелики, так как

$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle AED} = S_{\triangle DCE} + S_{\triangle AED} = S_{\triangle ACD}.$$

Тогда их высоты, опущенные на общее основание AD, равны. Следовательно, $BC \parallel AD$.



Пусть $BC=x$. Из подобия треугольников BEC и DEA следует, что

$$\frac{BE}{ED} = \frac{BC}{AD} = \frac{x}{3},$$

поэтому

$$S_{\triangle BEC} = \frac{BE}{ED} \cdot S_{\triangle DCE} = \frac{x}{3}, \quad S_{\triangle DEA} = \frac{DE}{BE} \cdot S_{\triangle ABE} = \frac{3}{x}.$$

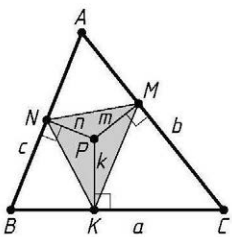
По условию задачи $S_{ABCD} \leqslant 4$, поэтому

$$\frac{x}{3} + \frac{3}{x} \leqslant 2.$$

С другой стороны, сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше 2, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда каждое из этих чисел равно 1. Следовательно,

$$\frac{x}{3} + \frac{3}{x} = 2, \quad \frac{x}{3} = \frac{3}{x} = 1, \quad x = 3.$$

7.27. Из точки P, расположенной внутри остроугольного треугольника ABC, опущены перпендикуляры на его стороны. Длины сторон и опущенных на них перпендикуляров соответственно равны a и k, b и m, c и n. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.



Ответ: $\dfrac{abc}{kmc+nma+knb}$.

Решение. Пусть K, M и N — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ соответственно; $PK=k$, $PM=m$, $PN=n$. Тогда

$$S_{\triangle KMN} = S_{\triangle MPN} + S_{\triangle KPN} + S_{\triangle MPK} =$$

$$= \frac{1}{2}mn\sin(180^\circ - \angle A) + \frac{1}{2}kn\sin(180^\circ - \angle B) + \frac{1}{2}km\sin(180^\circ - \angle C) =$$

$$= \frac{1}{2}(mn\sin\angle A + kn\sin\angle B + km\sin\angle C).$$

Следовательно,

$$\frac{S_{\Delta KMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2}(mn\sin\angle A + kn\sin\angle B + km\sin\angle C)}{\frac{1}{2}bc\sin\angle A} =$$

$$= \frac{mn + kn\cdot\frac{\sin\angle B}{\sin\angle A} + km\cdot\frac{\sin\angle C}{\sin\angle A}}{bc} = \frac{mn + kn\cdot\frac{b}{a} + km\cdot\frac{c}{a}}{bc} = \frac{mna + knb + kmc}{abc}$$

($\frac{\sin\angle B}{\sin\angle A} = \frac{b}{a}$, $\frac{\sin\angle C}{\sin\angle A} = \frac{c}{a}$ по теореме синусов).

7.28. Из точки P, расположенной внутри остроугольного треугольника ABC, опущены перпендикуляры на стороны AB, BC и CA. Перпендикуляры соответственно равны l, m, n. Вычислите площадь треугольника ABC, если углы BAC, ABC и ACB соответственно равны α, β и γ.

Ответ: $\dfrac{(l\sin\gamma + m\sin\alpha + n\sin\beta)^2}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$.

Решение. Проведём через точку P прямые, параллельные сторонам треугольника ABC. Они разобьют треугольник ABC на шесть частей, три из которых — треугольники с углами α, β, γ и высотами l, m, n. Если площади этих треугольников равны соответственно S_1, S_2 и S_3, то $S_{\Delta ABC} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$ (см. задачу 7.24). Поскольку

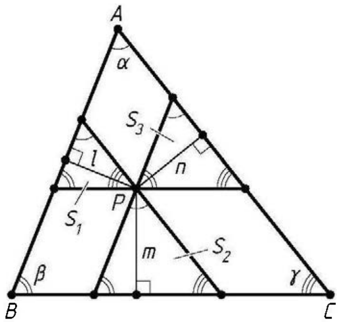
$$S_1 = \frac{l^2(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)}{2} = \frac{l^2\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta} = \frac{l^2\sin(180^\circ - \gamma)}{2\sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{l^2\sin\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta} = \frac{l^2\sin^2\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma},$$

$$S_2 = \frac{m^2\sin\alpha}{2\sin\gamma\sin\beta} = \frac{m^2\sin^2\alpha}{2\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha}, \quad S_3 = \frac{n^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin\gamma} = \frac{n^2\sin^2\beta}{2\sin\alpha\sin\gamma\sin\beta},$$

то

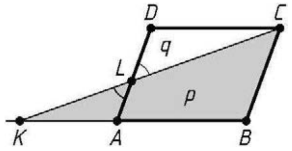
$$S_{\Delta ABC} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2 = \frac{(l\sin\gamma + m\sin\alpha + n\sin\beta)^2}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}.$$



7.29. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая, проходящая через вершину C, пересекает прямые AB и AD в точках K и L. Площади треугольников KBC и CDL равны p и q. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

Ответ: $2\sqrt{pq}$.

Решение. Рассмотрим случай, когда точка L лежит на стороне AD. Пусть S — площадь треугольника AKL. Тогда коэффициент подобия



треугольников AKL и BKC равен $\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{p}}$, а треугольников AKL и DCL — $\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{p}-\sqrt{S}}$. Поэтому

$$S = q\left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{p}-\sqrt{S}}\right)^2.$$

Отсюда находим, что

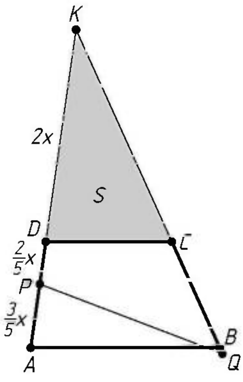
$$q = (\sqrt{p}-\sqrt{S})^2, \quad \sqrt{S} = \sqrt{p}-\sqrt{q}.$$

Следовательно,

$$S_{ABCD} = p - S + q = p - (\sqrt{p}-\sqrt{q})^2 + q = 2\sqrt{pq}.$$

Аналогично для случая, когда точка L лежит на продолжении стороны AD.

7.30. На боковых сторонах AD и BC трапеции $ABCD$ взяты точки P и Q соответственно, причём $AP : PD = 3 : 2$. Отрезок PQ разбивает трапецию на части, одна из которых по площади вдвое больше другой. Найдите отношение $CQ : QB$, если $AB : CD = 3 : 2$.



Ответ: $13 : 23$.

Решение. Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке K. Треугольник KDC подобен треугольнику KAB с коэффициентом $\frac{CD}{AB} = \frac{2}{3}$, значит, $\frac{KD}{KA} = \frac{2}{3}$. Положим $KD = 2x$, $AK = 3x$. Тогда $AD = x$, а так как $AP : PD = 3 : 2$, то

$$PD = \frac{2}{5}AD = \frac{2}{5}x, \quad KP = KD + PD = 2x + \frac{2}{5}x = \frac{12}{5}x.$$

Предположим, что площадь четырёхугольника $PDCQ$ вдвое больше площади четырёхугольника $APQB$. Обозначим $S_{\Delta KDC} = S$. Тогда

$$S_{\Delta KAB} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot S_{\Delta KDC} = \frac{9}{4}S, \quad S_{ABCD} = \frac{9}{4}S - S = \frac{5}{4}S,$$

$$S_{PDCQ} = \frac{2}{3}S_{ABCD} = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}S = \frac{5}{6}S, \quad S_{\Delta KPQ} = S + \frac{5}{6}S = \frac{11}{6}S, \quad \frac{S_{\Delta KDC}}{S_{\Delta KPQ}} = \frac{S}{\frac{11}{6}S} = \frac{6}{11},$$

а так как

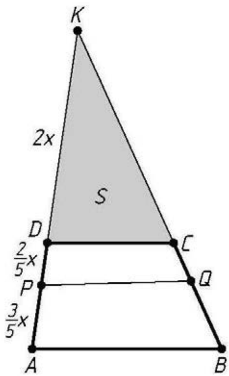
$$\frac{S_{\Delta KDC}}{S_{\Delta KPQ}} = \frac{KD}{KP} \cdot \frac{KC}{KQ} = \frac{2}{\frac{12}{5}} \cdot \frac{KC}{KQ} = \frac{5}{6} \cdot \frac{KC}{KQ} = \frac{6}{11},$$

то $\frac{KC}{KQ} = \frac{36}{55}$. Тогда точка Q лежит на продолжении стороны BC за точку B, так как $\frac{KC}{KB} = \frac{2}{3} > \frac{36}{55}$.

Пусть теперь площадь четырёхугольника $PDCQ$ вдвое меньше площади четырёхугольника $APQB$. Тогда

$$S_{PDCQ} = \frac{1}{3} S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} S = \frac{5}{12} S,$$

$$S_{\Delta KPQ} = S + \frac{5}{12} S = \frac{17}{12} S, \quad \frac{S_{\Delta KDC}}{S_{\Delta KPQ}} = \frac{S}{\frac{17}{12} S} = \frac{12}{17},$$



а так как

$$\frac{S_{\Delta KDC}}{S_{\Delta KPQ}} = \frac{KD}{KP} \cdot \frac{KC}{KQ} = \frac{2}{\frac{12}{5}} \cdot \frac{KC}{KQ} = \frac{5}{6} \cdot \frac{KC}{KQ} = \frac{12}{17},$$

то $\frac{KC}{KQ} = \frac{72}{85}$. Тогда точка Q лежит на стороне BC, так как $\frac{KC}{KB} = \frac{2}{3} < \frac{72}{85}$, причём

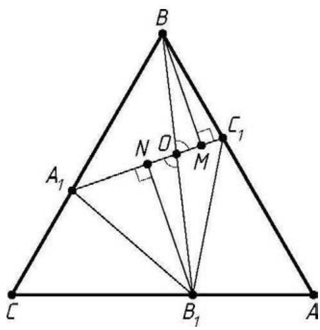
$$\frac{CQ}{QB} = \frac{KQ - KC}{KB - KQ} = \frac{KQ\left(1 - \frac{72}{85}\right)}{KQ\left(\frac{108}{85} - 1\right)} = \frac{85 - 72}{108 - 85} = \frac{13}{23}.$$

7.31. На сторонах AB, AC и BC правильного треугольника ABC расположены соответственно точки C_1, B_1 и A_1 так, что треугольник $A_1B_1C_1$ правильный. Отрезок BB_1 пересекает сторону C_1A_1 в точке O, причём $\frac{BO}{OB_1} = k$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A_1B_1C_1$.

Ответ: $1 + 3k$.

Решение. Опустим из точек B и B_1 перпендикуляры BM и B_1N на прямую A_1C_1. Тогда треугольники BMO и B_1NO подобны,

$$\frac{BM}{B_1N} = \frac{BO}{OB_1} = k.$$



Поэтому $S_{\Delta A_1C_1B} = kS_{\Delta A_1B_1C_1}$. Аналогично получим равенства

$$S_{\Delta B_1C_1A} = kS_{\Delta A_1B_1C_1}, \quad S_{\Delta A_1B_1C} = kS_{\Delta A_1B_1C_1}.$$

Значит,

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta A_1B_1C_1} + 3kS_{\Delta A_1B_1C_1} = (1+3k)S_{\Delta A_1B_1C_1}.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = 3k+1.$$

7.32. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, причём $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{2}{1}$. Найдите площадь треугольника, вершины которого — попарные пересечения отрезков AA_1, BB_1, CC_1, если площадь треугольника ABC равна 1.

Ответ: $\frac{1}{7}$.

Решение. Пусть K — точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1. Через точку B проведём прямую, параллельную AC, и продолжим AA_1 до пересечения с этой прямой в точке T. Треугольники BA_1T и CA_1A подобны с коэффициентом 2. Поэтому $BT = 2AC = 6AB_1$. Из подобия треугольников BKT и B_1KA находим, что

$$\frac{BK}{KB_1} = \frac{BT}{AB_1} = 6.$$

Поэтому

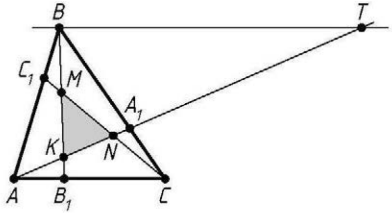
$$S_{\Delta AB_1K} = \frac{1}{7}S_{\Delta ABB_1} = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}S_{\Delta ABC} = \frac{1}{21}.$$

Аналогично находим, что

$$S_{\Delta BMC_1} = S_{\Delta CNA_1} = \frac{1}{21},$$

где M — точка пересечения BB_1 и CC_1, а N — AA_1 и CC_1. Следовательно,

$$S_{\Delta MNK} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ABB_1} - S_{\Delta BCC_1} - S_{\Delta CAA_1} + S_{\Delta AKB_1} + S_{\Delta BMC_1} + S_{\Delta CNA_1} = \\ = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{21} + \frac{1}{21} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}.$$



Задачи на доказательство и вычисление

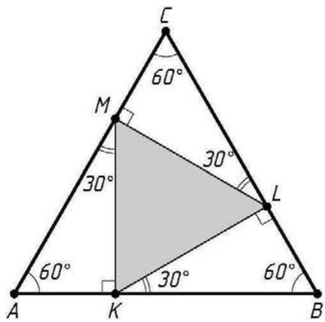
7.33.1. На каждой стороне равностороннего треугольника взято по точке. Стороны треугольника с вершинами в этих точках соответственно перпендикулярны сторонам исходного треугольника.

а) Докажите, что треугольник с вершинами в указанных точках также равносторонний.

б) Найдите отношение площади этого треугольника к площади исходного.

Ответ: 1 : 3.

Решение. а) Пусть точки K, L, M лежат на сторонах соответственно AB, BC и AC равностороннего треугольника ABC, причём $KL \perp BC$, $LM \perp AC$, $MK \perp AB$. Тогда



$$\angle MKL = 180^\circ - \angle AKM - \angle LKB = \\ = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

Аналогично $\angle KML = 60^\circ$. Значит, треугольник KLM также равносторонний.

б) Прямоугольные треугольники AKM, BLK и CML равны по гипотенузе и острому углу, а так как $CM = AK = \frac{1}{2}AM$, то $CM : AM = 1 : 2$. Аналогично $AK : KB = BL : LC = 1 : 2$. Тогда (см. п. 24д приложения 2)

$$S_{\Delta CML} = S_{\Delta BKL} = S_{\Delta AKM} = \frac{AK}{AB} \cdot \frac{AM}{AC} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} S_{\Delta ABC} = \frac{2}{9} S_{\Delta ABC},$$

$$S_{\Delta KLM} = S_{\Delta ABC} - 3S_{\Delta AKM} = S_{\Delta ABC} - \frac{2}{3} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}.$$

Следовательно, $\dfrac{S_{\Delta KLM}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{1}{3}$.

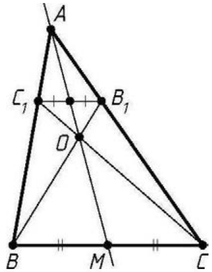
7.34.1. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC, причём $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O.

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC.

б) Найдите отношение площади четырёхугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC, если $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 2$.

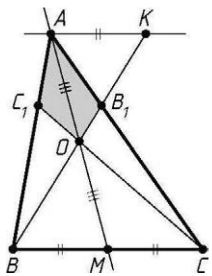
Ответ: 1 : 6.

Решение. а) Точки B_1 и C_1 делят стороны AC и AB треугольника ABC в одном и том же отношении, поэтому $B_1C_1 \parallel BC$. Значит, BC_1B_1C — трапеция. По замечательному свойству трапеции (см. п. 16а



приложения 2) прямая AO проходит через середину M стороны BC.

б) Через точку A проведём прямую, параллельную BC. Пусть эта прямая пересекает продолжение отрезка BB_1 в точке K. Коэффициент подобия треугольников AB_1K и CB_1B равен $\frac{1}{2}$, поэтому $AK = \frac{1}{2}BC = BM$. Значит, треугольники AOK и MOB равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Тогда O — середина отрезка AM.



Пусть площадь треугольника ABC равна S. Тогда

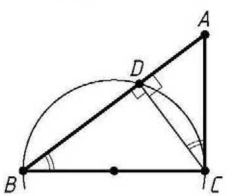
$$S_{\Delta ACM} = \frac{1}{2}S, \quad S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}S_{\Delta ACM} = \frac{1}{4}S,$$

$$S_{\Delta AOB_1} = \frac{AB_1}{AC} \cdot S_{\Delta AOC} = \frac{1}{3}S_{\Delta AOC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}S = \frac{1}{12}S.$$

Аналогично $S_{\Delta AOC_1} = \frac{1}{12}S$, значит, $S_{AB_1OC_1} = \frac{1}{6}S$. Следовательно, $\frac{S_{AB_1OC_1}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{6}$.

7.35.1. На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая отрезок AB в точке D. При этом $\angle ABC = \angle ACD$.

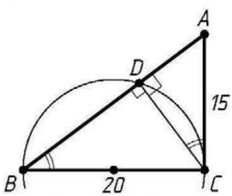
а) Докажите, что прямая CD разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника.



б) Найдите отношение площадей этих подобных треугольников, если $AC = 15$, $BC = 20$.

Ответ: $9:16$.

Решение. а) Точка D лежит на окружности с диаметром BC, значит, $\angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$. Следовательно, треугольники ADC и CDB подобны по двум углам.



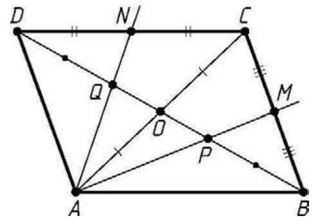
б) Треугольник ADC подобен треугольнику CDB с коэффициентом $\frac{AC}{BC} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$. Следовательно, их площади относятся как $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

7.36.1. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки P и Q, причём $BP = PQ = QD$.

а) Докажите, что прямые AP и AQ проходят через середины M и N сторон BC и CD соответственно.

б) Найдите отношение площади пятиугольника $CMPQN$ к площади параллелограмма $ABCD$.

Ответ: 1 : 3.

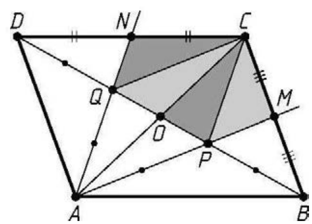


Решение. а) Пусть O — центр параллелограмма $ABCD$. Тогда

$$BP = \frac{1}{3}BD = \frac{1}{3}\cdot 2BO = \frac{2}{3}BO.$$

Точка P лежит на медиане BO треугольника ABC и делит её в отношении $2:1$, считая от вершины B, значит, P — точка пересечения медиан этого треугольника, а тогда медиана AM проходит через точку P. Следовательно, прямая AP проходит через середину BC. Аналогично прямая AQ проходит через середину CD.

б) Площадь треугольника POC в три раза меньше площади треугольника BOC, так как у этих треугольников общая высота, проведённая из вершины C, а основание OP первого треугольника в три раза меньше основания OB второго. Аналогично площадь треугольника PMC втрое меньше площади треугольника AMC.



Треугольники BOC и AMC равновелики, так как площадь каждого из них составляет четверть площади параллелограмма. Значит, сумма площадей треугольников POC и PMC, т. е. площадь четырёхугольника $CMPO$, втрое меньше площади треугольника ABC. Аналогично площадь четырёхугольника $CNQO$ втрое меньше площади треугольника ADC. Следовательно, площадь пятиугольника $CMPQN$ втрое меньше площади параллелограмма $ABCD$.

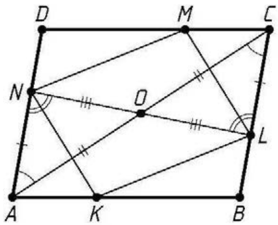
7.37.1. На сторонах AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки K, L, M и N соответственно, причём $\frac{AK}{KB} = \frac{BL}{LC} = \frac{CM}{MD} = \frac{DN}{NA}$.

а) Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм, а его центр совпадает с центром параллелограмма $ABCD$.

б) Найдите отношение площадей параллелограммов $KLMN$ и $ABCD$, если $\frac{AK}{KB} = 2$.

Ответ: 5 : 9.

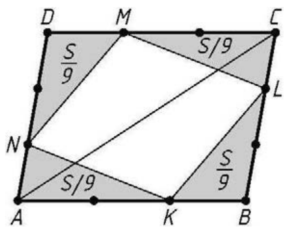
Решение. а) Пусть диагональ NL четырёхугольника $KLMN$ и диагональ AC параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Треугольники AON и COL равны по стороне ($AN = CL$, так как эти отрезки состав-



ляют одну и ту же часть от равных отрезков AD и BC) и двум прилежащим к ней углам. Значит, $OL = ON$ и $AO = OC$. Поэтому O — центр параллелограмма $ABCD$. Аналогично докажем, что диагональ KM четырёхугольника $KLMN$ проходит через точку O и делится ею пополам. Следовательно, $KLMN$ — параллелограмм с центром O.

б) Обозначим $S_{ABCD} = S$. Тогда (см. п. 24д приложения 2)

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}S, \quad S_{\triangle BKL} = \frac{BK}{BA} \cdot \frac{BL}{BC} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} S = \frac{1}{9} S.$$



Аналогично

$$S_{\triangle MDN} = \frac{1}{9}S, \quad S_{\triangle MCL} = \frac{1}{9}S, \quad S_{\triangle KAN} = \frac{1}{9}S.$$

Значит,

$$S_{KLMN} = S - 4 \cdot \frac{1}{9}S = \frac{5}{9}S.$$

Следовательно, $\dfrac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \dfrac{5}{9}$.

7.38.1. Вершины ромба расположены (по одной) на сторонах параллелограмма.

а) Докажите, что центры ромба и параллелограмма совпадают.

б) Найдите отношение площадей ромба и параллелограмма, если стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма, а диагонали параллелограмма относятся как $2:3$.

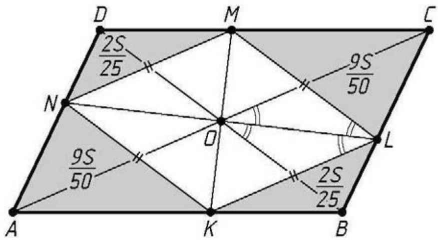
Ответ: $12:25$.

Решение. а) Известно, что если вершины одного параллелограмма лежат на сторонах другого параллелограмма (по одной), то центры параллелограммов совпадают (см. [2], с. 26).

б) Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм, в котором $\dfrac{BD}{AC} = \dfrac{2}{3}$, а вершины K, L, M, N ромба $KLMN$ лежат на отрезках AB, BC, CD, AD соответственно. Центр O параллелограмма является также центром ромба, а так как стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма и LO — биссектриса треугольника KLM, то OL — биссектриса треугольника BOC. По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{BL}{LC} = \frac{OB}{OC} = \frac{\frac{1}{2}BD}{\frac{1}{2}AC} = \frac{2}{3}.$$

Значит, $\dfrac{BK}{AB} = \dfrac{BL}{BC} = \dfrac{2}{5}$ и $\dfrac{CM}{CD} = \dfrac{CL}{BC} = \dfrac{3}{5}$.



Пусть площадь параллелограмма равна S. Треугольник BKL подобен треугольнику BAC с коэффициентом $\frac{2}{5}$, поэтому

$$S_{\Delta DMN} = S_{\Delta KBL} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 S_{\Delta BAC} = \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{2} S = \frac{2}{25} S.$$

Аналогично

$$S_{\Delta AKN} = S_{\Delta CML} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 S_{\Delta CDB} = \frac{9}{25} \cdot \frac{1}{2} S = \frac{9}{50} S.$$

Значит,

$$S_{KLMN} = S - 2 \cdot \frac{2}{25} S - 2 \cdot \frac{9}{50} S = \frac{12}{25} S.$$

Следовательно, $\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \frac{12}{25}$.

7.39.1. Около окружности описана равнобедренная трапеция.

а) Докажите, что её диагональ проходит через середину отрезка, концы которого — точки касания окружности с боковыми сторонами трапеции.

б) Найдите отношение оснований трапеции, если площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами трапеции составляет $\frac{3}{8}$ площади трапеции.

Ответ: $3:1$.

Решение. а) Пусть вписанная окружность касается оснований $AD = a$ и $BC = b$ ($a > b$) трапеции $ABCD$ в точках N и L соответственно, а боковых сторон AB и CD — соответственно в точках K и M. Тогда

$$BK = BL = LC = CM = \frac{b}{2}, \quad AK = AN = ND = DM = \frac{a}{2},$$

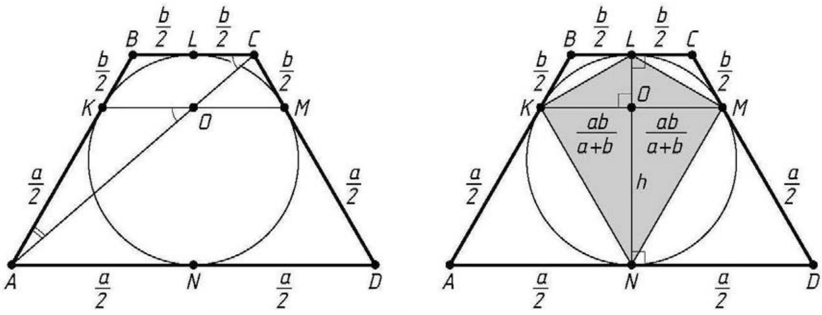
поэтому

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AK}{AK + KB} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2} + \frac{b}{2}} = \frac{a}{a+b}, \quad \frac{DM}{CD} = \frac{DM}{DM + MC} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2} + \frac{b}{2}} = \frac{a}{a+b},$$

значит, $KM \parallel AD$. Если O — точка пересечения AC и KM, то из подобия треугольников AKO и ABC находим, что

$$KO = BC \cdot \frac{AK}{AB} = b \cdot \frac{a}{a+b} = \frac{ab}{a+b}.$$

Аналогично $MO = \frac{ab}{a+b}$. Поэтому $MO = OK$, т. е. O — середина KM.



б) Пусть высота трапеции равна h. Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)h = \frac{1}{2}(a+b)h,$$

а так как $NL \perp KM$, то

$$S_{KLMN} = \frac{1}{2}KM \cdot LN = \frac{1}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} \cdot h = \frac{abh}{a+b}.$$

По условию задачи $S_{KLMN} = \frac{3}{8}S_{ABCD}$, или

$$\frac{abh}{a+b} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2}(a+b)h, \quad \frac{ab}{a+b} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2}(a+b), \quad 3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0,$$

$$3\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 10 \cdot \frac{a}{b} + 3 = 0,$$

откуда находим, что $\frac{a}{b} = 3$ или $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$, а так как $a > b$, то $\frac{a}{b} = 3$.

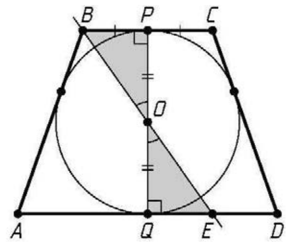
7.40.1. Окружность с центром O вписана в равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями $AD > BC$.

а) Докажите, что прямая BO делит площадь трапеции пополам.

б) Пусть M и N — точки касания окружности со боковыми сторонами трапеции. В каком отношении прямая MN делит площадь трапеции, если $AD = 2BC$?

Ответ: 7 : 20.

Решение. а) Пусть окружность касается оснований BC и AD в точках P и Q соответственно. Тогда точка O — середина отрезка PQ. Поскольку трапеция равнобедренная, точки P и Q — середины оснований.



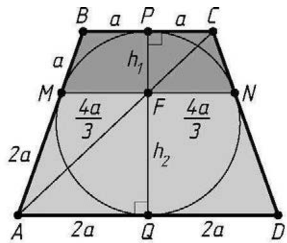
Пусть прямая BO пересекает основание AD в точке E. Прямоугольные треугольники OPB и OQE равны по катету и прилежащему острому углу, поэтому $S_{\triangle OPB} = S_{\triangle OQE}$. Прямоугольные трапеции $ABPQ$ и $PCDQ$ равновелики, так как у них соответственно равные основания и одна и та же высота PQ. Следовательно,

$$S_{\triangle ABE} = S_{ABPQ} - S_{\triangle OPB} + S_{\triangle OQE} = S_{ABPQ} = S_{PCDQ} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

б) Пусть точки M и N лежат на боковых сторонах AB и CD соответственно. Положим $BP = a$, $AQ = 2a$. Тогда

$$BC = 2a, \quad AD = 4a, \quad CN = CP = BP = BM = a, \quad AM = AQ = DQ = DN = 2a,$$

значит, $\frac{BM}{AM} = \frac{CN}{DN}$. Поэтому прямая MN параллельна основаниям трапеции.



Пусть диагональ AC пересекает отрезок MN в точке F. Треугольник AMF подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{AM}{AB} = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}$. Поэтому $MF = \frac{2}{3}BC = \frac{4}{3}a$. Аналогично $NF = \frac{4}{3}a$. Значит, $MN = MF + NF = = \frac{8a}{3}$.

Пусть h_1 и h_2 — высоты трапеций $MBCN$ и $AMND$ соответственно. Тогда $\frac{h_1}{h_2} = \frac{BM}{AM} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}} = \frac{\frac{1}{2}(MN + BC)h_1}{\frac{1}{2}(MN + AD)h_2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{8}{3}a + 2a)h_1}{\frac{1}{2}(\frac{8}{3}a + 4a)h_2} = \frac{\frac{14}{3}ah_1}{\frac{20}{3}ah_2} = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{20}.$$

7.41.1. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Треугольники AOB и COD равновелики.

а) Докажите, что $BC \parallel AD$.

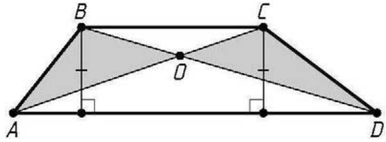
б) Найдите площади треугольников, на которые диагонали разбивают четырёхугольник $ABCD$, если его площадь равна 27, $BC = 8$, $AD = 16$.

Ответ: 3, 12, 6, 6.

Решение. а) Треугольники ABD и ACD равновелики, так как

$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOD} = S_{\triangle COD} + S_{\triangle AOD} = S_{\triangle ACD}.$$

Поскольку AD — общая сторона этих треугольников, то высоты, опущенные на эту сторону, равны. Следовательно, прямые BC и AD параллельны.



б) Обозначим $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD} = S$. Треугольник BOC подобен треугольнику DOA с коэффициентом $\frac{1}{2}$, следовательно,

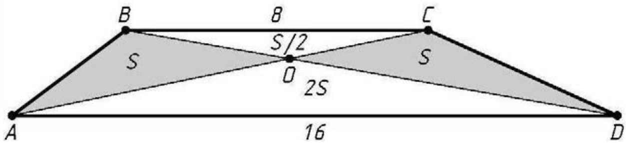
$$\frac{OC}{OA} = \frac{1}{2}, \quad \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOD}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$
$$\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOB}} = \frac{OC}{OA} = \frac{1}{2}.$$

Значит,

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}S, \quad S_{\triangle AOD} = 4S_{\triangle BOC} = 2S,$$

а так как $2S + \frac{1}{2}S + 2S = 27$, то $S = 6$. Следовательно,

$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD} = 6, \quad S_{\triangle BOC} = 3, \quad S_{\triangle AOD} = 12.$$



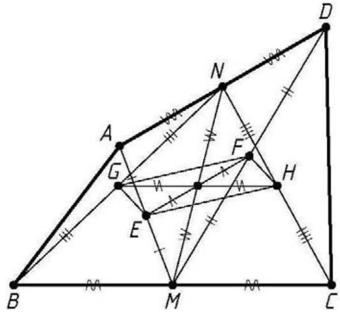
7.42.1. Вершины A и D четырёхугольника $ABCD$ соединены с серединой M стороны BC, а вершины B и C — с серединой N стороны AD.

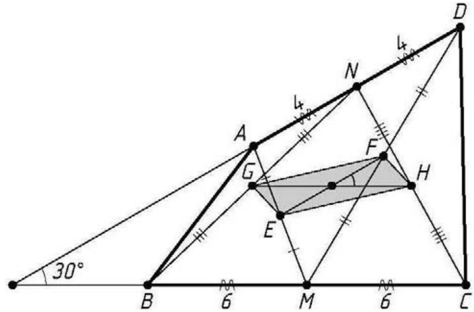
а) Докажите, что если середины отрезков AM, DM, BN, CN не лежат на одной прямой, то четырёхугольник с вершинами в этих серединах — параллелограмм.

б) Найдите площадь этого параллелограмма, если известно, что $AD = 6$, $BC = 8$, а угол между прямыми BC и AD равен $30°$.

Ответ: 3.

Решение. а) Пусть E, F, G, H — середины отрезков AM, DM, BN, CN соответственно. Отрезок MN — общая медиана треугольников AMD и BNC. Отрезок EF — средняя линия треугольника AMD, поэтому EF проходит через середину медианы MN и делится ею пополам. Аналогично отрезок HG также проходит через середину MN и делится ею пополам. Значит, диагонали EF и GH четырёхугольника $EGFH$ проходят через середину MN и делятся этой серединой пополам. Следовательно, $EGFH$ — параллелограмм.





б) Диагонали параллелограмма $EGFH$ параллельны сторонам AD и BC четырёхугольника $ABCD$ и равны их половинам. Угол между этими диагоналями также равен 30°. Следовательно,

$$S_{EGFH} = \frac{1}{2} EF \cdot GH \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

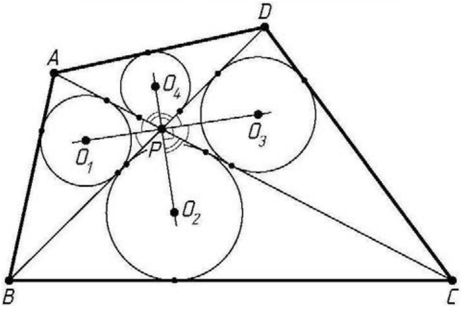
7.43.1. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. В треугольники APB, BPC, CPD и APD вписаны окружности с центрами O_1, O_2, O_3 и O_4 соответственно.

а) Докажите, что прямые O_1O_3 и O_2O_4 перпендикулярны.

б) Пусть прямая O_1O_3 пересекает стороны AB и CD в точках M и N соответственно. Найдите отношение площадей треугольников CPN и DPN, если около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и $AM : MB = 1 : 2$.

Ответ: $2 : 1$.

Решение. а) Центр окружности, вписанной в треугольник, есть точка пересечения его биссектрис, а так как биссектрисы вертикальных



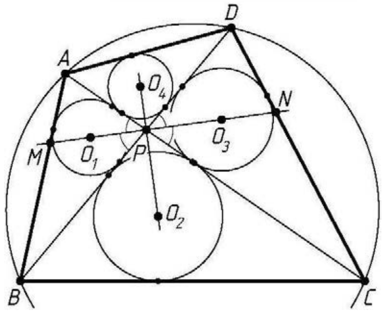
углов лежат на одной прямой, то прямые O_1O_3 и O_2O_4 пересекаются в точке P. Биссектрисы смежных углов перпендикулярны, поэтому $\angle O_1PO_2 = 90^\circ$. Следовательно, прямые O_1O_3 и O_2O_4 перпендикулярны.

б) По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AM}{MB} = \frac{PA}{PB}$ и $\frac{DN}{CN} = \frac{PD}{PC}$. По теореме о произведениях отрезков пересекающихся хорд $PA \cdot PC = PB \cdot PD$, поэтому $\frac{PA}{PB} = \frac{PD}{PC}$. Значит,

$$\frac{DN}{CN} = \frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

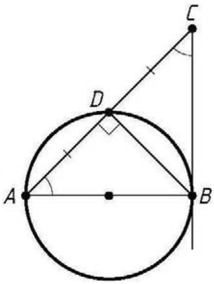
$$\frac{S_{\Delta CPN}}{S_{\Delta DPN}} = \frac{CN}{ND} = 2.$$



§ 8. Касательная к окружности

Подготовительные задачи

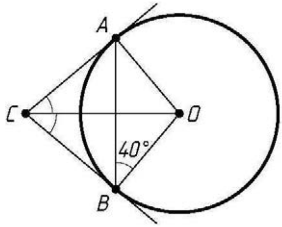
8.1. В окружности проведён диаметр AB. Прямая, проходящая через точку A, пересекает в точке C касательную к окружности, проведённую через точку B. Отрезок AC делится окружностью пополам. Найдите угол BAC.



Ответ: 45°.

Решение. Пусть окружность пересекает отрезок AC в точке D. В прямоугольном треугольнике ABC высота BD является медианой, значит, этот треугольник равнобедренный. Следовательно, $\angle BAC = \angle BAD = 45°$.

8.2. Две прямые касаются окружности с центром O в точках A и B и пересекаются в точке C. Найдите угол между этими прямыми, если $\angle ABO = 40°$.



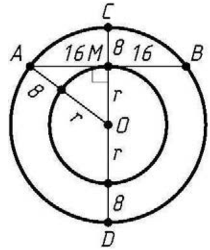
Ответ: 80°.

Решение. Поскольку CO — биссектриса угла ACB, а треугольник ABC равнобедренный, то $CO \perp AB$. Углы ABO и BCO равны, так как каждый из них в сумме с углом BOC составляет 90°. Следовательно, $\angle ACB = 2\angle BCO = 2 \cdot 40° = 80°$.

8.3. В большей из двух концентрических окружностей (имеющих общий центр) проведена хорда, равная 32 и касающаяся меньшей окружности. Найдите радиус каждой из окружностей, если ширина образовавшегося кольца равна 8.

Ответ: 12 и 20.

Решение. Пусть O — центр окружностей, AB — данная хорда большей окружности, M — её точка касания с меньшей окружностью, r — радиус меньшей окружности. Тогда M — середина AB (так как $OM \perp AB$).



Первый способ. По теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике AMO имеем

$$OA^2 = OM^2 + MA^2, \quad \text{или} \quad (r+8)^2 = r^2 + 16^2.$$

Из этого уравнения находим, что $r = 12$.

Второй способ. Проведём диаметр CD, содержащий точку M (M лежит между C и O). Тогда по теореме о произведениях отрезков пересекающихся хорд

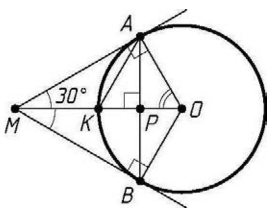
$$CM \cdot MD = AM \cdot MB, \quad \text{или} \quad 8(2r+8) = 16^2.$$

Из этого уравнения находим, что $r = 12$.

8.4. Две прямые, проходящие через точку M, лежащую вне окружности с центром O, касаются окружности в точках A и B. Отрезок OM делится окружностью пополам. В каком отношении отрезок OM делится прямой AB?

Ответ: $1:3$, считая от точки O.

Решение. Биссектриса равнобедренного треугольника AMB, проведённая из вершины M, является высотой. Поэтому $AB \perp MO$. Пусть окружность пересекает отрезок OM в точке K. В прямоугольном треугольнике AMO катет OA равен половине гипотенузы MO, значит, $\angle AMO = 30°$, а $\angle AOM = 60°$. Поскольку угол между равными сторонами OA и OK равнобедренного треугольника AOK равен $60°$, треугольник равносторонний. Его высота AP является медианой, поэтому



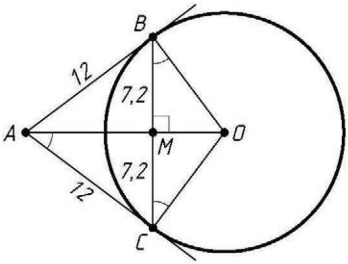
$$OP = KP = \frac{1}{2}OK = \frac{1}{4}OM.$$

Следовательно, $OP : MP = 1 : 3$.

8.5. Из одной точки проведены к окружности две касательные. Длина каждой касательной равна 12, а расстояние между точками касания равно 14,4. Найдите радиус окружности.

Ответ: 9.

Решение. Пусть A — данная точка, B и C — точки касания, O — центр окружности. Поскольку прямая OA перпендикулярна отрезку BC и проходит через его середину M, то



$$\angle OCB = \angle OAC,$$

$$\sin\angle OAC = \frac{CM}{AC} = \frac{7{,}2}{12} = \frac{3}{5}.$$

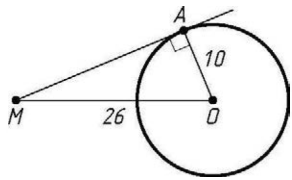
Поэтому $\cos\angle OAC = \frac{4}{5}$. Из треугольника OCM находим, что

$$OC = \frac{CM}{\cos\angle OCM} = 9.$$

8.6. Прямая, проходящая через точку M, удалённую от центра окружности радиуса 10 на расстояние, равное 26, касается окружности в точке A. Найдите AM.

Ответ: 24.

Решение. Пусть O — центр окружности. Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания, поэтому треугольник AMO прямоугольный. По теореме Пифагора



$$AM = \sqrt{OM^2 - OA^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} =$$
$$= \sqrt{(26-10)(26+10)} = \sqrt{16 \cdot 36} = 24.$$

8.7. Окружности радиусов R и r $(R > r)$ касаются некоторой прямой. Линия центров пересекает эту прямую под углом 30°. Найдите расстояние между центрами окружностей.

Ответ: $2(R \pm r)$.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиусов r и R соответственно, A_1 и A_2 — их точки касания с данной прямой, M — точка пересечения прямых A_1A_2 и O_1O_2.

В прямоугольных треугольниках A_1O_1M и A_2O_2M углы A_1MO_1 и A_2MO_2 равны 30°, поэтому

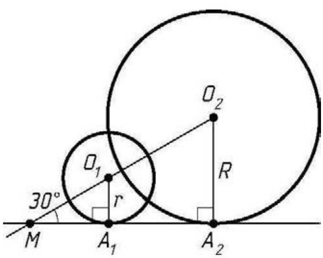
$$O_1M = 2O_1A_1 = 2r, \quad O_2M = 2A_2O_2 = 2R.$$

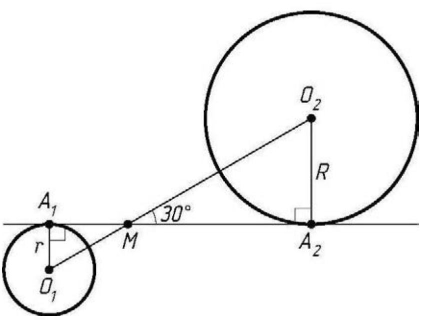
Следовательно, если центры окружностей расположены по одну сторону от данной прямой (см. рисунок слева), то

$$O_1O_2 = O_2M - O_1M = 2(R-r),$$

а если по разные (см. рисунок справа), то

$$O_1O_2 = O_2M + O_1M = 2(R+r).$$

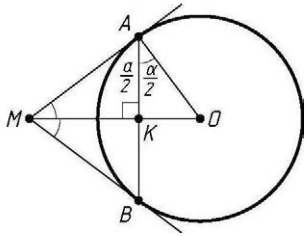




8.8. Из точки M проведены касательные MA и MB к окружности (A и B — точки касания). Найдите радиус окружности, если $\angle AMB = \alpha$ и $AB = a$.

Ответ: $\dfrac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Решение. Центр O окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle AMO = \dfrac{\alpha}{2}$. Отрезок OM перпендикулярен хорде AB, проходит через её середину K, а $\angle OAK = \angle AMO = \dfrac{\alpha}{2}$. Из прямоугольного треугольника AOK находим, что

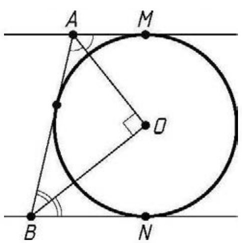


$$OA = \frac{AK}{\cos\angle OAK} = \frac{\frac{a}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

8.9. Окружность с центром O касается двух параллельных прямых. Проведена касательная к окружности, пересекающая эти прямые в точках A и B. Найдите угол AOB.

Ответ: 90°.

Решение. Пусть окружность с центром O касается данных прямых в точках M и N. Тогда AO — биссектриса угла BAM, а BO — биссектриса угла ABN. Поскольку $\angle BAM + \angle ABN = 180^\circ$, то

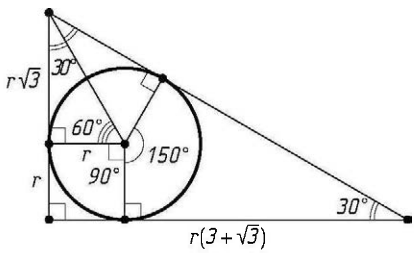


$$\angle BAO + \angle ABO = \frac{1}{2}\angle BAM + \frac{1}{2}\angle ABN =$$
$$= \frac{1}{2}(\angle BAM + \angle ABN) = \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Следовательно,

$$\angle AOB = 180^\circ - (\angle BAO + \angle ABO) = 90^\circ.$$

8.10. На окружности радиуса r выбраны три точки таким образом, что окружность оказалась разделённой на три дуги, градусные меры которых относятся как $3:4:5$. В точках деления к окружности проведены касательные. Найдите площадь треугольника, образованного этими касательными.



Ответ: $r^2(2\sqrt{3}+3)$.

Решение. Угловые величины полученных дуг равны

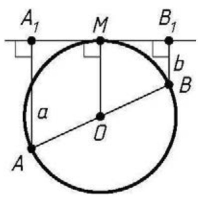
$$\frac{3}{12}\cdot 360^\circ = 90^\circ, \quad \frac{4}{12}\cdot 360^\circ = 120^\circ, \quad \frac{5}{12}\cdot 360^\circ = 150^\circ,$$

поэтому углы треугольника равны 90°, 60° и 30°. Тогда меньший катет равен $r(\sqrt{3}+1)$, а больший — $r(\sqrt{3}+3)$.

8.11. Расстояния от концов диаметра окружности до некоторой касательной равны a и b. Найдите радиус окружности.

Ответ: $\frac{a+b}{2}$.

Решение. Пусть прямая касается окружности с центром O в точке M. Опустим перпендикуляры AA_1 и BB_1 из концов диаметра AB на эту прямую, $AA_1 = a$, $BB_1 = b$. Поскольку $OM \perp A_1B_1$, то $AA_1 \parallel OM \parallel BB_1$, а так как O — середина AB, то OM — средняя линия трапеции AA_1B_1B (или прямоугольника, если $a = b$). Следовательно,

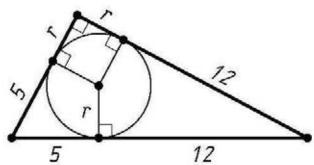


$$OM = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1) = \frac{a+b}{2}.$$

8.12. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки, равные 5 и 12. Найдите катеты треугольника.

Ответ: 8 и 15.

Решение. Обозначим радиус вписанной окружности через r. Тогда катеты треугольника равны $5+r$ и $12+r$. По теореме Пифагора



$$(5+r)^2 + (12+r)^2 = (5+12)^2.$$

Из этого уравнения находим, что $r = 3$.

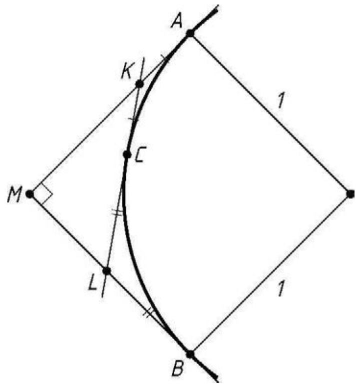
Тренировочные задачи

8.13. Из точки M, лежащей вне окружности радиуса 1, проведены к окружности две взаимно перпендикулярные касательные MA и MB. Между точками касания A и B на меньшей дуге AB взята произвольная точка C, и через неё проведена третья касательная KL, образующая с касательными MA и MB треугольник KLM. Найдите периметр этого треугольника.

Ответ: 2.

Решение. Поскольку $KA = KC$ и $BL = LC$, то

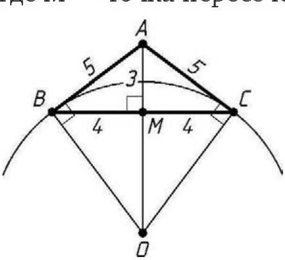
$$ML + LK + KM = ML + (LC + CK) + KM = \\ = (ML + LC) + (CK + KM) = (ML + LB) + (AK + KM) = \\ = MB + AM = 1 + 1 = 2.$$



8.14. На основании равнобедренного треугольника, равном 8, как на хорде построена окружность, касающаяся боковых сторон треугольника. Найдите радиус окружности, если высота, опущенная на основание треугольника, равна 3.

Ответ: $\frac{20}{3}$.

Решение. Пусть BC — основание данного равнобедренного треугольника ABC, O — центр окружности. Тогда $AO \perp BC$ и $BM = MC$, где M — точка пересечения отрезков AO и BC.



В прямоугольном треугольнике AMC известно, что $AM = 3$ и $MC = 4$. Поэтому $AC = 5$.

Из подобия треугольников MCO и MAC следует, что $\frac{OC}{AC} = \frac{MC}{AM}$. Следовательно,

$$OC = \frac{AC \cdot MC}{AM} = \frac{5 \cdot 4}{3} = \frac{20}{3}.$$

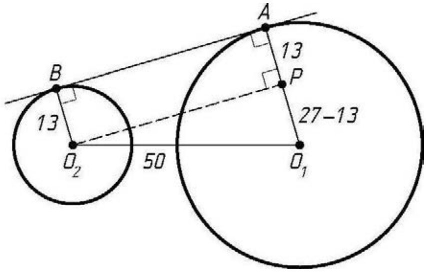
8.15. Радиусы двух окружностей равны 27 и 13, а расстояние между центрами равно 50. Найдите длины общих касательных к этим окружностям.

Ответ: 48 и 30.

Решение. Пусть O_1 — центр окружности радиуса 27, O_2 — центр окружности радиуса 13, A и B соответственно — точки касания окружностей с их общей внешней касательной, C и D соответственно — с внутренней, P — основание перпендикуляра, опущенного из O_2 на O_1A. Из прямоугольного треугольника O_1O_2P находим, что

$$O_2P = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1P^2} = \sqrt{50^2 - (27-13)^2} = 48,$$

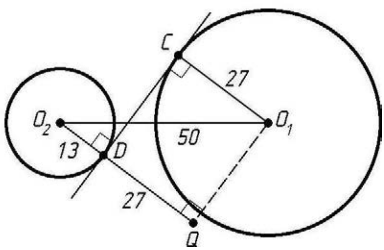
а так как APO_2B — прямоугольник, то $AB = O_2P = 48$.



Пусть Q — основание перпендикуляра, опущенного из O_1 на продолжение радиуса O_2D. Тогда

$$O_1Q = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2Q^2} = \sqrt{50^2 - (27+13)^2} = 30,$$

а так как DQO_1C — прямоугольник, то $CD = O_1Q = 30$.

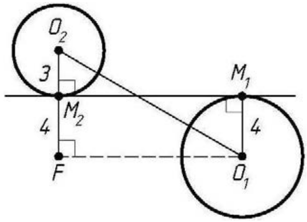


8.16. Две окружности радиусов 4 и 3 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются некоторой прямой в точках M_1 и M_2 соответственно и лежат по разные стороны от этой прямой. Отношение отрезка O_1O_2 к отрезку M_1M_2 равно $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Найдите O_1O_2.

Ответ: 14.

Решение. Опустим перпендикуляр O_1F из центра первой окружности на продолжение радиуса O_2M_2 второй окружности. Тогда

$$O_1F = M_1M_2, \quad M_2F = O_1M_1 = 4, \quad O_2F = O_2M_2 + M_2F = 3 + 4 = 7.$$



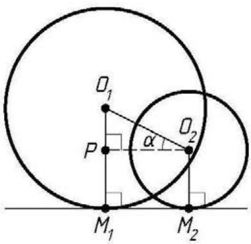
Из прямоугольного треугольника O_1FO_2 находим, что

$$\cos\angle FO_1O_2 = \frac{O_1F}{O_1O_2} = \frac{M_1M_2}{O_1O_2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

значит, $\angle FO_1O_2 = 30^\circ$. Следовательно, $O_1O_2 = 2O_2F = 2\cdot 7 = 14$.

8.17. Две окружности радиусов 12 и 7 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются некоторой прямой в точках M_1 и M_2 соответственно и лежат по одну сторону от этой прямой. Отношение отрезков M_1M_2 и O_1O_2 равно $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Найдите M_1M_2.

Ответ: 10.



Решение. Пусть P — проекция точки O_2 на прямую O_1M_1. Обозначим $\angle O_1O_2P = \alpha$. Тогда

$$\cos\alpha = \frac{O_2P}{O_1O_2} = \frac{M_1M_2}{O_1O_2} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2.$$

В прямоугольном треугольнике O_1PO_2

$$O_1P = O_1M_1 - PM_1 = O_1M_1 - O_2M_2 = 12 - 7 = 5,$$

следовательно,

$$M_1M_2 = O_2P = O_1P\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 5\cdot 2 = 10.$$

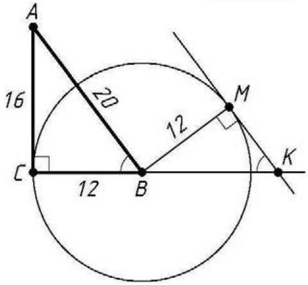
8.18. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен 16 и катет BC равен 12. Построена окружность с центром B и радиусом BC, и к ней проведена касательная, параллельная гипотенузе. Катет BC продолжен до пересечения с проведённой касательной. Определите, на сколько продолжен катет.

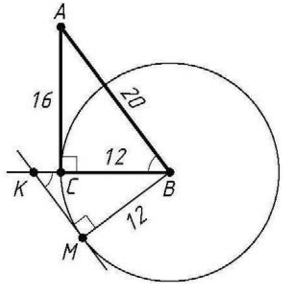
Ответ: 15 или 3.

Решение. Пусть M — точка касания, K — точка пересечения касательной с продолжением катета CB. По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{CB^2 + CA^2} = \sqrt{144 + 256} = 20.$$

Рассмотрим случай, когда точка K лежит на продолжении катета BC за точку B (см. рисунок слева). Прямоугольные треугольники BMK и ACB подобны, поэтому $\frac{BK}{BM} = \frac{AB}{AC}$. Следовательно, $BK = \frac{20 \cdot 12}{16} = 15$.





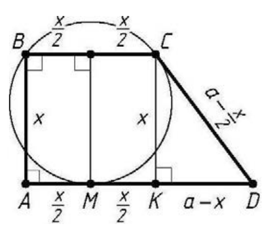
Если же точка K лежит на продолжении катета BC за точку C (см. рисунок справа), то аналогично получим, что $BK = 15$. Следовательно,

$$CK = BK - BC = 15 - 12 = 3.$$

8.19. В прямоугольной трапеции меньшее основание равно высоте, а большее основание равно a. Найдите боковые стороны трапеции, если известно, что одна из них касается окружности, проходящей через концы меньшего основания и касающейся большего основания.

Ответ: $\frac{4a}{7}$, $\frac{5a}{7}$.

Решение. Обозначим меньшее основание BC и меньшую боковую сторону трапеции $ABCD$ через x. Пусть M — точка касания окружности с бóльшим основанием AD. Тогда точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC, поэтому



$$AM = \frac{1}{2}BC = \frac{x}{2}, \quad CD = MD = AD - AM = a - \frac{x}{2}.$$

Пусть K — проекция вершины C на AD. Тогда $KD = a - x$, $CK = x$. По теореме Пифагора

$$CD^2 = CK^2 + KD^2, \quad \text{или} \quad \left(a - \frac{x}{2}\right)^2 = x^2 + (a-x)^2.$$

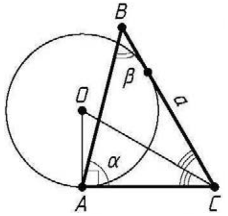
Отсюда находим, что $x = \frac{4a}{7}$. Тогда

$$CD = a - \frac{x}{2} = a - \frac{2a}{7} = \frac{5a}{7}.$$

8.20. В треугольнике ABC известно, что $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Найдите радиус окружности, касающейся стороны AC в точке A и касающейся стороны BC.

Ответ: $\dfrac{a \sin\beta \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\alpha}$.

Решение. Пусть O — центр окружности. Тогда OA — её радиус,



$$OA = AC \operatorname{tg}\angle ACO = AC \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle ACB\right).$$

Из данного треугольника по теореме синусов находим, что $AC = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$.

Поскольку $\angle ACB = 180^\circ - \alpha - \beta$, то

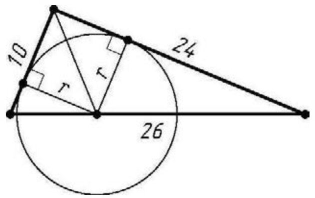
$$OA = \frac{a\sin\beta \operatorname{tg}\left(90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin\alpha} = \frac{a\sin\beta \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\alpha}.$$

8.21. Дан треугольник со сторонами 10, 24 и 26. Две меньшие стороны являются касательными к окружности, центр которой лежит на большей стороне. Найдите радиус окружности.

Ответ: $\dfrac{120}{17}$.

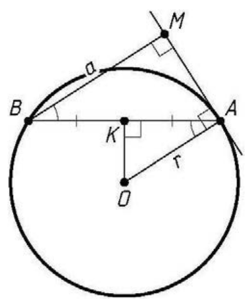
Решение. Заметим, что данный треугольник прямоугольный ($24^2 + 10^2 = 26^2$). Пусть r — искомый радиус.

Отрезок, соединяющий вершину прямого угла с центром данной окружности, разбивает треугольник на два треугольника. Радиусы



окружности, проведённые в точки касания, являются высотами этих треугольников. Сумма площадей получившихся треугольников равна площади данного треугольника ($\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 = 120$), т. е. $5r + 12r = 120$. Отсюда находим, что $r = \dfrac{120}{17}$.

8.22. Найдите длину хорды, если дан радиус r окружности и расстояние a от одного конца хорды до касательной, проведённой через другой её конец.



Ответ: $\sqrt{2ar}$.

Решение. Пусть O — центр данной окружности, M — основание перпендикуляра, опущенного из конца B хорды AB на касательную к окружности, проведённую через точку A, K — середина AB.

Поскольку треугольники AKO и BMA подобны,

$$\frac{AK}{AO} = \frac{MB}{AB}, \quad \text{или} \quad \frac{AB}{2r} = \frac{a}{AB}.$$

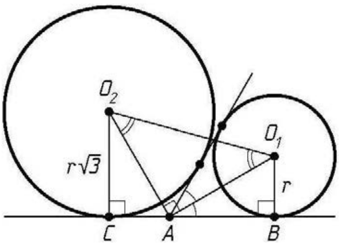
Следовательно, $AB = \sqrt{2ar}$.

8.23. Один из смежных углов с вершиной A вдвое больше другого. В эти углы вписаны окружности с центрами O_1 и O_2. Найдите углы треугольника O_1AO_2, если отношение радиусов окружностей равно $\sqrt{3}$.

Ответ: $90°$, $45°$, $45°$ или $90°$, $\operatorname{arctg} 3$, $\operatorname{arcctg} 3$.

Решение. Один из смежных углов равен $60°$, а второй — $120°$.

Пусть окружность с центром O_1 радиуса r вписана в угол, равный $60°$, а окружность с центром O_2 радиуса $r\sqrt{3}$ — в угол, равный $120°$, причём окружности касаются прямой, содержащей дополнительные стороны этих углов, в точках B и C соответственно.



Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла, поэтому

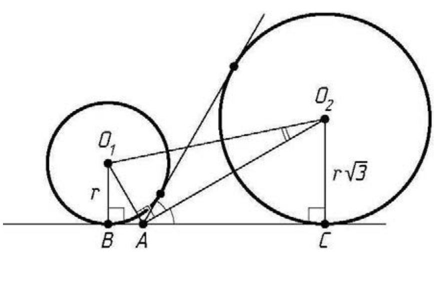
$$\angle O_1AB = 30°, \quad \angle O_2AC = 60°,$$
$$\angle O_1AO_2 = 90°.$$

Из прямоугольных треугольников O_1AB и O_2AC находим, что

$$AO_1 = 2O_1B = 2r, \quad AO_2 = \frac{O_2C}{\sin 60°} = \frac{r\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2r.$$

Треугольник O_1AO_2 прямоугольный и равнобедренный, следовательно, его острые углы равны $45°$.

Пусть теперь окружность с центром O_1 радиуса r вписана в угол, равный $120°$, а окружность с центром O_2 радиуса $r\sqrt{3}$ — в угол, равный $60°$, причём окружности касаются прямой, содержащей дополнительные стороны этих углов, в точках B и C соответственно. Из



прямоугольных треугольников O_1AB и O_2AC находим, что

$$AO_1 = \frac{O_1B}{\sin 60^\circ} = \frac{2r}{\sqrt{3}}, \quad AO_2 = 2O_2C = 2r\sqrt{3}.$$

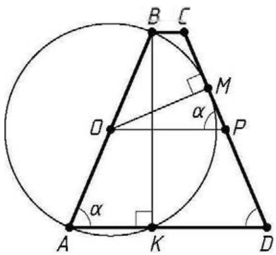
Следовательно,

$$\operatorname{tg}\angle AO_1O_2 = \frac{AO_2}{AO_1} = \frac{2r\sqrt{3}}{\frac{2r}{\sqrt{3}}} = 3, \quad \operatorname{tg}\angle AO_2O_1 = \frac{1}{3}.$$

8.24. В равнобедренной трапеции с острым углом α при основании окружность, построенная на боковой стороне как на диаметре, касается другой боковой стороны. В каком отношении она делит большее основание трапеции?

Ответ: $\sin 2\alpha$.

Решение. Пусть O — центр окружности (середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$), OP — средняя линия трапеции, K — точка пересечения указанной окружности с большим основанием AD. Тогда BK — перпендикуляр к AD и $KD = \frac{1}{2}(AD+BC) = OP$. Если M — точка касания окружности с боковой стороной CD, то



$$OM = \frac{1}{2}AB, \quad \angle MPO = \angle KAB = \alpha,$$

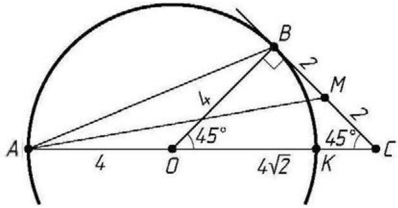
$$KD = OP = \frac{OM}{\sin\alpha} = \frac{AB}{2\sin\alpha}, \quad AK = AB\cos\alpha.$$

Следовательно,

$$\frac{AK}{KD} = \frac{AB\cos\alpha}{\frac{AB}{2\sin\alpha}} = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha.$$

8.25. В окружности радиуса 4 проведены хорда AB и диаметр AK, образующий с хордой угол $\frac{\pi}{8}$. В точке B проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение диаметра AK в точке C. Найдите медиану AM треугольника ABC.

Ответ: $2\sqrt{9+6\sqrt{2}}$.



Решение. Пусть O — центр окружности. Тогда

$$\angle BOC = 2\angle BAO = 45^\circ.$$

Из прямоугольного треугольника OBC находим, что $BC=4$ и $OC=4\sqrt{2}$. Поэтому $AC = AO + OC = 4 + 4\sqrt{2}$. Медиану AM находим по теореме косинусов из треугольника AMC:

$$AM^2 = AC^2 + CM^2 - 2AC\cdot CM\cos 45^\circ =$$
$$= (4+4\sqrt{2})^2 + 4 - 2\cdot 2\cdot(4+4\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 4(9+6\sqrt{2}).$$

8.26. На прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 12, взяты точки A и B, причём $OA = 15$, $AB = 5$ и A лежит между O и B. Из точек A и B проведены касательные к окружности, точки касания которых лежат по одну сторону от прямой OB. Найдите площадь треугольника ABC, где C — точка пересечения этих касательных.

Ответ: $\frac{150}{7}$.

Решение. Обозначим через M и N точки касания окружности с прямыми, проходящими через точки A и B соответственно, $\angle OAM = \alpha$, $\angle OBN = \beta$. Тогда

$$\angle ACB = \alpha - \beta, \quad \frac{OM}{OA} = \sin\alpha, \quad \frac{ON}{OB} = \sin\beta.$$

Поэтому

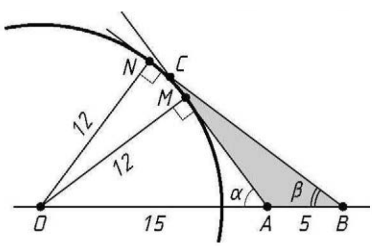
$$\sin\alpha = \frac{4}{5}, \quad \sin\beta = \frac{3}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos\beta = \frac{4}{5}.$$

По теореме синусов $\frac{BC}{AB} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\sin(\alpha - \beta)}$, поэтому

$$BC = \frac{AB\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{AB\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta} = \frac{5\cdot\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}} = \frac{100}{7}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle ABC = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{100}{7}\cdot\frac{3}{5} = \frac{150}{7}.$$



8.27. В угол с вершиной A, равный 60°, вписана окружность с центром O. К этой окружности проведена касательная, пересекающая стороны угла в точках B и C. Отрезок BC пересекается с отрезком AO в точке M. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если $AM:MO=2:3$ и $BC=7$.

Ответ: $\frac{7}{3\sqrt{3}}$.

Решение. Пусть R — радиус данной окружности, P и Q — её точки касания с прямыми BC и AB соответственно, AH — высота треугольника ABC, r — радиус вписанной в треугольник ABC окружности, p — полупериметр треугольника ABC. Тогда

$$p = AQ = OQ\operatorname{ctg}\angle OAQ = R\operatorname{ctg}30^\circ = R\sqrt{3}.$$

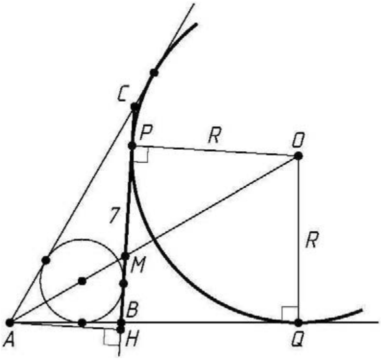
Из подобия прямоугольных треугольников AHM и OPM следует, что $\frac{AH}{OP}=\frac{AM}{MO}=\frac{2}{3}$, поэтому $AH=\frac{2}{3}PO=\frac{2}{3}R$. Тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC\cdot AH = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot\frac{2}{3}R = \frac{7}{3}R.$$

С другой стороны,

$$S_{\triangle ABC} = pr = R\sqrt{3}\cdot r = Rr\sqrt{3}.$$

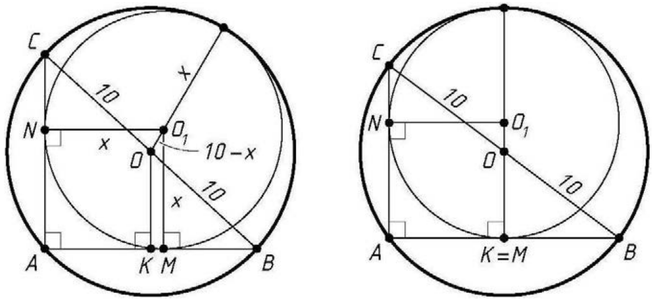
Из равенства $\frac{7}{3}R=Rr\sqrt{3}$ находим, что $r=\frac{7}{3\sqrt{3}}$.



8.28. Через точку A окружности радиуса 10 проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и AC. Вычислите радиус окружности, касающейся данной окружности и построенных хорд, если $AB=16$.

Ответ: 8.

Решение. Пусть O_1 — центр искомой окружности, x — её радиус, M и N — точки касания с хордами AB и AC, O — центр данной окружности, K — середина AB (см. рисунок слева).



Из прямоугольного треугольника ABC находим, что $AC = 12$. Обозначим $AM = AN = x$. Тогда стороны прямоугольной трапеции OO_1MK таковы:

$$MO_1 = AN = x, \quad OK = \frac{1}{2}AC = 6,$$
$$MK = |AM - AK| = |x - 8|, \quad OO_1 = 10 - x.$$

По теореме Пифагора

$$(6-x)^2 + (8-x)^2 = (10-x)^2.$$

Отсюда находим, что $x = 8$.

Истинная конфигурация показана на рисунке справа.

Задачи на доказательство и вычисление

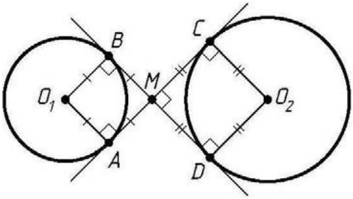
8.29.1. Общие внутренние касательные к двум окружностям перпендикулярны. Одна из них касается окружностей в точках A и C, вторая — в точках B и D (точки A и B лежат на одной окружности).

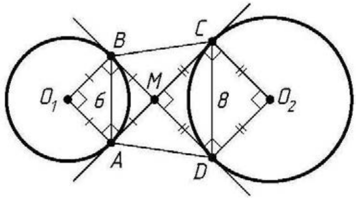
а) Докажите, что отрезок AC равен сумме радиусов окружностей.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если $AB = 6$, $CD = 8$.

Ответ: 49.

Решение. а) Пусть перпендикулярные прямые AC и BD пересекаются в точке M и касаются окружности с центром O_1 в точках A и B, а окружности с центром O_2 — в точках C и D. Четырёхугольники $AMBO_1$ и $CMDO_2$ — квадраты, поэтому $AM = O_1B$ и $CM = O_2D$. Следовательно, $AC = AM + CM = O_1B + O_2D$.





б) Из прямоугольных равнобедренных треугольников AMB и CMD находим, что

$$AM = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}, \quad CM = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}},$$

значит,

$$BD = AC = AM + CM = \frac{8}{\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}.$$

Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 49.$$

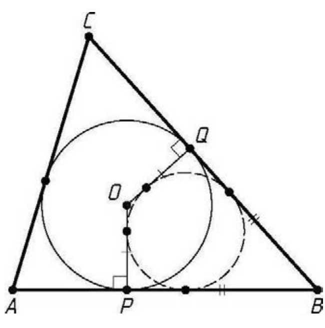
8.30.1. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и BC в точках P и Q соответственно.

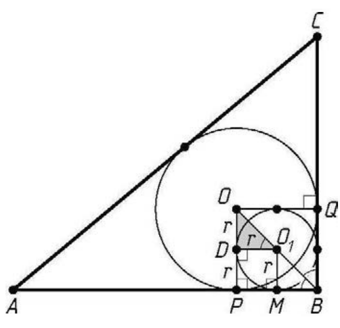
а) Докажите, что в четырёхугольник $BPOQ$ можно вписать окружность.

б) Найдите угол ABC, если радиус этой окружности вдвое меньше радиуса вписанной окружности треугольника ABC.

Ответ: 90°.

Решение. а) Отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны, поэтому $BP = BQ$, а так как $OP = OQ$ (как радиусы одной окружности), то $BP + OQ = BQ + OP$. Суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника $BPOQ$ равны, следовательно, в него можно вписать окружность.





б) Пусть O_1 — центр этой окружности, r — её радиус, M — точка касания со стороной AB, D — точка касания с отрезком OP. Четырёхугольник $DPMO_1$ — квадрат, поэтому $DP = O_1M = r$. Значит, $OD = OP - DP = 2r - r = r$. Из прямоугольного равнобедренного треугольника OO_1D находим, что $\angle OO_1D = 45^\circ$, а так как $AB \parallel O_1D$ и BO — биссектриса угла ABC, то

$$\angle ABC = 2\angle ABO = 2\angle OO_1D = 90^\circ.$$

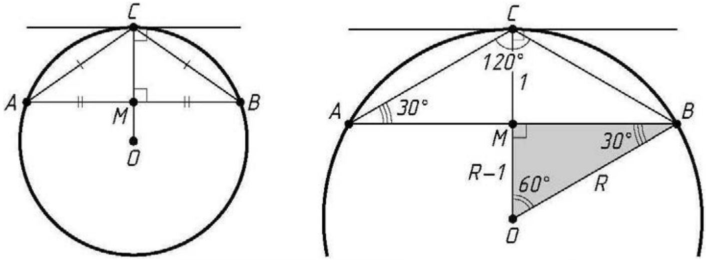
8.31.1. Хорда AB окружности параллельна касательной, проходящей через точку C, лежащую на окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, если расстояние между касательной и прямой AB равно 1 и $\angle ACB = 150^\circ$.

Ответ: $2(2+\sqrt{3})$.

Решение. а) Пусть O — центр окружности. Радиус OC перпендикулярен данной касательной, поэтому он перпендикулярен и параллельной ей хорде AB, а значит, делит её пополам. Пусть M — середина хорды AB. Тогда CM — высота и медиана треугольника ABC. Следовательно, этот треугольник равнобедренный.



б) Из равнобедренного треугольника ABC находим, что $\angle BAC = 15^\circ$. Вписанный угол BAC равен половине соответствующего центрального угла BOC, значит, $\angle BOC = 30^\circ$.

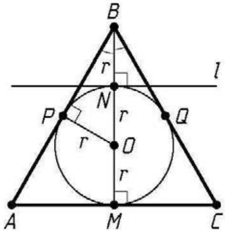
Пусть радиус окружности равен R. Тогда $OB = OC = R$, $CM = 1$, $OM = OC - CM = R - 1$. В прямоугольном треугольнике OMB известно, что $OM = OB\cos 30^\circ$, или $R - 1 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Отсюда находим, что $R = 2(2+\sqrt{3})$.

8.32.1. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность. Прямая l касается этой окружности и параллельна прямой AC. Расстояние от точки B до прямой l равно радиусу окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

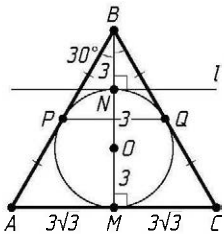
б) Найдите расстояние между точками, в которых данная окружность касается сторон AB и BC, если радиус окружности равен 3.

Ответ: $3\sqrt{3}$.



Решение. а) Пусть окружность радиуса r, вписанная в треугольник ABC, касается основания AC в точке M, а боковых сторон AB и BC — в точках P и Q соответственно. Тогда M — середина AC, BM — высота и биссектриса треугольника ABC, а центр O вписанной окружности и точка N касания прямой l и окружности лежат на отрезке BM, причём $BN = r$ и $MN = 2r$.

В прямоугольном треугольнике BOP катет $OP = r$ равен половине гипотенузы $OB = 2r$, значит, $\angle ABM = \angle PBO = 30^\circ$, а $\angle ABC = 2\angle ABM = 60^\circ$. Следовательно, равнобедренный треугольник ABC — равносторонний.



б) Из прямоугольного треугольника AMB находим, что

$$AM = BM \operatorname{tg} \angle ABM = 3r \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}.$$

Поскольку треугольник ABC равносторонний, точки P и Q — середины его сторон AB и BC, значит, PQ — средняя линия треугольника ABC. Следовательно, $PQ = \frac{1}{2}AC = AM = 3\sqrt{3}$.

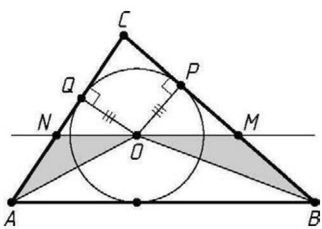
8.33.1. Через центр O окружности, вписанной в треугольник ABC, провели прямую MN параллельно стороне AB (M лежит на BC, N лежит на AC).

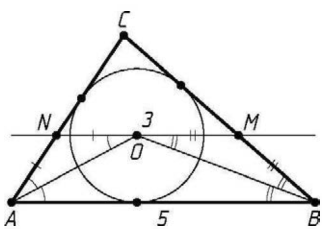
а) Докажите, что площади треугольников AON и BOM пропорциональны отрезкам AN и BM.

б) Найдите периметр четырёхугольника $ABMN$, если $AB = 5$, $MN = 3$.

Ответ: 11.

Решение. а) Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон AC и BC в точках Q и P соответственно. Тогда радиусы





OQ и OP — высоты треугольников AON и BOM, а так как $OQ = OP$, то отношение площадей этих треугольников равно отношению их сторон AN и BM.

б) Центр окружности, вписанной в треугольник, — точка пересечения биссектрис треугольника, поэтому AO — биссектриса угла BAC. Прямые ON и AB параллельны, значит, $\angle AON = \angle BAO = \angle NAO$. Поэтому треугольник AON равнобедренный, $AN = ON$. Аналогично $BM = OM$. Следовательно, периметр четырёхугольника $ABMN$ равен

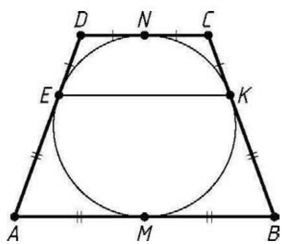
$$AN + MN + MB + AB = (AN + MB) + NM + AB = \\ = MN + MN + AB = 2MN + AB = 6 + 5 = 11.$$

8.34.1. Около окружности описана равнобедренная трапеция $ABCD$; E и K — точки касания этой окружности с боковыми сторонами AD и BC соответственно.

а) Докажите, что $EK \parallel AB$.

б) Найдите площадь трапеции $ABKE$, если радиус окружности равен R, а $\angle BAD = 60°$.

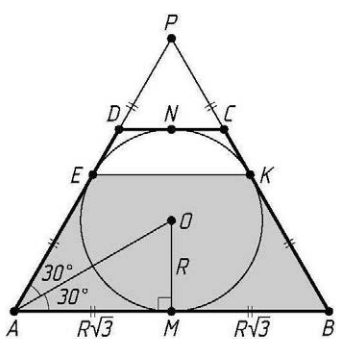
Ответ: $\frac{9R^2\sqrt{3}}{4}$.



Решение. а) Пусть M и N — точки касания окружности с основаниями AB и CD соответственно. Поскольку трапеция равнобедренная, точки M и N — середины оснований. Отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны, поэтому

$$DE = DN = NC = CK, \quad AE = AM = MB = BK,$$

Значит, $\frac{DE}{AE} = \frac{CK}{BK}$, причём $AB \parallel CD$. Следовательно, $EK \parallel AB$.



б) Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке P. Тогда треугольник ABP равносторонний, а окружность радиуса R, вписанная в трапецию $ABCD$, — вписанная окружность треугольника ABC. Значит, точки E и K — середины сторон AP и BP этого треугольника. Тогда EK — его средняя линия, поэтому $S_{\triangle PEK} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABP}$.

Пусть O — центр окружности. Тогда AO — биссектриса угла BAP, равного 60°. Из прямоугольного треугольника AOM находим, что $AM = OM \operatorname{ctg} \angle OAM = R \operatorname{ctg} 30^\circ = R\sqrt{3}$, поэтому

$$AP = BP = AB = 2R\sqrt{3}, \quad S_{\Delta APB} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{12R^2\sqrt{3}}{4} = 3R^2\sqrt{3}.$$

Следовательно,

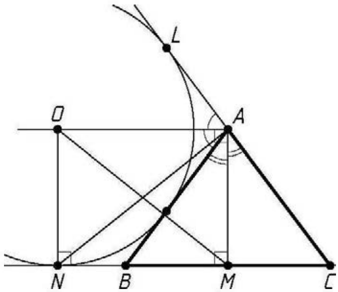
$$S_{ABKE} = \frac{3}{4} S_{\Delta APB} = \frac{3}{4} \cdot 3R^2\sqrt{3} = \frac{9R^2\sqrt{3}}{4}.$$

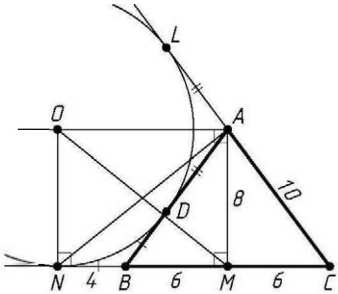
8.35.1. Окружность с центром O касается боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC, продолжения боковой стороны AC и продолжения основания BC в точке N. Точка M — середина основания BC.

а) Докажите, что $AN = OM$.

б) Найдите OM, если стороны треугольника ABC равны 10, 10 и 12.

Ответ: $2\sqrt{41}$.





Решение. а) Пусть L — точка касания данной окружности с прямой AC. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO — биссектриса угла BAL. Медиана AM равнобедренного треугольника ABC является его высотой и биссектрисой. Значит, $\angle OAM = 90^\circ$ как угол между биссектрисами смежных углов. Кроме того, $\angle AMN = 90^\circ$ и $\angle MNO = 90^\circ$ (радиус окружности, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной), поэтому $AMNO$ — прямоугольник. Диагонали прямоугольника равны, следовательно, $AN = OM$.

б) По теореме Пифагора из треугольника AMB находим, что $AM = 8$. Пусть D — точка касания данной окружности с боковой стороной AB треугольника ABC. Тогда $BD = BN$ и $AD = AL$, значит,

$$CN + CL = (CB + BN) + (CA + AL) = (CB + BD) + (CA + AD) = \\ = CB + CA + (BD + AD) = CB + CA + AB = 10 + 12 + 10 = 32,$$

а так как $CN = CL$, то $CN = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16$. Тогда $MN = CN - CM = 16 - 6 = 10$.

Из прямоугольного треугольника AMN находим, что

$$AN = \sqrt{AM^2+MN^2} = \sqrt{64+100} = 2\sqrt{41}.$$

Следовательно, $OM = AN = 2\sqrt{41}$.

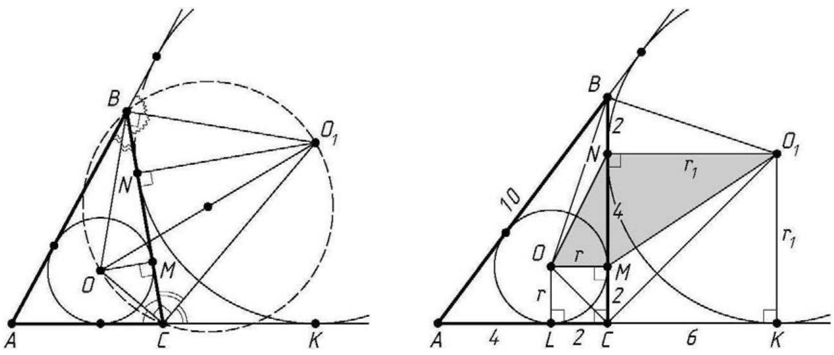
8.36.1. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке M. Окружность с центром O_1 касается стороны BC в точке N, а также касается продолжений сторон AC и AB.

а) Докажите, что около четырёхугольника $BOCO_1$ можно описать окружность.

б) Найдите площади четырёхугольников $BOCO_1$ и $NOMO_1$, если $AC=6$, $BC=8$, $AB=10$.

Ответ: 32 и 16.

Решение. а) Пусть окружность с центром O_1 касается продолжения стороны AC в точке K. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому CO и CO_1 — биссектрисы углов ACB и KCB. Значит, $\angle OCO_1 = 90^\circ$ как угол между биссектрисами смежных углов. Аналогично $\angle OBO_1 = 90^\circ$. Из точек C и B отрезок OO_1 виден под прямым углом, следовательно, эти точки лежат на окружности с диаметром OO_1.



б) Треугольник ABC прямоугольный, так как $AB^2=100=36+64= =AC^2+BC^2$. Пусть r и r_1 — радиусы рассматриваемых окружностей с центрами O и O_1 соответственно, а окружность с центром O касается катета AC в точке L. Тогда $OMCL$ и O_1KCN — квадраты со сторонами r и r_1 соответственно. Значит,

$$r = OM = CL = p - AB = 12 - 10 = 2,$$
$$r_1 = AK - AC = p - 6 = 6,$$

где $p = \dfrac{AB+BC+AC}{2} = \dfrac{10+8+6}{2} = 12$ — полупериметр треугольника ABC. Следовательно,

$$S_{BOCO_1} = S_{\Delta BOC} + S_{\Delta BO_1C} = \frac{1}{2}BC\cdot OM + \frac{1}{2}BC\cdot O_1N = \\ = \frac{1}{2}BC(OM+O_1N) = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8 = 32.$$

Поскольку

$$BN = p - AB = 12-10 = 2, \quad MN = 8-2-2 = 4,$$

аналогично находим, что

$$S_{NOMO_1} = \frac{1}{2}MN(r+r_1) = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8 = 16.$$

8.37.1. Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M. Продолжение стороны AD последовательно пересекает окружность в точках P и Q, прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM.

а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.

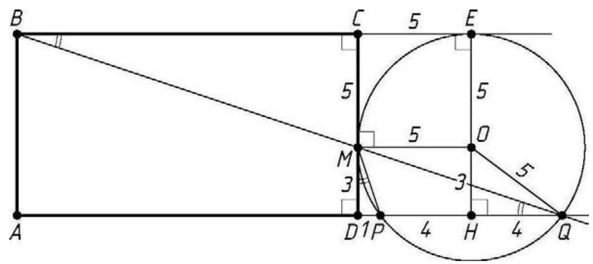
б) Известно, что $CM = 5$ и $CD = 8$. Найдите сторону AD.

Ответ: 15.

Решение. а) Поскольку DMP — угол между касательной MD и хордой MP, а MQP — угол, вписанный в окружность, то

$$\angle DMP = \angle MQP = \angle MQD$$

(каждый из этих углов равен половине меньшей дуги MP), а так как $\angle MQD = \angle CBM$ (по свойству параллельных прямых), то $\angle DMP = \angle CBM$.



б) Пусть окружность с центром O касается прямой BC в точке E, а H — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на PQ. Тогда H — середина хорды PQ. Из прямоугольного треугольника OHQ находим, что

$$HQ = \sqrt{OQ^2 - OH^2} = \sqrt{OQ^2 - DM^2} = \sqrt{5^2-(8-5)^2} = \sqrt{25-9} = 4.$$

Поскольку $OE \perp PQ$, точки O, E и H лежат на одной прямой и $CDHE$ — прямоугольник, а так как $CE = CM = 5$, то

$$DQ = DH + HQ = CE + HQ = CM + HQ = 5+4 = 9.$$

Треугольник BCM подобен треугольнику QDM с коэффициентом $\frac{CM}{DM} = \frac{5}{3}$, следовательно,

$$AD = BC = \frac{5}{3}DQ = \frac{5}{3}\cdot 9 = 15.$$

8.38.1. Точки M и N — середины сторон соответственно AB и AC треугольника ABC. Прямая, проходящая через вершину A, пересекает отрезки MN и BC в точках K и L соответственно, причём в четырёхугольник $BMKL$ можно вписать окружность.

а) Докажите, что периметр треугольника AMK вдвое больше отрезка BL.

б) Найдите AL, если $AB = 12$, $BC = 16$, $AC = 20$.

Ответ: 15.

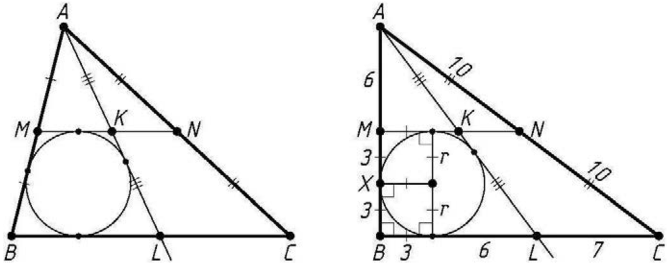
Решение. а) Пусть периметр треугольника AMK равен P. Отрезок MK — средняя линия треугольника ABL, поэтому $MK = \frac{1}{2}BL$. В четырёхугольник $BMKL$ можно вписать окружность, значит,

$$BM + KL = BL + MK = BL + \frac{1}{2}BL = \frac{3}{2}BL,$$

или

$$P - \frac{1}{2}BL = P - MK = AM + AK = BM + KL = \frac{3}{2}BL.$$

Следовательно, $P = 2BL$.



б) Треугольник ABC прямоугольный с прямым углом при вершине B. Пусть r — радиус вписанной окружности четырёхугольника $BMKL$ (прямоугольной трапеции с основаниями BL и MK). Тогда $r = \frac{1}{4}AB = 3$.

Пусть эта окружность касается стороны BM в точке X. Тогда

$$MX = r = 3, \quad AX = AM + MX = 6 + 3 = 9,$$

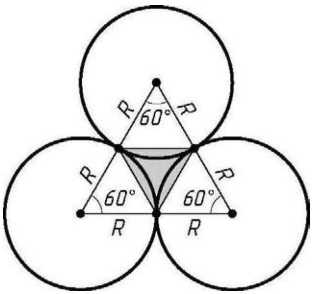
а так как отрезок AX равен полупериметру треугольника AMK (см. п. 9в приложения 2), то по доказанному $BL = AX = 9$. Следовательно,

$$AL = \sqrt{AB^2 + BL^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15.$$

§ 9. Касающиеся окружности

Подготовительные задачи

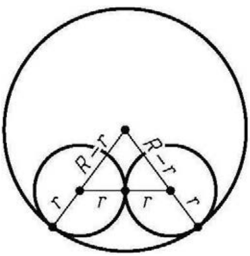
9.1. Три равные окружности радиуса R касаются друг друга внешним образом. Найдите стороны и углы треугольника, вершинами которого служат точки касания.



Ответ: R, $60°$, $60°$, $60°$.

Решение. Рассмотрим треугольник с вершинами в центрах окружностей. Поскольку линия центров касающихся окружностей проходит через точку касания, его стороны равны $2R$. Стороны искомого треугольника являются его средними линиями, поэтому равны R.

9.2. Две равные окружности касаются изнутри третьей и касаются между собой. Соединив три центра, получим треугольник с периметром, равным 18. Найдите радиус большей окружности.



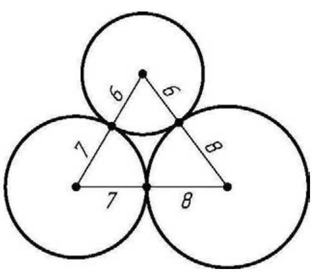
Ответ: 9.

Решение. Пусть радиусы данных окружностей равны r, r и R $(r < R)$. Линия центров касающихся окружностей проходит через точку касания, значит, стороны указанного треугольника равны $R-r$, $R-r$ и $2r$. Поэтому

$$R-r+R-r+2r = 2R = 18.$$

Следовательно, $R=9$.

9.3. Три окружности радиусов 6, 7 и 8 попарно касаются друг друга внешним образом. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах этих окружностей.



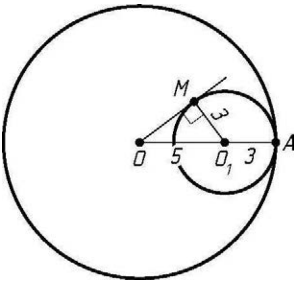
Ответ: 84.

Решение. Линия центров двух касающихся окружностей проходит через их точку касания, поэтому стороны треугольника с вершинами в центрах окружностей равны 13, 14 и 15. Пусть S — площадь треугольника, p — полупериметр. Тогда $p = \frac{1}{2}(13+14+15) = 21$. По формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p-13)(p-14)(p-15)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} =$$
$$= \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = 7\cdot 3\cdot 4 = 84.$$

9.4. Окружности радиусов 8 и 3 касаются внутренним образом. Из центра большей окружности проведена касательная к меньшей окружности. Найдите расстояние от точки касания до центра большей окружности.

Ответ: 4.



Решение. Пусть O и O_1 — центры окружностей радиусов 8 и 3 соответственно, A — точка касания окружностей, OM — искомая касательная. Тогда

$$OO_1 = OA - O_1A = 8 - 3 = 5.$$

Следовательно,

$$OM^2 = OO_1^2 - O_1M^2 = 25 - 9 = 16, \quad OM = 4.$$

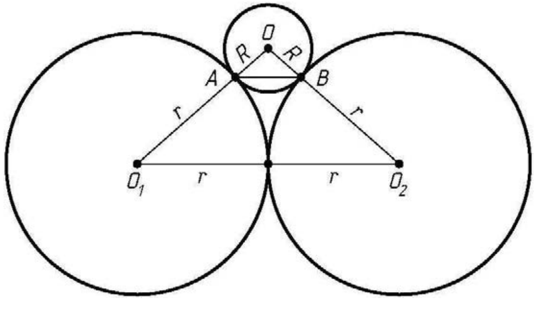
9.5. Две окружности радиуса r касаются друг друга. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности радиуса R в точках A и B соответственно. Найдите радиус r, если $AB = 12$, $R = 8$.

Ответ: 24.

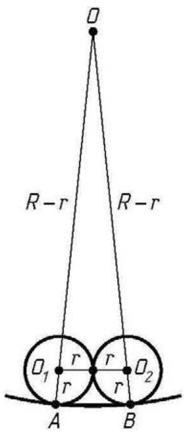
Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиуса r, O — центр окружности радиуса R. Тогда треугольники OAB и OO_1O_2 подобны. Поэтому

$$\frac{OA}{OO_1} = \frac{AB}{O_1O_2}, \quad \text{или} \quad \frac{8}{8+r} = \frac{12}{2r}.$$

Отсюда находим, что $r = 24$.



9.6. Две окружности радиуса r касаются друг друга. Кроме того, каждая из них касается изнутри третьей окружности радиуса R в точках A и B соответственно. Найдите радиус R, если $AB = 11$, $r = 5$.



Ответ: 55.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиуса r, O — центр окружности радиуса R. Тогда треугольники OAB и OO_1O_2 подобны. Поэтому

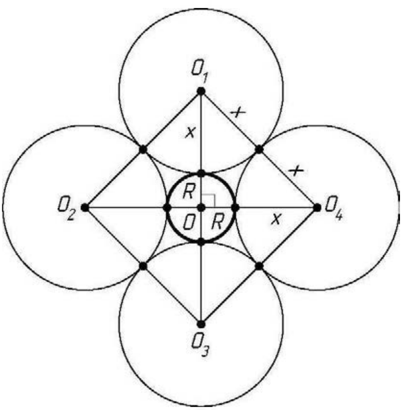
$$\frac{OA}{OO_1} = \frac{AB}{O_1O_2}, \quad \text{или} \quad \frac{R}{R-5} = \frac{11}{10}.$$

Отсюда находим,что $R = 55$.

9.7. Дана окружность радиуса R. Четыре окружности равных радиусов касаются данной внешним образом, и каждая из этих четырёх окружностей касается двух других. Найдите радиусы этих четырёх окружностей.

Ответ: $R(\sqrt{2}+1)$.

Решение. Пусть R — радиус данной окружности, x — радиус остальных окружностей. Обозначим их центры соответственно O, O_1, O_2, O_3, O_4.

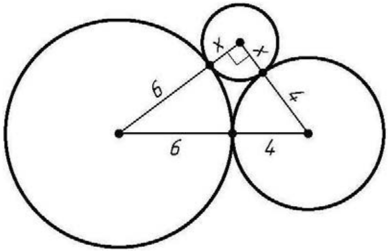


Четырёхугольник $O_1O_2O_3O_4$ — ромб со стороной $2x$. Поскольку его вершины расположены на одинаковом расстоянии от точки O, это квадрат. Поэтому $2x = (R + x)\sqrt{2}$. Отсюда находим, что $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}-1} = R(\sqrt{2}+1)$.

9.8. Три окружности разных радиусов попарно касаются друг друга внешним образом. Отрезки, соединяющие их центры, образуют прямоугольный треугольник. Найдите радиус меньшей окружности, если радиусы большей и средней равны 6 и 4.

Ответ: 2.

Решение. Пусть x — радиус меньшей окружности. Стороны получившегося треугольника равны 10, $6+x$ и $4+x$.



Поскольку 10 — наибольшая сторона, это гипотенуза. По теореме Пифагора

$$(x+6)^2+(x+4)^2=100.$$

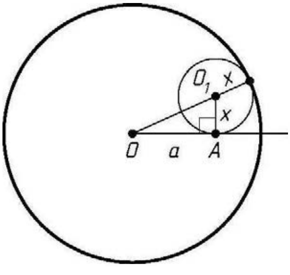
Отсюда находим, что $x=2$.

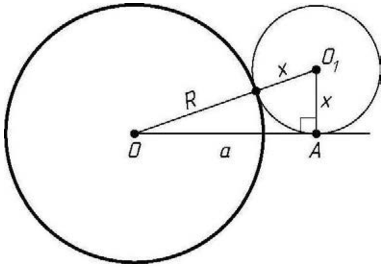
9.9. На прямой, проходящей через центр O окружности радиуса R, взята точка A на расстоянии a от центра. Найдите радиус второй окружности, которая касается прямой OA в точке A, а также касается данной окружности.

Ответ: $\frac{|R^2-a^2|}{2R}$.

Решение. Пусть O и O_1 — центры данных окружностей, x — искомый радиус. Предположим, что $a<R$. Тогда окружности касаются внутренним образом (см. рисунок слева). В прямоугольном треугольнике OO_1A известно, что

$$OA=a, \quad OO_1=R-x, \quad O_1A=x.$$





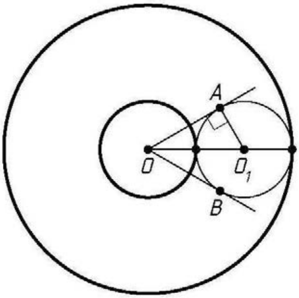
По теореме Пифагора

$$OO_1^2 = OA^2 + AO_1^2, \quad \text{или} \quad (R-x)^2 = x^2 + a^2.$$

Отсюда находим, что $x = \dfrac{R^2 - a^2}{2R}$.

Если же $a > R$, то окружности касаются внешним образом (см. рисунок справа). В этом случае $OO_1 = R + x$. Из уравнения $(R+x)^2 = x^2 + a^2$ находим, что $x = \dfrac{a^2 - R^2}{2R}$.

9.10. Даны окружности радиусов 1 и 3 с общим центром O. Третья окружность касается их обеих. Найдите угол между касательными к третьей окружности, проведёнными из точки O.



Ответ: 60°.

Решение. Пусть O_1 — центр третьей окружности, OA и OB — касательные к ней (A и B — точки касания). Тогда OO_1 — биссектриса угла AOB,

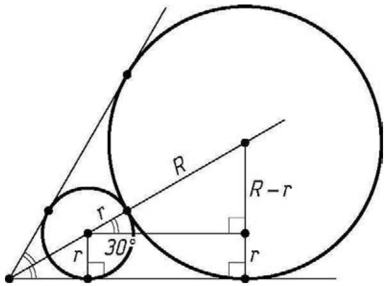
$$AO_1 = \frac{3-1}{2} = 1, \quad OO_1 = 1 + 1 = 2,$$
$$\angle OAO_1 = 90^\circ.$$

Поэтому $\angle AOO_1 = 30^\circ$, а $\angle AOB = 60^\circ$.

9.11. В угол, равный 60°, вписаны две окружности, касающиеся друг друга внешним образом. Радиус меньшей окружности равен r. Найдите радиус большей окружности.

Ответ: $3r$.

Решение. Пусть R — радиус большей окружности. Опустим перпендикуляр из центра меньшей окружности на радиус большей окружности, проведённый в точку касания с одной из сторон данного угла. Получим прямоугольный треугольник с гипотенузой $R + r$, кате-

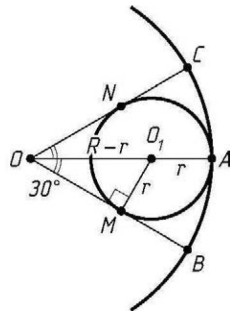


том $R-r$ и острым углом в 30°, противолежащим этому катету. Тогда $R+r=2(R-r)$. Отсюда находим, что $R=3r$.

9.12. Две окружности касаются друг друга внутренним образом. Известно, что два радиуса большей окружности, угол между которыми равен 60°, касаются меньшей окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.

Ответ: $1:3$.

Решение. Пусть окружности с центрами O и O_1 и радиусами R и r $(R>r)$ соответственно касаются внутренним образом в точке A, а радиусы OB и OC большей окружности касаются меньшей соответственно в точках M и N, причём $\angle BOC=60^\circ$.



Поскольку центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, $\angle AOB = 30^\circ$, а так как линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку их касания, то

$$OO_1 = OA - O_1A = R - r.$$

Из прямоугольного треугольника OO_1M находим, что

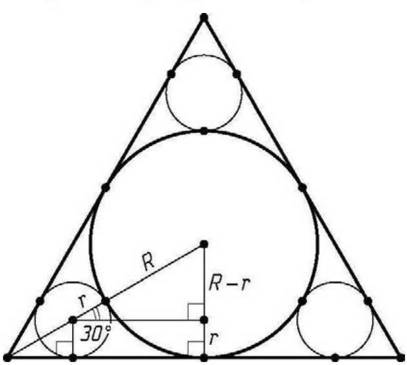
$$OO_1 = 2O_1M, \quad \text{или} \quad R-r=2r,$$

откуда $\frac{r}{R}=\frac{1}{3}$.

9.13. В равносторонний треугольник вписана окружность. Этой окружности и сторон треугольника касаются три малые окружности. Найдите сторону треугольника, если радиус малой окружности равен r.

Ответ: $6r\sqrt{3}$.

Решение. Пусть R — радиус окружности, вписанной в данный треугольник. Опустим перпендикуляр из центра меньшей окружности на



радиус большей окружности, проведённый в точку касания со стороной рассматриваемого угла. Получим прямоугольный треугольник с гипотенузой $R+r$, катетом $R-r$ и углом в 30°, противолежащим этому катету. Поэтому $R+r=2(R-r)$. Отсюда находим, что $R=3r$.

Пусть сторона треугольника равна a. Тогда $a=2R\sqrt{3}=6r\sqrt{3}$.

9.14. В круговой сектор с центральным углом 120° вписана окружность. Найдите её радиус, если радиус данной окружности равен R.

Ответ: $R\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$.

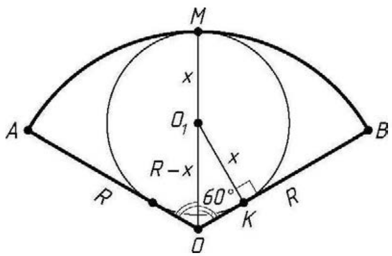
Решение. Пусть x — радиус искомой окружности, O_1 — её центр, OA и OB — радиусы данного сектора, M — точка касания окружностей, K — точка касания искомой окружности с радиусом OB. Тогда

$$OO_1 = R-x, \quad KO_1 = x, \quad \angle KOO_1 = 60^\circ,$$

$$KO_1 = OO_1 \sin\angle KOO_1, \quad \text{или} \quad x = \frac{(R-x)\sqrt{3}}{2}.$$

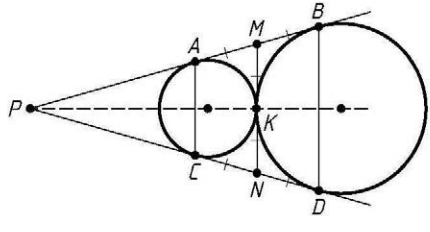
Отсюда находим, что

$$x = \frac{R\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = R\sqrt{3}(2-\sqrt{3}).$$



9.15. Две окружности касаются внешним образом в точке K. Одна прямая касается этих окружностей в различных точках A и B, а вторая — соответственно в различных точках C и D. Общая касательная к окружностям, проходящая через точку K, пересекается с этими прямыми в точках M и N. Найдите MN, если $AC=a$, $BD=b$.

Ответ: $\frac{a+b}{2}$.



Решение. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке P. Углы при основаниях равнобедренных треугольников PAC и PBD равны, поэтому $AC \parallel BD$. Значит, $ABDC$ — равнобедренная трапеция. Поскольку $MA = MK = MB$, то M — середина боковой стороны AB. Аналогично получаем, что N — середина боковой стороны CD, значит, MN — средняя линии трапеции $ABDC$. Следовательно,

$$MN = \frac{1}{2}(AC + BD) = \frac{a+b}{2}.$$

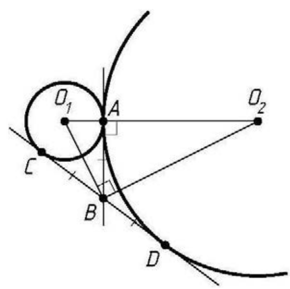
Если $AB \parallel CD$, то $ABDC$ — прямоугольник. В этом случае $MN = AC = BD$.

Тренировочные задачи

9.16. Окружность радиуса 2 касается внешним образом другой окружности в точке A. Общая касательная к обеим окружностям, проведённая через точку A, пересекается с другой их общей касательной в точке B. Найдите радиус второй окружности, если $AB = 4$.

Ответ: 8.

Решение. Первый способ. Пусть r и R — радиусы окружностей ($r = 2$), C и D — точки касания окружностей со второй (внешней) касательной. Тогда $BC = AB = BD = 4$, $CD = 8$, а так как $CD = 2\sqrt{rR}$ (см. [2], с. 88, пример 2), то $\sqrt{2R} = 4$. Отсюда находим, что $R = 8$.

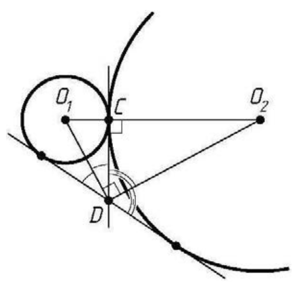


Второй способ. Если O_1 и O_2 — центры окружностей, то $\angle O_1BO_2 = 90°$ как угол между биссектрисами смежных углов. Тогда BA — высота прямоугольного треугольника O_1BO_2, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу O_1O_2. Следовательно,

$$O_1A \cdot O_2A = AB^2 = 16.$$

Отсюда находим, что $O_2A = 8$.

9.17. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке C. Радиусы окружностей равны 2 и 7. Общая касательная к обеим окружностям, проведённая через точку C, пересекается с другой их общей касательной в точке D. Найдите расстояние от центра меньшей окружности до точки D.



Ответ: $3\sqrt{2}$.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры меньшей и большей окружностей. Угол O_1DO_2 — угол между биссектрисами смежных углов, поэтому $\angle O_1DO_2 = 90^\circ$.

Из прямоугольного треугольника O_1DO_2 находим, что

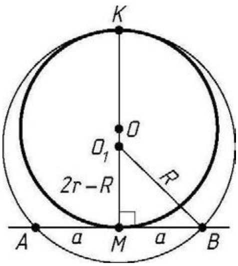
$$O_1D^2 = O_1C \cdot O_1O_2 = 2 \cdot 9.$$

Следовательно, $O_1D = 3\sqrt{2}$.

9.18. Окружность радиуса r касается некоторой прямой в точке M. На этой прямой по разные стороны от M взяты точки A и B, причём $MA = MB = a$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся данной окружности.

Ответ: $\dfrac{a^2+4r^2}{4r}$.

Решение. Пусть R — радиус искомой окружности, O_1 — её центр, K — точка касания окружностей (касание внутреннее), O — центр данной окружности. Тогда $MO_1 = |KM - O_1K| = |2r - R|$.



Поскольку треугольник MBO_1 прямоугольный, то

$$BO_1^2 = MO_1^2 + MB^2, \quad \text{или} \quad R^2 = (2r-R)^2 + a^2.$$

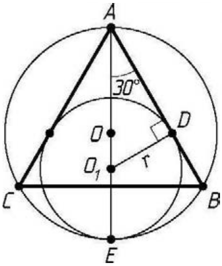
Отсюда находим, что

$$R = \frac{a^2+4r^2}{4r}.$$

9.19. Одна окружность описана около равностороннего треугольника ABC, а вторая вписана в угол A и касается первой окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.

Ответ: 3 : 2 или 1 : 2.

Решение. Пусть окружность радиуса R с центром O описана около равностороннего треугольника ABC, а окружность радиуса r с центром O_1 касается прямых AB и AC, причём прямой AB — в точке D, а также внутренним образом касается первой окружности в точке E. Тогда в прямоугольном треугольнике AO_1D катет O_1D лежит против угла DAO_1, равного 30°. Поэтому

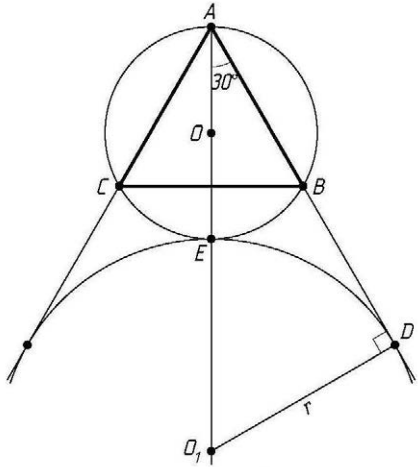


$$AO_1 = 2O_1D = 2r,$$

а так как центры обеих окружностей лежат на биссектрисе угла BAC, то

$$AO_1 = AE - O_1E = 2R - r.$$

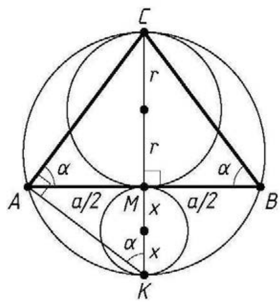
Из уравнения $2R - r = 2r$ находим, что $\frac{R}{r} = \frac{3}{2}$. В случае внешнего касания окружностей аналогично находим, что $\frac{R}{r} = \frac{1}{2}$.



9.20. В окружность вписан равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α. Кроме того, построена вторая окружность, касающаяся первой окружности и основания треугольника, причём точка касания является серединой основания. Найдите радиус второй окружности.

Ответ: $\frac{a}{4}\operatorname{tg}\alpha$, $\frac{a}{4}\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. Пусть CK — диаметр окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$, $AB = a$, $\angle A = \angle B = \alpha$). Тогда середина M основания AB принадлежит этому диаметру, а CM и MK — диаметры искомых окружностей.



Пусть r и x — радиусы искомых окружностей. Тогда

$$r = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{2}AM \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{4}\operatorname{tg}\alpha,$$

$$x = \frac{1}{2}MK = \frac{1}{2}AM \cdot \operatorname{ctg}\angle AKM = \frac{a}{4}\operatorname{ctg}\alpha.$$

9.21. Две окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами 32, пересекаясь, делят отрезок O_1O_2 на три равные части. Найдите радиус окружности, которая касается изнутри обеих окружностей и касается отрезка O_1O_2.

Ответ: 7.

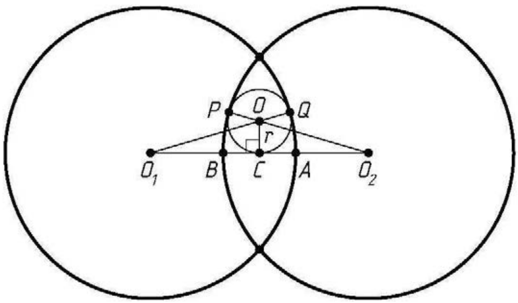
Решение. Обозначим через r радиус искомой окружности. Пусть O — её центр, Q и P — точки касания соответственно с первой и второй окружностями, C — точка касания с прямой O_1O_2, A и B — точки пересечения соответственно первой и второй окружностей с отрезком O_1O_2. Тогда

$$O_1B = AB = AO_2 = 16, \quad O_1C = 24,$$
$$OC = r, \quad O_1O = O_1Q - OQ = 32 - r.$$

По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника O_1CO находим, что

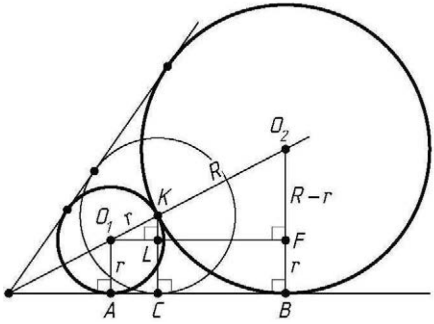
$$O_1O^2 = O_1C^2 + OC^2, \quad \text{или} \quad (32-r)^2 = 24^2 + r^2.$$

Из этого уравнения находим, что $r = 7$.



9.22. Две окружности радиусов R и r касаются сторон данного угла и друг друга. Найдите радиус третьей окружности, касающейся сторон того же угла, центр которой находится в точке касания окружностей между собой.

Ответ: $\frac{2rR}{r+R}$.



Решение. Пусть окружности радиусов r и R касаются одной из сторон угла в точках A и B соответственно, а искомая окружность с центром K касается этой стороны в точке C. Опустим перпендикуляр O_1F из центра первой окружности на радиус O_2B второй окружности. Пусть L — точка пересечения KC с отрезком O_1F. Тогда прямоугольные треугольники O_1LK и O_1FO_2 подобны с коэффициентом $\frac{O_1K}{O_1O_2} = \frac{r}{r+R}$, следовательно,

$$KL = O_2F \cdot \frac{r}{r+R} = (R-r) \cdot \frac{r}{r+R} = \frac{r(R-r)}{r+R},$$

$$KC = KL + LC = KL + O_1A = \frac{r(R-r)}{r+R} + r = \frac{2rR}{r+R}.$$

9.23. В треугольнике ABC сторона BC равна a, радиус вписанной окружности равен r. Найдите радиусы двух равных окружностей, касающихся друг друга, если одна из них касается сторон BC и BA, а другая — сторон BC и CA.

Ответ: $\frac{ar}{a+2r}$.

Решение. Первый способ. Если x — искомый радиус, то

$$x \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\angle B\right) + x \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\angle C\right) + 2x = a,$$

а так как

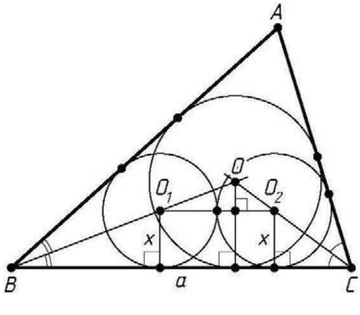
$$r \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\angle B\right) + r \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\angle C\right) = a,$$

то

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\angle B\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\angle C\right) = \frac{a}{r}, \quad \frac{ax}{r} + 2x = a.$$

Следовательно, $x = \frac{ar}{a+2r}$.

Второй способ. Обозначим через x искомый радиус. Пусть O_1 и O_2 — центры указанных равных окружностей. Тогда лучи BO_1 и CO_2 пересекаются в центре O вписанной окружности треугольника ABC.



Отношение высот подобных треугольников OO_1O_2 и OBC, проведённых из общей вершины O, равно отношению соответствующих сторон, т. е.

$$\frac{r-x}{r} = \frac{2x}{a}.$$

Следовательно, $x = \dfrac{ar}{a+2r}$.

9.24. Две окружности радиусов 5 и 3 касаются внутренним образом. Хорда большей окружности касается меньшей окружности и делится точкой касания в отношении $3:1$. Найдите длину этой хорды.

Ответ: 8.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиусов 5 и 3 соответственно, AB — данная хорда, C — её точка касания с меньшей окружностью ($AC : BC = 1:3$), P — проекция точки O_1 на радиус O_2C меньшей окружности (см. рисунок слева).

Обозначим $AC = x$, тогда $BC = 3x$. Опустим из центра O_1 перпендикуляр KO_1 на хорду AB. Тогда

$$AK = KB = 2x, \quad CK = AK - AC = x, \quad O_1P = CK = x,$$

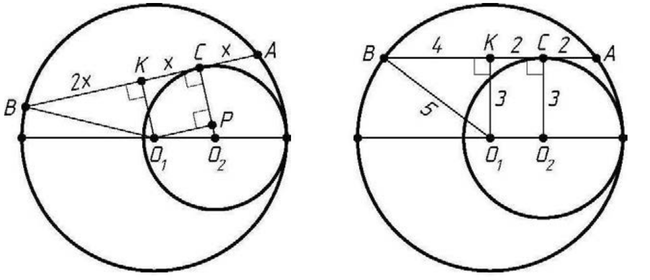
$$O_1O_2 = 5-3 = 2, \quad O_2C = 3, \quad O_1K^2 = O_1B^2 - KB^2 = 25 - 4x^2.$$

В прямоугольном треугольнике O_1PO_2 известно, что

$$O_1O_2^2 = O_2P^2 + O_1P^2, \quad \text{или} \quad 4 = (3 - \sqrt{25-4x^2})^2 + x^2.$$

Из этого уравнения находим, что $x = 2$. Следовательно, $AB = 4x = 8$.

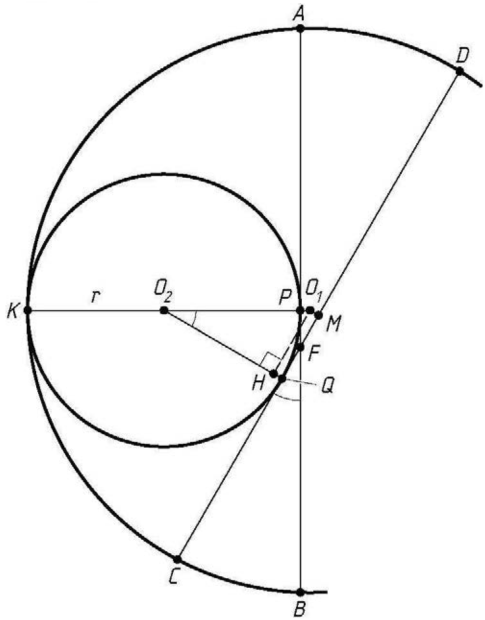
(Заметим, что в этом случае $O_2P = 0$. Это означает, что $AB \parallel O_1O_2$, см. рисунок справа.)



9.25. Две окружности, радиусы которых относятся как $9 - 4\sqrt{3}$ к 1, касаются друг друга внутренним образом. В большей окружности проведены две равные хорды, касающиеся меньшей окружности. Одна из этих хорд перпендикулярна отрезку, соединяющему центры окружностей, а другая нет. Найдите угол между этими хордами.

Ответ: 30°.

Решение. Пусть окружности радиусов $R > r$ с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внутренним образом в точке K, хорда AB большей окружности перпендикулярна O_1O_2 и касается меньшей окружности в точке P, а равная ей хорда CD большей окружности касается меньшей окружности в точке Q и пересекается с хордой AB в точке F. Опустим перпендикуляр O_1M на CD и рассмотрим прямоугольную трапецию O_1O_2QM.



Поскольку равные хорды окружности равноудалены от её центра, то

$$O_1M = O_1P = O_1K - PK = R - 2r.$$

Опустим перпендикуляр O_1H на O_2Q. Тогда

$$O_2H = O_2Q - HQ = O_2Q - O_1M = r - (R - 2r) = 3r - R,$$

значит,

$$\cos\angle O_1O_2H = \frac{O_2H}{O_1O_2} = \frac{3r-R}{R-r} = \frac{3-\frac{R}{r}}{\frac{R}{r}-1} = \frac{3-(9-4\sqrt{3})}{9-4\sqrt{3}-1} =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}-6}{8-4\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-3}{4-2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно,

$$\angle QFB = \angle O_1O_2H = 30^\circ.$$

Заметим, что

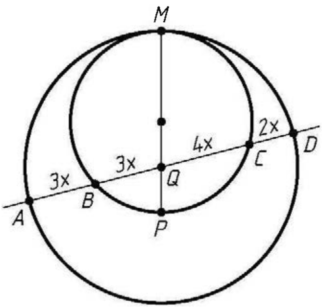
$$\sqrt{3} < 2 \quad\Leftrightarrow\quad 3 < 2\sqrt{3} \quad\Leftrightarrow\quad 6 < 4\sqrt{3} \quad\Leftrightarrow\quad 9 - 4\sqrt{3} < 3,$$

поэтому $\frac{R}{r} = 9 - 4\sqrt{3} < 3$. Это означает, что точка H действительно лежит на отрезке O_2Q.

9.26. Две окружности касаются внутренним образом. Прямая, проходящая через центр большей окружности, пересекает её в точках A и D, а меньшую окружность — в точках B и C. Найдите отношение радиусов окружностей, если $AB:BC:CD = 3:7:2$.

Ответ: $3:2$.

Решение. Пусть M — точка касания, r и R $(r < R)$ — радиусы окружностей, Q — центр большей из них. Положим $AB = 3x$, $BC = 7x$, $CD = 2x$. Тогда



$$R = \frac{AB + BC + CD}{2} = 6x,$$

$$BQ = AQ - AB = R - 3x = 3x,$$

$$QC = R - 2x = 4x, \quad MQ = R = 6x,$$

$$QP = 2r - MQ = 2r - 6x$$

(где MP — диаметр меньшей окружности).

По теореме о произведениях отрезков пересекающихся хорд

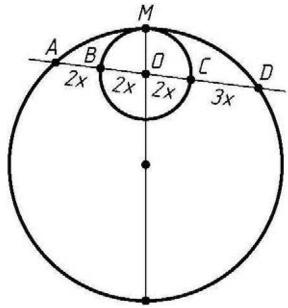
$$BQ \cdot QC = MQ \cdot QP, \quad \text{или} \quad 3x \cdot 4x = 6x \cdot (2r - 6x).$$

Из этого уравнения находим, что $r = 4x$. Следовательно,

$$\frac{R}{r} = \frac{6x}{4x} = \frac{3}{2}.$$

9.27. Две окружности касаются внутренним образом. Прямая, проходящая через центр меньшей окружности, пересекает бо́льшую окружность в точках A и D, а меньшую — в точках B и C. Найдите отношение радиусов окружностей, если $AB:BC:CD = 2:4:3$.

Ответ: 3.



Решение. Пусть M — точка касания окружностей, r и R $(r < R)$ — их радиусы, O — центр меньшей из них. Положим $AB = 2x$, $BC = 4x$, $CD = 3x$. Тогда

$$r = OB = OC = 2x, \quad DO \cdot OA = MO(2R - MO),$$

$$\text{или} \quad 5x \cdot 4x = 2x(2R - 2x).$$

Следовательно,

$$5x = R - x, \quad R = 6x, \quad \frac{R}{r} = \frac{6x}{2x} = 3.$$

9.28. Две окружности радиусов R и r $(R > r)$ касаются внешним образом в точке C. К ним проведена общая внешняя касательная AB, где A и B — точки касания. Найдите стороны треугольника ABC.

Ответ: $2\sqrt{Rr}$, $2r\sqrt{\frac{R}{R+r}}$, $2R\sqrt{\frac{r}{R+r}}$.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиусов r и R, A — точка на первой окружности, B — на второй, K — проекция точки O_1 на BO_2. Тогда

$$KO_2 = BO_2 - AO_1 = R - r, \quad O_1O_2 = r + R,$$

$$AB = KO_1 = \sqrt{O_1O_2^2 - KO_2^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

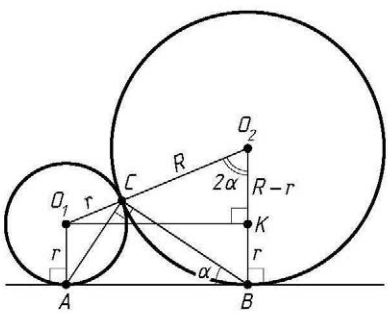
Обозначим $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle BO_2C = \alpha$. Тогда

$$\cos 2\alpha = \frac{KO_2}{O_1O_2} = \frac{R-r}{R+r}, \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{R-r}{R+r}}{2}} = \sqrt{\frac{R}{R+r}}.$$

Поскольку треугольник ACB прямоугольный $(\angle C = 90^\circ)$, то

$$BC = AB\cos\alpha = 2\sqrt{Rr}\sqrt{\frac{R}{R+r}} = 2R\sqrt{\frac{r}{R+r}}.$$

Аналогично находим AC.

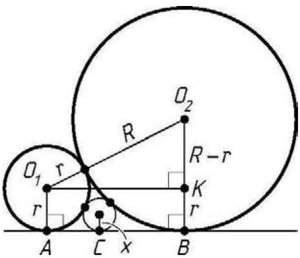


9.29. Две окружности радиусов R и r $(R > r)$ касаются внешним образом. Прямая касается этих окружностей в различных точках A и B. Найдите радиусы окружностей, касающихся обеих данных окружностей и прямой AB.

Ответ: $\frac{Rr}{(\sqrt{R}\pm\sqrt{r})^2}$.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры касающихся окружностей радиусов r и R, A и B — их точки касания с общей внешней касательной.

Опустим перпендикуляр O_1K на O_2B. Из прямоугольного треугольника O_1KO_2, в котором $O_1O_2 = R + r$, $O_2K = R - r$, находим, что $O_1K = 2\sqrt{Rr}$. Поэтому и $AB = 2\sqrt{Rr}$.



Если x — радиус искомой окружности, которая касается прямой AB в точке C, то аналогично $AC = 2\sqrt{rx}$ и $BC = 2\sqrt{Rx}$.

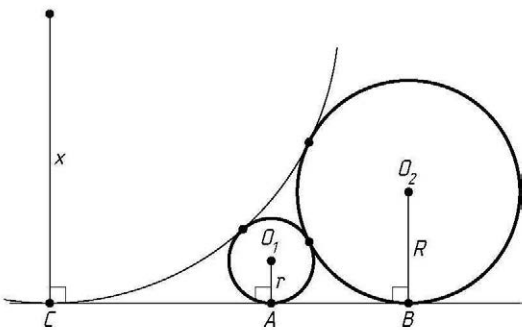
Если точка C лежит между A и B, то $AC + BC = AB$. Тогда, решив уравнение $2\sqrt{xr} + 2\sqrt{Rx} = 2\sqrt{Rr}$, получим, что

$$x = \frac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}.$$

В противном случае точка A лежит между точками B и C (так как $R > r$). Поэтому $AB = BC - AC$ и соответствующее уравнение примет вид

$$2\sqrt{Rx} - 2\sqrt{rx} = 2\sqrt{Rr}.$$

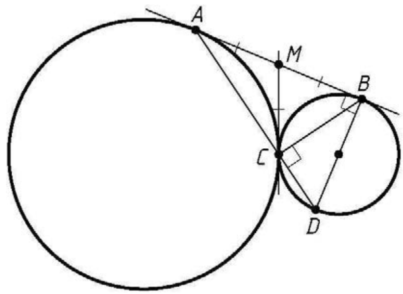
Следовательно, $x = \frac{Rr}{(\sqrt{R}-\sqrt{r})^2}$.



9.30. Две окружности касаются внешним образом в точке C. Общая внешняя касательная касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая AC пересекает вторую окружность в точке D, отличной от C. Найдите BC, если $AC = 9$, $CD = 4$.

Ответ: 6.

Решение. Пусть общая касательная к окружностям, проходящая через точку C, пересекает отрезок AB в точке M. Тогда $MA = MC = MB$, т. е. медиана CM треугольника ABC равна половине стороны AB, значит, $\angle ACB = 90^\circ$.



Смежный с углом ACB угол BCD также равен 90°, поэтому BD — диаметр второй окружности, а так как AB — касательная к этой окружности, то $BD \perp AB$.

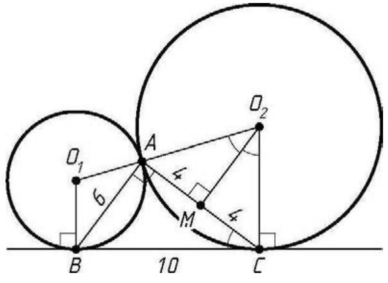
В прямоугольном треугольнике ABD отрезок BC — высота, опущенная на гипотенузу, следовательно,

$$BC = \sqrt{AC \cdot CD} = \sqrt{9 \cdot 4} = 6.$$

9.31. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Найдите радиусы окружностей, если хорды, соединяющие точку A с точками касания с одной из общих внешних касательных, равны 6 и 8.

Ответ: $\frac{15}{4}$; $\frac{20}{3}$.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, B и C — указанные точки касания ($AB = 6$, $AC = 8$). Поскольку треугольник BAC прямоугольный (с прямым углом при вершине A), $BC = 10$.

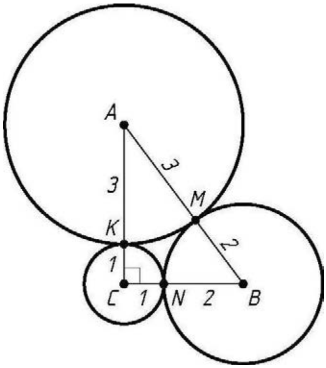


Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из O_2 на AC. Из подобия треугольников O_2MC и CAB находим, что

$$O_2C = BC \cdot \frac{CM}{AB} = 10 \cdot \frac{4}{6} = \frac{20}{3}.$$

Аналогично находим, что $O_1B = \frac{15}{4}$.

9.32. Три окружности радиусов 1, 2 и 3 касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания этих окружностей.

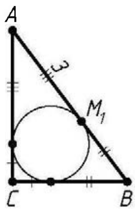


Ответ: 1.

Решение. Пусть C, B и A — центры окружностей радиусов 1, 2 и 3 соответственно. Линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку их касания, значит, точки M, N и K касания окружностей лежат на сторонах треугольника ABC. Пусть точка K лежит на отрезке AC, точка M — на отрезке AB, точка N — на отрезке BC. Тогда

$$AB = AM + MB = 3 + 2 = 5,$$
$$AC = AK + KC = 3 + 1 = 4,$$
$$BC = BN + NC = 2 + 1 = 3.$$

Треугольник ABC прямоугольный, так как $AC^2 + BC^2 = 16 + 9 = 25 = AB^2$, значит, радиус его вписанной окружности равен $\frac{AC+BC-AB}{2} = \frac{3+4-5}{2} = 1$.



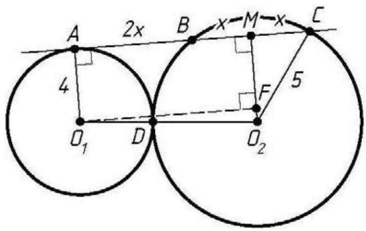
Докажем, что окружность, проходящая через точки K, M, N, и есть вписанная окружность треугольника ABC. Действительно, если вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AB в точке M_1, то $AM_1 = \frac{AB+AC-BC}{2} = \frac{5+4-3}{2} = 3 = AM$ (см. п. 9б приложения 2), значит, точка M_1 совпадает с точкой M. Аналогично докажем, что вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон AC и BC соответственно в точках K и N.

Таким образом, радиус окружности, проходящей через точки касания данных окружностей, равен 1.

9.33. Две окружности радиусов 5 и 4 касаются внешним образом. Прямая, касающаяся меньшей окружности в точке A, пересекает бо́льшую в точках B и C, причём $AB = BC$. Найдите AC.

Ответ: 12.

Решение. Пусть окружность радиуса 4 с центром O_1 и окружность радиуса 5 с центром O_2 касаются внешним образом в точке D. Тогда $O_1O_2 = O_1D + O_2D = 9$.



Опустим перпендикуляр O_2M из центра большей окружности на хорду BC. Тогда M — середина BC. Опустим перпендикуляр O_1F из центра меньшей окружности на прямую O_2M. Тогда AO_1FM — прямоугольник, поэтому $MF = O_1A = 4$ и $O_1F = AM$.

Пусть $BM = MC = x$. Тогда $AB = BC = 2x$ и $AM = AB + BM = 2x + x = 3x$. Из прямоугольных треугольников CMO_2 и O_1FO_2 находим, что

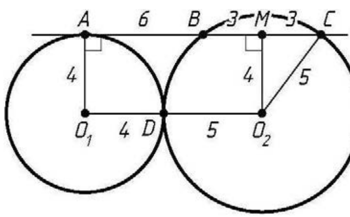
$$O_2M = \sqrt{O_2C^2 - MC^2} = \sqrt{25 - x^2}, \quad O_1F^2 + O_2F^2 = O_1O_2^2,$$

или

$$9x^2 + (\sqrt{25 - x^2} - 4)^2 = 81.$$

Из этого уравнения находим, что $x = 3$. Следовательно, $AC = 4x = 12$.

Заметим, что $O_2M = \sqrt{O_2C^2 - CM^2} = \sqrt{25 - 9} = 4 = FM$, т. е. точка F совпадает с O_2.



9.34. Точка B — середина отрезка AC, причём $AC = 6$. Проведены три окружности радиуса 1 с центрами A, B и C. Найдите радиус четвёртой окружности, касающейся всех трёх данных.

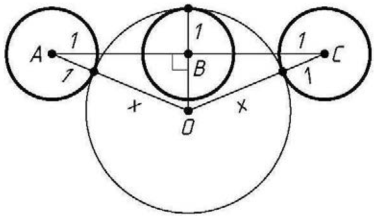
Ответ: $\frac{9}{4}$ или $\frac{9}{2}$.

Решение. Пусть x — радиус искомой окружности, O — её центр. Расстояния от центров данных окружностей до точки O могут быть равны либо $x+1$ (внешнее касание), либо $x-1$ (внутреннее касание). Все три расстояния равными быть не могут. Значит, возможны два случая: либо $OA=OC=x+1$, $OB=x-1$, либо $OA=OB=x-1$, $OC=x+1$ (или симметричный ему случай $OB=OC=x-1$, $OA=x+1$).

В первом случае по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника OAB получаем, что

$$(x+1)^2-(x-1)^2=9,$$

откуда $x=\frac{9}{4}$.



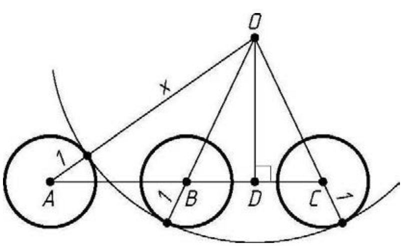
Рассмотрим второй случай. Пусть D — середина BC. Из прямоугольных треугольников COD и AOD получаем, что

$$OD^2=OC^2-DC^2=(x-1)^2-\frac{9}{4},\quad OD^2=OA^2-AD^2=(x+1)^2-\frac{81}{4}.$$

Значит,

$$(x+1)^2-\frac{81}{4}=(x-1)^2-\frac{9}{4},$$

откуда $x=\frac{9}{2}$.



9.35. Точка B — середина отрезка AC, причём $AC=6$. Проведены три окружности радиуса 5 с центрами A, B и C. Найдите радиус четвёртой окружности, касающейся всех трёх данных.

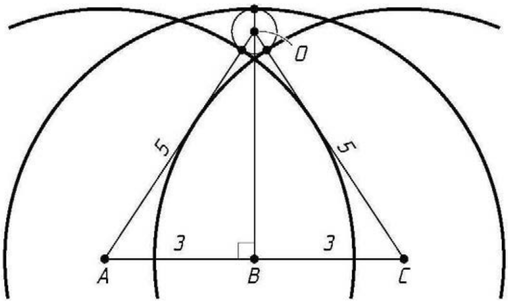
Ответ: $\frac{9}{20}$ или $\frac{9}{10}$.

Решение. Пусть x — радиус искомой окружности, O — её центр. Расстояния от центров данных окружностей до точки O могут быть равны либо $x+5$ (внешнее касание), либо $|x-5|$ (внутреннее касание). Все три расстояния равными быть не могут. Значит, возможны два случая: либо $OA = OC = x+5$, $OB = 5-x$, либо $OB = OC = 5-x$, $OA = x+5$.

В первом случае по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника OAB получаем, что

$$OA^2 = OB^2 + AB^2, \quad (x+5)^2 = (5-x)^2 + 9,$$

откуда $x = \frac{9}{20}$.



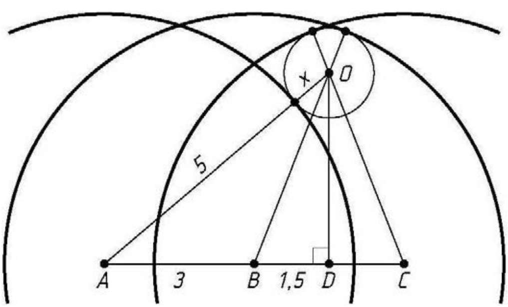
Рассмотрим второй случай. Пусть D — середина BC. Из прямоугольных треугольников AOD и BOD получаем, что

$$OD^2 = OA^2 - AD^2 = (5+x)^2 - \frac{81}{4}, \quad OD^2 = OB^2 - BD^2 = (5-x)^2 - \frac{9}{4}.$$

Значит,

$$(5+x)^2 - \frac{81}{4} = (5-x)^2 - \frac{9}{4},$$

откуда $x = \frac{9}{10}$.



9.36. Дана окружность с центром в точке O и радиусом 2. Из конца отрезка OA, пересекающегося с окружностью в точке M, проведена касательная AK к окружности, $\angle OAK = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол OAK и касающейся данной окружности внешним образом.

Ответ: $2 \pm \frac{4}{3}\sqrt{2}$.

Решение. Пусть O_1 — центр искомой окружности, F — точка касания окружности с лучом AM, P — с данной окружностью, x — искомый радиус. Предположим, что точка F лежит на отрезке OA. Тогда

$$OF = OA - AF = \frac{OK}{\sin 60^\circ} - FO_1 \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{3x}{\sqrt{3}} = \frac{4-3x}{\sqrt{3}},$$
$$OO_1 = OP + PO_1 = 2 + x.$$

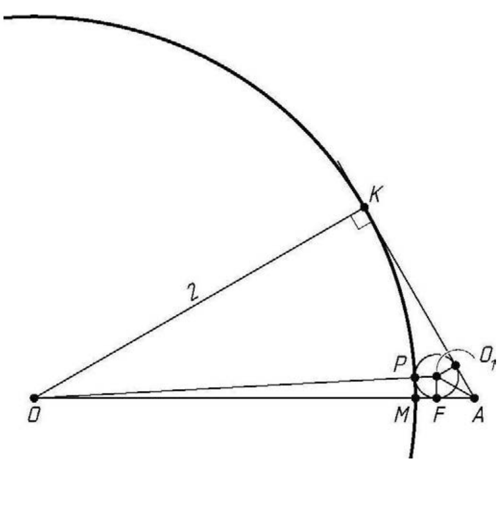
В прямоугольном треугольнике OFO_1 имеем

$$OO_1^2 = OF^2 + O_1F^2, \quad \text{или} \quad (2+x)^2 = \frac{(4-3x)^2}{3} + x^2.$$

Из этого уравнения находим, что

$$x = 2 - \frac{4}{3}\sqrt{2} \quad \text{или} \quad x = 2 + \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

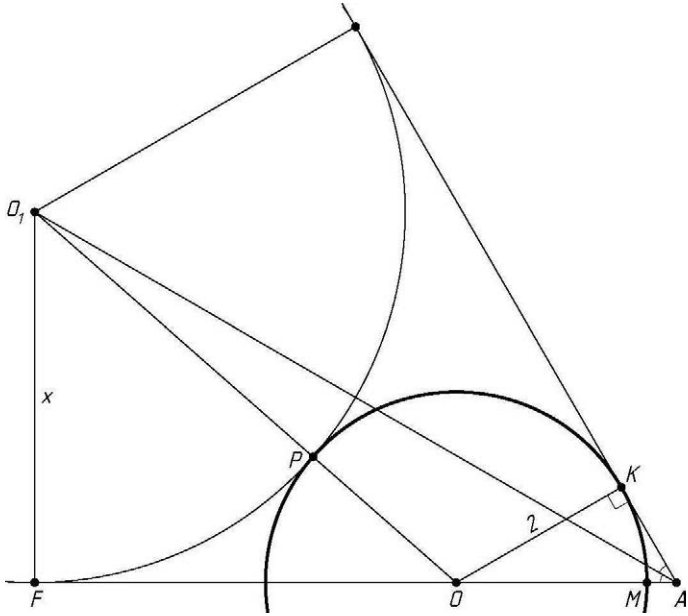
Условию задачи удовлетворяет только корень $x = 2 - \frac{4}{3}\sqrt{2}$.



Если же точка F лежит на продолжении отрезка OA за точку O, то

$$OF = AF - OA = \frac{3x-4}{\sqrt{3}}, \quad (2+x)^2 = \frac{(3x-4)^2}{3} + x^2.$$

Условию задачи удовлетворяет только корень $x = 2 + \frac{4}{3}\sqrt{2}$.



9.37. В круге с центром O хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причём $\angle CDA = 120^\circ$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол ADC и касающейся дуги AC, если $OC = 2$, $OD = \sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{21} - 9$ или $3 + 2\sqrt{3}$.

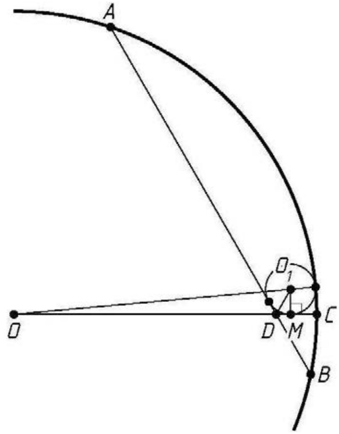
Решение. Предположим, что искомая окружность касается данной внутренним образом. Пусть x — радиус искомой окружности, O_1 — её центр, M — точка касания с отрезком DC. В прямоугольном треугольнике OO_1M известно, что

$$O_1M = x, \quad OM = OD + DM = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad OO_1 = 2 - x.$$

По теореме Пифагора

$$OO_1^2 = OM^2 + O_1M^2, \quad \text{или} \quad (2-x)^2 = \left(\sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + x^2.$$

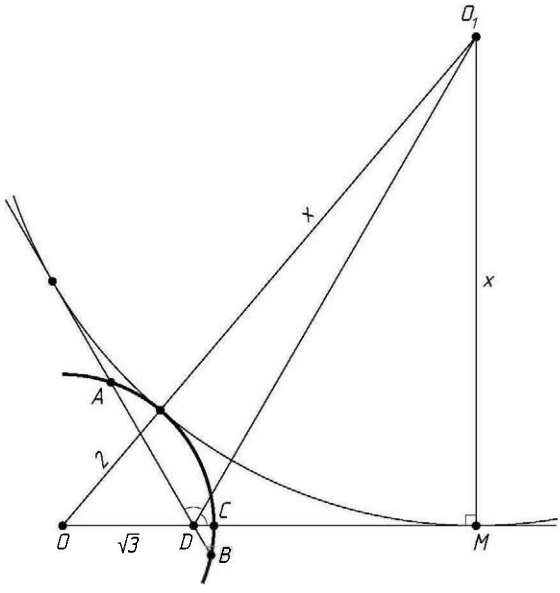
Отсюда находим, что $x = 2\sqrt{21} - 9$.



Если же искомая окружность касается данной внешним образом, то рассуждая аналогично, получим уравнение

$$(2+x)^2 = \left(\sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + x^2,$$

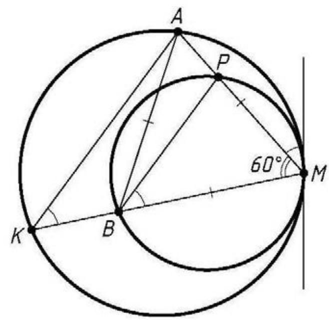
из которого найдём, что $x = 3 + 2\sqrt{3}$.



9.38. Окружности радиусов r и R касаются друг друга внутренним образом. Найдите сторону правильного треугольника, у которого одна вершина находится в точке касания данных окружностей, а две другие лежат на разных данных окружностях.

Ответ: $\dfrac{rR\sqrt{3}}{\sqrt{r^2-rR+R^2}}$.

Решение. Первый способ. Пусть $R>r$, AMB — равносторонний треугольник, M — точка касания окружностей, A — точка на большей окружности, B — на меньшей, P — точка пересечения стороны MA с меньшей окружностью, K — точка пересечения продолжения стороны MB с большей окружностью.



Углы MBP и MKA равны, так как оба они равны углу между прямой MA (MP) и общей касательной к окружностям, проведённой через точку M. Следовательно, треугольники MBP и MKA подобны. Поскольку

$$BP = 2r\sin\angle BMP = 2r\sin 60^\circ = r\sqrt{3},$$

$$AK = 2R\sin\angle KMA = 2R\sin 60^\circ = R\sqrt{3},$$

коэффициент подобия этих треугольников равен $\frac{r}{R}$.

Обозначим $MB=MA=AB=a$. Тогда

$$KM = \frac{aR}{r}, \quad BK = a\left(\frac{R}{r}-1\right),$$

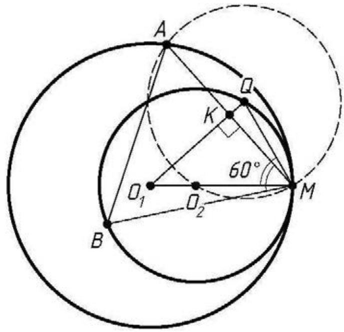
а так как $\angle KBA=120^\circ$, то по теореме косинусов из треугольника ABK находим, что

$$3R^2 = \left(\frac{R}{r}-1\right)^2 a^2 + a^2 + \left(\frac{R}{r}-1\right)a^2.$$

Отсюда следует, что $a=\dfrac{rR\sqrt{3}}{\sqrt{r^2-rR+R^2}}$.

Второй способ. Пусть $R>r$, O_1 и O_2 — центры окружностей, AMB — равносторонний треугольник, M — точка касания окружностей, A — точка на большей окружности, B — на меньшей.

Рассмотрим поворот вокруг точки M, при котором точка B переходит в точку A. При этом повороте центр O_2 меньшей окружности перейдёт в некоторую точку Q, причём $\angle O_1MQ=60^\circ$, окружность с центром O_2 перейдёт в окружность того же радиуса с центром Q, а так как отрезок AM — общая хорда окружностей с центрами Q и O_1, то



отрезок AM делится прямой O_1Q пополам и $MA \perp O_1Q$. По теореме косинусов из треугольника O_1MQ находим, что

$$O_1Q = \sqrt{r^2 - rR + R^2}.$$

Пусть K — середина AM, тогда MK — высота треугольника O_1MQ. Выражая двумя способами площадь треугольника O_1MQ, получим, что

$$\frac{1}{2}O_1Q \cdot MK = \frac{1}{2}O_1M \cdot QM \cdot \sin\angle O_1MQ,$$

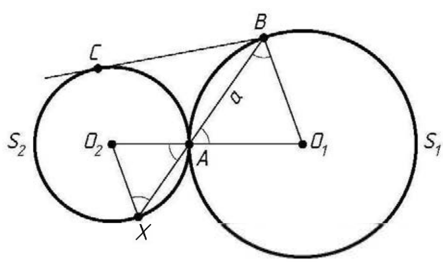
откуда находим, что

$$AM = 2MK = \frac{2O_1M \cdot QM \cdot \sin\angle O_1MQ}{O_1Q} = \frac{rR\sqrt{3}}{\sqrt{r^2 - rR + R^2}}.$$

9.39. Радиусы окружностей S_1 и S_2, касающихся в точке A, равны R и r соответственно $(R > r)$. Прямая, проходящая через точку B, лежащую на окружности S_1, касается окружности S_2 в точке C. Найдите BC, если $AB = a$.

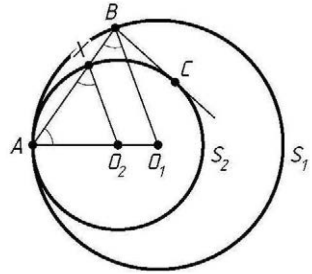
Ответ: $a\sqrt{1 \pm \frac{r}{R}}$.

Решение. Рассмотрим случай внешнего касания. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2; X — точка пересечения прямой AB с окружностью S_2, отличная от A.



Равнобедренные треугольники XO_2A и BO_1A подобны с коэффициентом $\frac{r}{R}$. Поэтому

$$AX = \frac{r}{R} \cdot AB = \frac{ar}{R}.$$



По теореме о касательной и секущей

$$BC^2 = BX \cdot BA = (BA + AX)BA =$$
$$= \left(a + \frac{ar}{R}\right) a = a^2 \left(1 + \frac{r}{R}\right).$$

Следовательно, $BC = a\sqrt{1 + \frac{r}{R}}$.

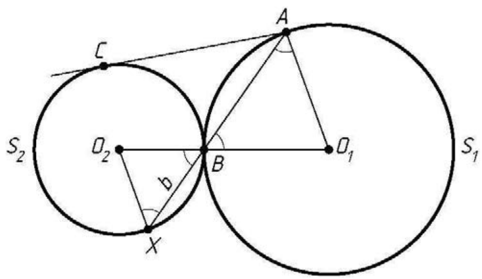
В случае внутреннего касания аналогично получим, что

$$BC = a\sqrt{1 - \frac{r}{R}}.$$

9.40. Отношение радиусов окружностей S_1 и S_2, касающихся в точке B, равно k $(k > 1)$. Из точки A, лежащей на окружности S_1, проведена прямая, касающаяся окружности S_2 в точке C. Найдите AC, если известно, что хорда, высекаемая окружностью S_2 на прямой AB, равна b.

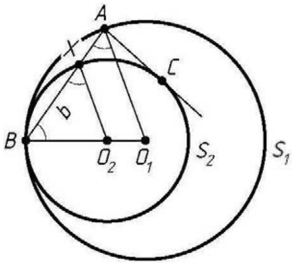
Ответ: $b\sqrt{k^2 \pm k}$.

Решение. Рассмотрим случай внешнего касания. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2 радиусов R и r соответственно, $\frac{R}{r} = k > 1$; X — точка пересечения прямой AB с окружностью S_2, отличная от B, $BX = b$.



Равнобедренные треугольники BO_2X и BO_1A подобны с коэффициентом $\frac{R}{r}$. Поэтому

$$AB = \frac{R}{r} \cdot BX = \frac{bR}{r}.$$



По теореме о касательной и секущей

$$AC^2 = AB \cdot AX = AB(AB+BX) =$$
$$= \frac{bR}{r}\left(b+\frac{bR}{r}\right) = b^2 \cdot \frac{R}{r}\left(1+\frac{R}{r}\right) = b^2k(1+k).$$

Следовательно, $AC = b\sqrt{k^2+k}$.

В случае внутреннего касания аналогично получим, что $AC = b\sqrt{k^2-k}$.

9.41. Окружность радиуса 1 касается окружности радиуса 3 в точке C. Прямая, проходящая через точку C, пересекает окружность меньшего радиуса в точке A, а большего радиуса — в точке B. Найдите AC, если $AB = 2\sqrt{5}$.

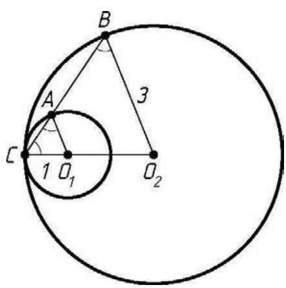
Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

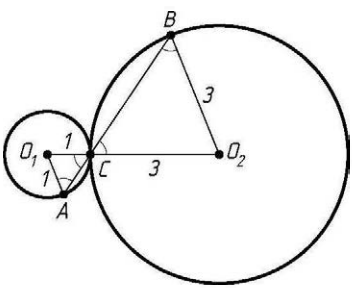
Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры меньшей и большей окружностей соответственно. Поскольку $\angle ACO_1 = \angle BCO_2$ и треугольники AO_1C и BO_2C равнобедренные, то эти треугольники подобны и коэффициент подобия равен отношению радиусов окружностей, т. е. $\frac{1}{3}$.

Если окружности касаются внутренним образом (см. рисунок слева), то

$$AC = \frac{1}{2}AB = \sqrt{5},$$

что невозможно, так как хорда AC меньшей окружности не может быть больше диаметра этой окружности, равного 2.





Если окружности касаются внешним образом (см. рисунок справа), то

$$AC = \frac{1}{4}AB = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

9.42. Окружность радиуса 2 касается окружности радиуса 4 в точке B. Прямая, проходящая через точку B, пересекает окружность меньшего радиуса в точке A, а окружность большего радиуса — в точке C. Найдите BC, если $AC = 3\sqrt{2}$.

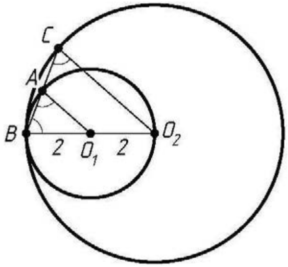
Ответ: $2\sqrt{2}$.

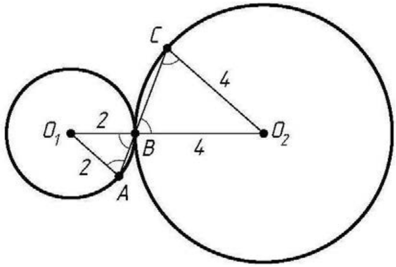
Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры меньшей и большей окружностей соответственно. Поскольку $\angle ABO_1 = \angle CBO_2$ и треугольники ABO_1 и CBO_2 равнобедренные, то эти треугольники подобны и коэффициент подобия равен отношению радиусов окружностей, т. е. $\frac{1}{2}$.

Если окружности касаются внутренним образом (см. рисунок слева), то

$$BC = 2AC = 6\sqrt{2},$$

что невозможно, так как хорда BC большей окружности не может быть больше диаметра этой окружности, равного 8.





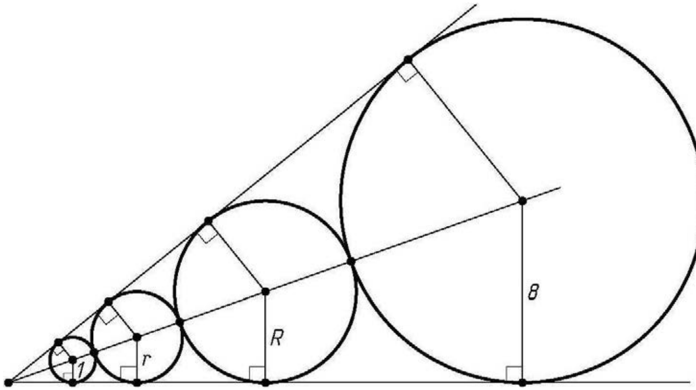
Если окружности касаются внешним образом (см. рисунок справа), то

$$BC = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

9.43. В угол вписано несколько окружностей, радиусы которых возрастают. Каждая следующая окружность касается предыдущей окружности. Найдите сумму длин второй и третьей окружностей, если радиус первой окружности равен 1, а площадь круга, ограниченного четвёртой окружностью, равна 64π.

Ответ: 12π.

Решение. Поскольку площадь круга, ограниченного четвёртой окружностью, равна 64π, то радиус четвёртой окружности равен 8. Пусть r и R — радиусы второй и третьей окружностей соответственно. Заметим, что фигуры, состоящие из двух соседних окружностей, попарно подобны. Поэтому $\frac{r}{1} = \frac{R}{r} = \frac{8}{R}$, откуда находим, что $r = 2$,



$R = 4$. Следовательно, сумма длин второй и третьей окружностей равна $2\pi(r+R) = 2\pi \cdot 6 = 12\pi$.

9.44. На отрезке AB, равном $2R$, как на диаметре построена окружность. Вторая окружность того же радиуса, что и первая, имеет центр в точке A. Третья окружность касается первой окружности внутренним образом, второй окружности — внешним образом, а также касается отрезка AB. Найдите радиус третьей окружности.

Ответ: $\frac{R\sqrt{3}}{4}$.

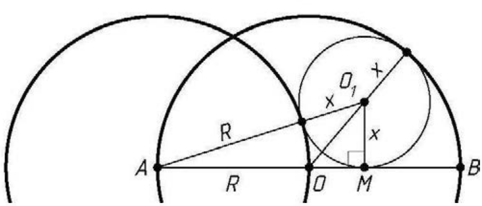
Решение. Пусть O — центр первой окружности, O_1 — центр третьей окружности, M — её точка касания с прямой AB, x — её радиус. Тогда

$$OO_1 = R - x, \quad MO_1 = x, \quad AO_1 = R + x,$$
$$OM = \sqrt{OO_1^2 - MO_1^2} = \sqrt{R^2 - 2Rx},$$
$$AM^2 + MO_1^2 = AO_1^2,$$

или

$$(R + \sqrt{R^2 - 2Rx})^2 + x^2 = (R + x)^2.$$

Из этого уравнения находим, что $x = \frac{R\sqrt{3}}{4}$.



9.45. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ заключены две окружности одинакового радиуса r, касающиеся друг друга внешним образом. Центр первой окружности находится на отрезке, соединяющем вершину A с серединой F стороны CD, а центр второй окружности находится на отрезке, соединяющем вершину C с серединой E стороны AB. Первая окружность касается сторон AB, AD и CD, а вторая окружность касается сторон AB, BC и CD. Найдите AC.

Ответ: $2r\sqrt{5}$.

Решение. Обозначим $AD = a$, $BC = b$. Поскольку AF и CE — биссектрисы углов A и C, то треугольники ADF и CBE равнобедренные. Поэтому

$$CD = 2DF = 2AD = 2a, \quad AB = 2BE = 2BC = 2b.$$

Пусть O_1 и O_2 — центры соответственно первой и второй окружностей. Тогда O_1O_2 — средняя линия трапеции (или параллелограмма) $AFCE$, поэтому

$$2r = O_1O_2 = \frac{1}{2}(CF + AE) = \frac{a+b}{2}.$$

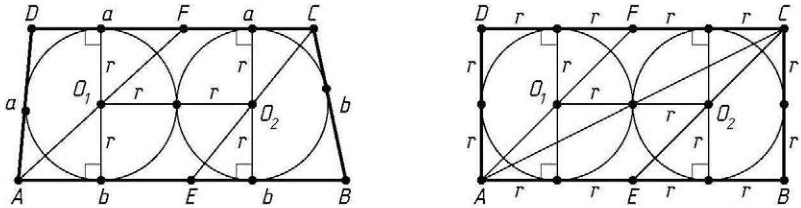
С другой стороны, $2r \leqslant a$ и $2r \leqslant b$. Если хотя бы одно из этих неравенств строгое, то

$$2r < \frac{a+b}{2}.$$

Значит, $a = 2r$ и $b = 2r$. Тогда $ABCD$ — прямоугольник со сторонами $2r$, $2r$, $4r$, $4r$, поэтому

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 = 4r^2 + 16r^2 = 20r^2.$$

Следовательно, $AC = 2r\sqrt{5}$.



9.46. В прямоугольном секторе AOB из точки B как из центра проведена дуга OC (C — точка пересечения этой дуги с дугой AB) радиуса BO. Окружность S_1 касается дуги AB, дуги OC и прямой OA, причём точки касания различны, а окружность S_2 касается дуги AB, прямой OA и окружности S_1 (точки касания также попарно различны). Найдите отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.

Ответ: $\frac{4(2\pm\sqrt{3})}{3}$.

Решение. Пусть R — радиус сектора, P — центр окружности S_1, r — её радиус, M и D — её точки касания с дугой AB и прямой OA соответственно, x — радиус окружности S_2, Q — её центр, K и N — её точки касания с дугой AB и прямой OA соответственно.

Рассмотрим случай, когда точка N лежит на продолжении отрезка OD за точку D.

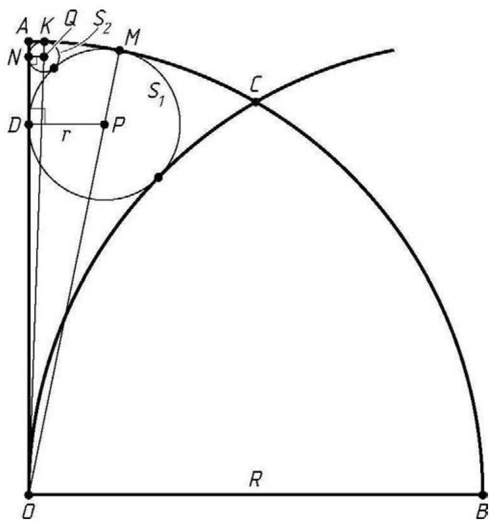
В прямоугольном треугольнике ODP известно, что

$$OD = 2\sqrt{rR}, \quad OP = OM - MP = R - r, \quad DP = r.$$

По теореме Пифагора

$$OP^2 = OD^2 + DP^2, \quad \text{или} \quad (R-r)^2 = (2\sqrt{rR})^2 + r^2.$$

Отсюда находим, что $R = 6r$.



В прямоугольном треугольнике OQN известно, что

$$OQ = OK - KQ = R - x = 6r - x, \quad QN = x,$$
$$ON = OD + DN = 2\sqrt{rR} + 2\sqrt{rx}.$$

По теореме Пифагора

$$OQ^2 = QN^2 + ON^2, \quad \text{или} \quad (6r-x)^2 = x^2 + 4(r\sqrt{6} + \sqrt{rx})^2,$$

или

$$3\frac{r}{x} - 2\sqrt{6}\sqrt{\frac{r}{x}} - 4 = 0.$$

Отсюда находим, что

$$\sqrt{\frac{r}{x}} = \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

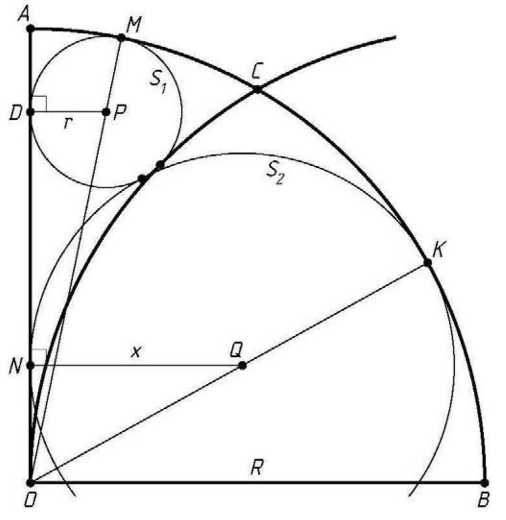
$$\frac{r}{x} = \frac{4(2+\sqrt{3})}{3}.$$

Пусть теперь точка N лежит между точками O и D. Тогда $ON = OD - DN = 2\sqrt{rR} - 2\sqrt{rx}$. Это приводит к уравнению

$$3\frac{r}{x} + 2\sqrt{6}\sqrt{\frac{r}{x}} - 4 = 0,$$

из которого находим, что

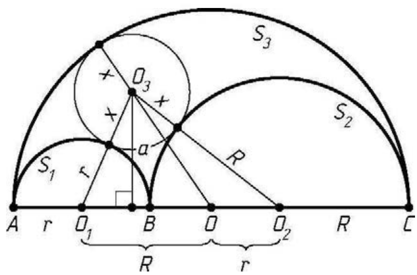
$$\frac{r}{x} = \frac{4(2-\sqrt{3})}{3}.$$



9.47. На отрезке AC взята точка B, и на отрезках AB, BC, CA как на диаметрах построены полуокружности S_1, S_2, S_3 по одну сторону от AC. Найдите радиус окружности, касающейся всех трёх полуокружностей, если известно, что её центр удалён от прямой AC на расстояние a.

Ответ: $\frac{a}{2}$.

Решение. Пусть O_1, O_2, O — центры данных полуокружностей S_1, S_2, S_3 соответственно, r и R — радиусы полуокружностей S_1 и S_2, x —



радиус искомой окружности, O_3 — её центр. Тогда радиус полуокружности S_3 равен $r+R$,

$$O_1O_3 = r+x, \quad OO_3 = r+R-x, \quad OO_1 = R,$$
$$O_2O_3 = R+x, \quad OO_2 = r.$$

По формуле Герона

$$S_{\Delta OO_1O_3} = \sqrt{(r+R)(R-x)xr}, \quad S_{\Delta OO_2O_3} = \sqrt{(r+R)(r-x)xR}.$$

Поскольку $S_{\Delta OO_1O_3} = \frac{aR}{2}$ и $S_{\Delta OO_2O_3} = \frac{ar}{2}$, то

$$(r+R)(R-r)xr-(r+R)\cdot(r-x)\cdot xR = \frac{a^2R^2}{4} - \frac{a^2r^2}{4}.$$

Из полученного уравнения находим, что $x = \frac{a}{2}$.

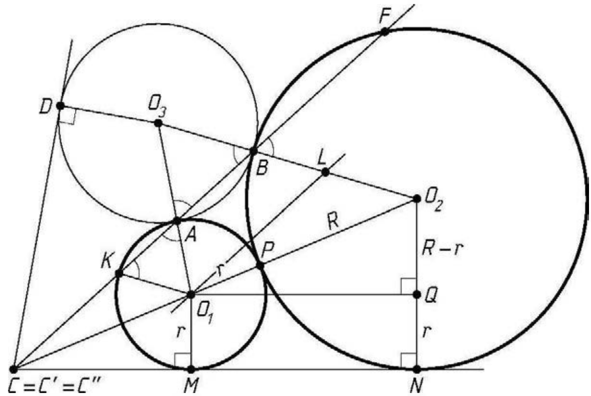
9.48. Две окружности радиусов r и R ($r < R$) касаются друг друга внешним образом. Прямая касается этих окружностей в точках M и N. В точках A и B окружности касаются внешним образом третьей окружности. Прямые AB и MN пересекаются в точке C. Из точки C проведена касательная к третьей окружности (D — точка касания). Найдите CD.

Ответ: $\frac{2rR}{R-r}$.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиусов r и R соответственно, O_3 — центр третьей окружности, K — вторая точка пересечения прямой AC с первой окружностью, P — точка касания двух первых окружностей.

Поскольку эти окружности касаются, точка P лежит на прямой O_1O_2. Докажем, что точка пересечения прямых MN и AB также лежит на прямой O_1O_2.

Пусть прямая MN пересекает прямую O_1O_2 в точке C'. Если Q — проекция точки O_1 на O_2N, то треугольник O_1MC' подобен треуголь-



нику O_2QO_1 с коэффициентом

$$\frac{O_1M}{O_2Q}=\frac{O_1M}{O_2N-NQ}=\frac{O_1M}{O_2N-O_1M}=\frac{r}{R-r}.$$

Поэтому

$$C'O_1=\frac{r}{R-r}\cdot O_1O_2=\frac{r}{R-r}\cdot(R+r)=\frac{r(R+r)}{R-r}.$$

Пусть прямая AB пересекает прямую O_1O_2 в точке C''. Поскольку точка A лежит на отрезке O_1O_3, а точка B — на O_2O_3, то

$$\angle O_1KA=\angle O_1AK=\angle O_3AB=\angle O_3BA=\angle O_2BF,$$

где F — вторая точка пересечения прямой AB и окружности с центром O_2. Поэтому $KO_1\parallel BO_2$. Пусть прямая, проходящая через точку O_1 параллельно AB, пересекает радиус O_2B в точке L. Тогда треугольник O_1KC'' подобен треугольнику O_2LO_1 с коэффициентом

$$\frac{O_1K}{O_2L}=\frac{O_1K}{O_2B-BL}=\frac{O_1K}{O_2B-O_1K}=\frac{r}{R-r}.$$

Поэтому

$$C''O_1=\frac{r}{R-r}\cdot O_1O_2=\frac{r}{R-r}\cdot(R+r)=\frac{r(R+r)}{R-r}.$$

Таким образом, $C'O_1=C''O_1$. Значит, точки C' и C'' совпадают. Следовательно, прямые MN и AB пересекаются на прямой O_1O_2.

Теперь найдём CD. Для этого сначала заметим, что точки A, P и B на сторонах треугольника $O_1O_2O_3$ таковы, что

$$O_1A=O_1P,\quad O_2B=O_2P,\quad O_3A=O_3B.$$

Значит, в этих точках вписанная окружность треугольника $O_1O_2O_3$ касается его сторон. Поскольку CP — касательная к этой окружности, CD — касательная к окружности с центром O_3, а CAB — общая секущая этих окружностей, то

$$CD^2 = CA \cdot CB = CP^2.$$

Следовательно,

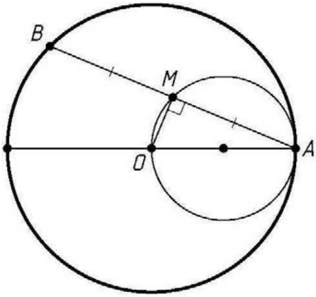
$$CD = CP = CO_1 + O_1P = \frac{r(R+r)}{R-r} + r = \frac{2rR}{R-r}.$$

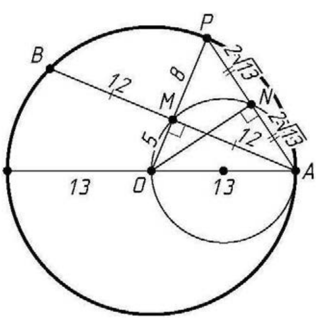
Задачи на доказательство и вычисление

9.49.1. Окружность с центром O и окружность вдвое меньшего радиуса касаются внутренним образом в точке A. Хорда AB большей окружности пересекает меньшую окружность в точке M.

а) Докажите, что M — середина AB.

б) Луч OM пересекает большую окружность в точке P. Найдите расстояние от центра окружности до хорды AP, если радиус большей окружности равен 13, а $OM = 5$.





Ответ: $3\sqrt{13}$.

Решение. а) Линия центров касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому OA — диаметр меньшей окружности. Если точка M совпадает с O, утверждение очевидно. Пусть точка M отлична от O. Тогда $\angle AMO = 90^\circ$, так как точка M лежит на окружности с диаметром OA. Радиус, перпендикулярный хорде, делит её пополам, следовательно, M — середина AB.

б) Из прямоугольных треугольников AOM и APM находим, что

$$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{169-25} = 12,$$

$$AP = \sqrt{AM^2 + MP^2} = \sqrt{12^2 + (13-5)^2} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}.$$

Высота ON равнобедренного треугольника AOP является медианой, поэтому $AN = \frac{1}{2}AP = 2\sqrt{13}$. Следовательно,

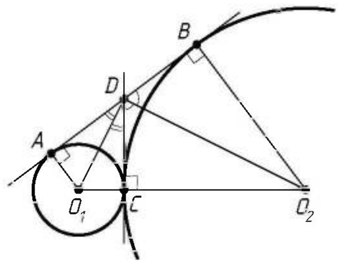
$$ON = \sqrt{OA^2 - AN^2} = \sqrt{169-52} = 3\sqrt{13}.$$

9.50.1. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке C. К окружностям проведены общая внешняя касательная и общая внутренняя касательная. Эти касательные пересекаются в точке D.

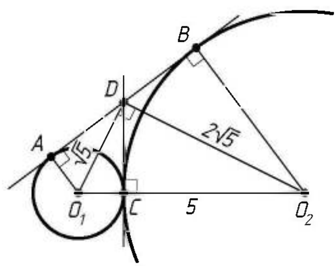
а) Докажите, что треугольник O_1DO_2 прямоугольный.

б) Найдите радиусы окружностей, если $DO_1 = \sqrt{5}$ и $DO_2 = 2\sqrt{5}$.

Ответ: 1 и 4.



Решение. а) Пусть A и B — точки касания окружностей с общей внешней касательной. Точка A лежит на окружности с центром O_1, точка B — на окружности с центром O_2. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому DO_1 — биссектриса угла ADC, а DO_2 — биссектриса угла BDC. Биссектрисы смежных углов перпендикулярны, поэтому $\angle O_1DO_2 = 90°$.



б) Из прямоугольного треугольника O_1DO_2 находим, что

$$O_1O_2 = \sqrt{DO_1^2 + DO_2^2} = \sqrt{5+20} = 5.$$

Линия центров касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому точка C лежит на отрезке O_1O_2. Тогда DC — высота прямоугольного треугольника O_1DO_2, проведённая из вершины прямого угла. Следовательно, если R_1 и R_2 — искомые радиусы окружностей, то

$$R_1 = O_1C = \frac{DO_1^2}{O_1O_2} = \frac{5}{5} = 1, \quad R_2 = O_2C = \frac{DO_2^2}{O_1O_2} = \frac{20}{5} = 4.$$

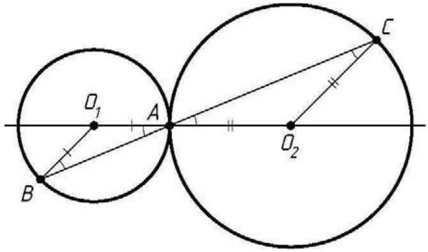
9.51.1. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются в точке A внешним образом. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C.

а) Докажите, что $O_2C \parallel O_1B$.

б) Найдите площадь треугольника BCO_2, если известно, что радиусы первой и второй окружностей равны 5 и 8 соответственно, а $\angle ABO_1 = 15°$.

Ответ: 26.

Решение. а) Линия центров касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому точка A лежит на отрезке O_1O_2. Треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, значит, $\angle ACO_2 = \angle BAO_1 = \angle ABO_1$. Следовательно, $O_2C \parallel O_1B$.

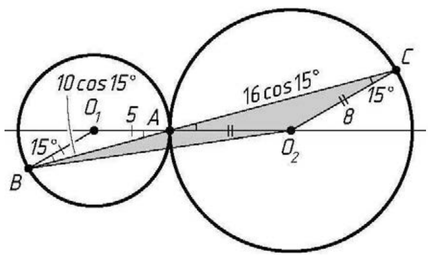


б) В равнобедренном треугольнике AO_1B угол при основании AB равен 15°, поэтому $AB = 2AO_1 \cos 15^\circ = 10\cos 15^\circ$. Аналогично $AC = 2AO_2 \cos 15^\circ = 16\cos 15^\circ$. Тогда

$$BC = AB + AC = 10\cos 15^\circ + 16\cos 15^\circ = 26\cos 15^\circ.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta BCO_2} = \frac{1}{2}O_2C \cdot BC \sin\angle BCO_2 = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 26\cos 15^\circ \sin 15^\circ = \\ = 52\cdot 2\cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ = 52\sin 30^\circ = 26.$$



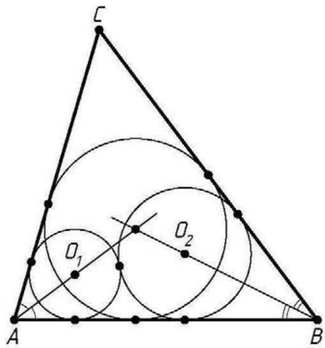
9.52.1. В треугольник ABC помещены две касающиеся окружности с центрами O_1 и O_2, причём первая из них касается сторон AB и AC, а вторая — сторон AB и BC.

а) Докажите, что прямые AO_1 и BO_2 пересекаются в центре окружности, вписанной в треугольник ABC.

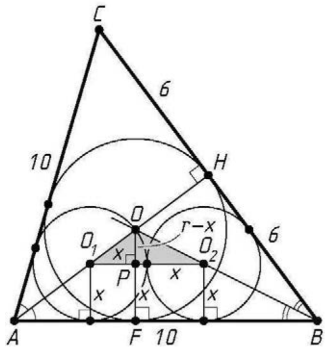
б) Найдите радиусы окружностей, если они равны, а $AB = AC = 10$ и $BC = 12$.

Ответ: $\frac{15}{8}$.

Решение. а) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит, AO_1 и BO_2 — биссектрисы углов при вершинах A и B треугольника ABC. Следовательно, их точка пересечения — центр вписанной окружности треугольника ABC.



б) Пусть искомый радиус равен x, радиус вписанной окружности треугольника ABC равен r, а биссектрисы углов при вершинах A и B треугольника ABC пересекаются в точке O — центре вписанной окружности треугольника.



Пусть AH — высота треугольника ABC. Треугольник равнобедренный, поэтому H — середина основания BC. По теореме Пифагора

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{100-36} = 8,$$

Значит,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8 = 48.$$

В то же время площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности, поэтому $r = \dfrac{48}{10+6} = 3$.

Окружности с центрами O_1 и O_2 равны и касаются, поэтому $O_1O_2 = 2x$ и $O_1O_2 \parallel AB$. Треугольники OO_1O_2 и OAB подобны. Пусть высота OF треугольника OAB пересекает O_1O_2 в точке P. Тогда $\dfrac{OP}{OF} = \dfrac{O_1O_2}{AB}$, или $\dfrac{r-x}{r} = \dfrac{2x}{10}$. Отсюда находим, что $x = \dfrac{5r}{r+5} = \dfrac{15}{8}$.

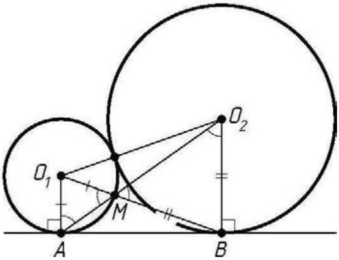
9.53.1. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом; прямая касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Известно, что точка M пересечения диагоналей четырёхугольника O_1ABO_2 лежит на первой окружности.

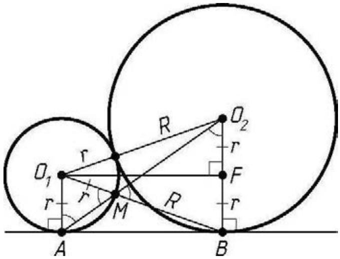
а) Докажите, что треугольник MBO_2 равнобедренный.

б) Найдите отношение радиусов окружностей.

Ответ: $1:2$.

Решение. а) Прямые O_1A и O_2B параллельны, так как они перпендикулярны одной и той же прямой AB, поэтому $\angle BO_2M = \angle MAO_1$. Треугольник MBO_2 подобен равнобедренному треугольнику MAO_1 по двум углам. Следовательно, треугольник MBO_2 также равнобедренный.





б) Обозначим $O_1A=r$, $O_2B=R$. Тогда $O_1M=O_1A=r$ и $MB=O_2B=R$, поэтому $O_1B=O_1M+MB=r+R$, а так как линия центров касающихся окружностей проходит через точку их касания, $O_1O_2=r+R$. Значит, треугольник BO_1O_2 равнобедренный. Его высота O_1F является медианой, а так как O_1ABF — прямоугольник, то $FB=O_1A=r$. Значит, $2r=R$. Следовательно, $\frac{r}{R}=\frac{1}{2}$.

9.54.1. В полуокружности расположены две окружности, касающиеся друг друга, полуокружности и её диаметра.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах окружностей и полуокружности равен диаметру полуокружности.

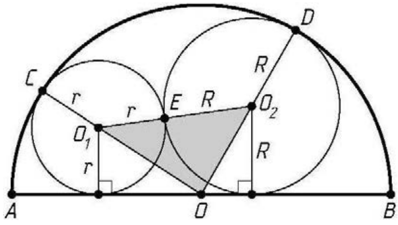
б) Известно, что радиус полуокружности равен 8, а радиус одной из окружностей равен 4. Найдите радиус другой.

Ответ: 2.

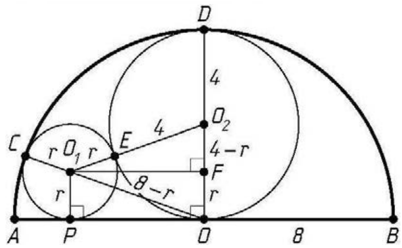
Решение. а) Пусть AB — диаметр полуокружности, O — её центр, O_1 — центр окружности радиуса r, C — точка её касания с полуокружностью, O_2 — центр окружности радиуса R, D — точка её касания с полуокружностью, E — точка касания окружностей с центрами O_1 и O_2.

Точки O, O_1 и C лежат на одной прямой, поэтому $OO_1=OC-O_1C=$ $=OC-r$. Аналогично $OO_2=OD-O_2D=OD-R$ и $O_1O_2=O_1E+O_2E=$ $=r+R$. Следовательно, периметр треугольника OO_1O_2 равен

$$OO_1+OO_2+O_1O_2=OC-r+OD-R+r+R=OC+OD=2OC=AB.$$



б) Пусть $R=4$, $OC=OD=8$. Тогда диаметр окружности с центром O_2 равен радиусу полуокружности, значит, $OD \perp AB$, а O — точка касания этой окружности с прямой AB.



Пусть окружность с центром O_1 касается AB в точке P, F — проекция точки O_1 на O_2O. Тогда

$$O_1P=r, \quad O_1O_2=r+4, \quad O_2F=OO_2-OF=OO_2-O_1P=4-r, \quad OO_1=8-r.$$

Из прямоугольных треугольников OO_1P и O_1O_2F находим, что

$$OP^2=OO_1^2-O_1P^2=(8-r)^2-r^2=64-16r,$$
$$O_1F^2=O_1O_2^2-O_2F^2=(r+4)^2-(4-r)^2=16r,$$

а так как $O_1F=OP$, то $64-16r=16r$. Следовательно, $r=2$.

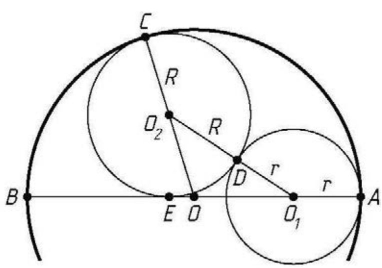
9.55.1. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если радиусы первых двух равны 6 и 2.

Ответ: 3.

Решение. а) Пусть AB — диаметр большей из трёх окружностей, O — её центр, O_1 — центр окружности радиуса r, касающейся окружности с диаметром AB в точке A, O_2 — центр окружности радиуса R,



касающейся окружности с диаметром AB в точке C, окружности с центром O_1 — в точке D, отрезка AB — в точке E.

Точки O, O_2 и C лежат на одной прямой, поэтому $OO_2 = OC - O_2C = OC - R$. Аналогично $OO_1 = OA - O_1A = OA - r$ и $O_1O_2 = O_1D + O_2D = r + R$. Следовательно, периметр треугольника OO_1O_2 равен

$$OO_1 + OO_2 + O_1O_2 = OA - r + OC - R + r + R = OA + OC = 2OA = AB.$$

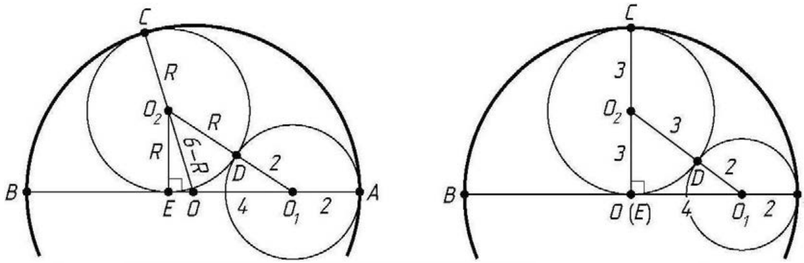
б) Пусть $OA = 6$, $r = 2$. Тогда

$$O_2E = R, \quad O_1O_2 = 2 + R, \quad OO_1 = OA - O_1A = 6 - 2 = 4,$$
$$OO_2 = OC - O_2C = 6 - R.$$

Из прямоугольных треугольников O_1O_2E и OO_2E находим, что

$$O_1E = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(2+R)^2 - R^2} = \sqrt{4+4R},$$
$$OE = \sqrt{OO_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(6-R)^2 - R^2} = \sqrt{36-12R}.$$

Если точка E лежит на отрезке OB (см. рисунок слева), то $O_1E = OO_1 + OE$, или $\sqrt{4+4R} = 4 + \sqrt{36-12R}$. Из этого уравнения находим, что $R = 3$ (это значит, что диаметр искомой окружности равен радиусу наибольшей из трёх окружностей, т. е. точка E совпадает с O, см. рисунок справа).



Если точка E лежит на отрезке OA, то аналогично получим тот же результат.

9.56.1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC расположены две окружности, каждая из которых касается другой окружности, двух боковых сторон и одного из оснований. Пусть P и Q — точки касания окружностей с боковой стороной AB, а общая касательная окружностей, проходящая через их точку касания, пересекает боковые стороны в точках M и N.

а) Докажите, что $MN = PQ$.

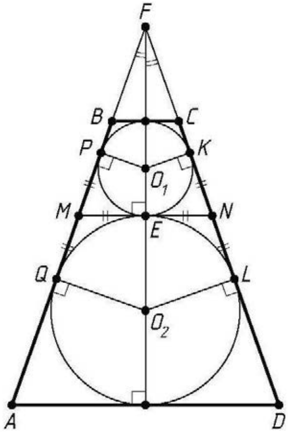
б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AD = 18$ и $BC = 2$.

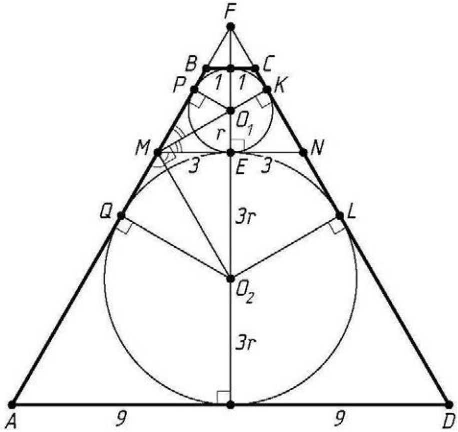
Ответ: $80\sqrt{3}$.

Решение. а) Пусть окружности касаются в точке E, меньшая окружность с центром O_1 касается боковых сторон AB и CD в точках P и K соответственно, бóльшая окружность с центром O_2 — в точках Q и L соответственно, а прямые AB и CD пересекаются в точке F.

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому точки O_1 и O_2 лежат на биссектрисе угла AFD, т. е. на высоте равнобедренного треугольника ADF.

Прямая MN — общая касательная к окружностям, поэтому она перпендикулярна O_1O_2, а значит, параллельна основаниям трапеции. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, $MP = ME = MQ$ и $NL = NE = NK$. Значит, $ME = \frac{1}{2}PQ$. Аналогично $NE = \frac{1}{2}KL$, а так как $PQ = FQ - FP = FL - FK = KL$, то $PQ = KL$. Следовательно, $PQ = MN$.





б) Треугольник FMN подобен треугольнику FAD. При этом подобии отрезок BC в треугольнике FMN соответствует отрезку MN в треугольнике FAD. Значит, коэффициент подобия, с одной стороны, равен $\frac{BC}{MN}$, с другой — $\frac{MN}{AD}$. Из равенства $\frac{BC}{MN} = \frac{MN}{AD}$ находим, что $MN^2 = BC \cdot AD = 2 \cdot 18 = 36$. Значит, $MN = 6$, $ME = \frac{1}{2}MN = 3$, а коэффициент подобия равен $\frac{BC}{MN} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Тогда радиус второй окружности в три раза больше радиуса первой.

Лучи MO_1 и MO_2 — биссектрисы смежных углов BMN и AMN. Поэтому треугольник O_1MO_2 прямоугольный, а так как ME — его высота, проведённая из вершины прямого угла, то $ME^2 = O_1E \cdot O_2E$, или $9 = r \cdot 3r$, где r и $3r$ — радиусы окружностей. Отсюда находим, что $r = \sqrt{3}$. Тогда высота трапеции равна $2r + 6r = 8r = 8\sqrt{3}$. Следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot 8r = \frac{18+2}{2} \cdot 8\sqrt{3} = 80\sqrt{3}.$$

9.57.1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны: $AC = 15$, $BC = 8$. Окружность радиуса 2,5 с центром на стороне BC проходит через вершину C. Вторая окружность с центром O касается катета AC, гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что прямая AO пересекает первую окружность.

б) Найдите радиус второй окружности.

Ответ: 2,5.

Решение. а) По теореме Пифагора находим, что $AB = 17$.

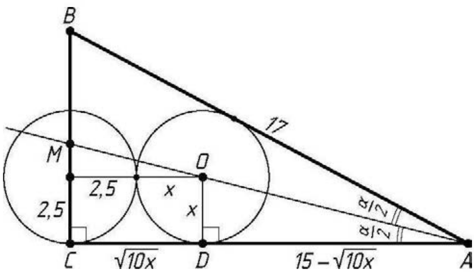
Пусть M — точка пересечения прямой AO с катетом BC. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла, поэтому AM — биссектриса треугольника ABC. Тогда $\frac{CM}{MB} = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{17}$, значит,

$$CM = BC \cdot \frac{AC}{AC+AB} = 8 \cdot \frac{15}{32} = \frac{15}{4}.$$

Таким образом, прямая AO пересекает диаметр окружности радиуса 2,5 в точке, удалённой от центра на расстояние

$$5 - CM = 5 - \frac{15}{4} = \frac{5}{4},$$

меньшее радиуса. Следовательно, прямая AM пересекает эту окружность.



б) Пусть x — радиус второй окружности. Поскольку первая окружность проходит через вершину C прямого угла треугольника ABC, а её центр лежит на катете BC, прямая AC касается этой окружности в точке C, а CD — отрезок общей внешней касательной первой и второй окружностей. Значит, $CD = 2\sqrt{2{,}5x} = \sqrt{10x}$ (см. п. 10 приложения 2), а $AD = AC - CD = 15 - \sqrt{10x}$.

Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому $\angle DAO = \frac{\alpha}{2}$. Из прямоугольного треугольника ABC находим, что $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\alpha = \frac{15}{17}$. Тогда

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\frac{8}{17}}{1+\frac{15}{17}} = \frac{1}{4}.$$

Из прямоугольного треугольника AOD получаем, что $OD = AD\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, или

$$x = (15-\sqrt{10x})\cdot\frac{1}{4}.$$

Отсюда $\sqrt{x} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Следовательно,

$$x = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

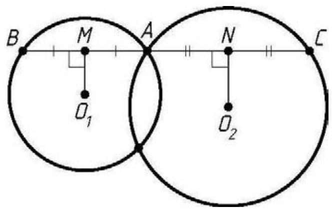
§ 10. Пересекающиеся окружности

Подготовительные задачи

10.1. Прямая, проходящая через общую точку A двух окружностей, вторично пересекает эти окружности в точках B и C. Расстояние между проекциями центров окружностей на эту прямую равно 12. Найдите BC, если известно, что точка A лежит на отрезке BC.

Ответ: 24.

Решение. Пусть M и N — проекции центров O_1 и O_2 данных окружностей на прямую BC (M лежит на AB, N — на AC). Поскольку диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, точки M и N — середины отрезков AB и AC. Следовательно,



$$BC = AB + AC = 2AM + 2AN = $$
$$= 2(AM + AN) = 2MN = 2 \cdot 12 = 24.$$

10.2. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Известно, что $\angle AO_1B = 90^\circ$, $\angle AO_2B = 60^\circ$, $O_1O_2 = a$. Найдите радиусы окружностей.

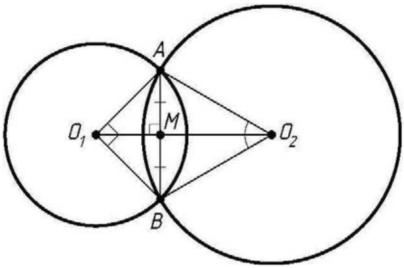
Ответ: $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$, $\frac{2a}{\sqrt{3}+1}$ или $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$, $\frac{2a}{\sqrt{3}-1}$.

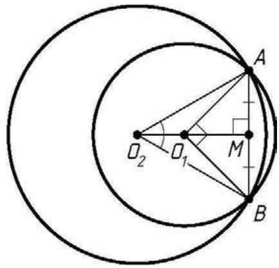
Решение. Пусть линия центров O_1O_2 пересекает общую хорду AB окружностей в точке M. Тогда M — середина AB и $O_1O_2 \perp AB$. Треугольник AO_1B прямоугольный и равнобедренный, а треугольник AO_2B равносторонний, поэтому если r и R — радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 соответственно, то $AB = r\sqrt{2}$ и $AB = R$, значит, $R = r\sqrt{2}$. Тогда

$$O_1M = \frac{r\sqrt{2}}{2}, \quad O_2M = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{r\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{r\sqrt{6}}{2}.$$

Предположим, что центры окружностей лежат по разные стороны от прямой AB (см. рисунок слева на следующей странице). Тогда $O_1M + MO_2 = O_1O_2$, или $\frac{r\sqrt{2}}{2} + \frac{r\sqrt{6}}{2} = a$. Отсюда находим, что

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}, \quad R = r\sqrt{2} = \frac{2a}{\sqrt{3}+1}.$$





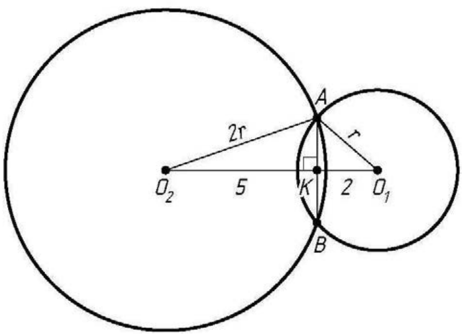
Если же точки O_1 и O_2 лежат по одну сторону от прямой AB (см. рисунок справа), то $O_2M - MO_1 = O_1O_2$. Тогда

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}, \quad R = r\sqrt{2} = \frac{2a}{\sqrt{3}-1}.$$

10.3. Отрезок, соединяющий центры двух пересекающихся окружностей, делится их общей хордой на отрезки, равные 5 и 2. Найдите общую хорду, если известно, что радиус одной окружности вдвое больше радиуса другой.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Решение. Пусть окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами соответственно r и $2r$ пересекаются в точках A и B, а отрезки O_1O_2 и AB — в точке K. Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде, поэтому треугольники AO_1K и AO_2K прямоугольные. Поскольку $AO_1 < AO_2$, то $KO_1 < KO_2$. Значит, $KO_1 = 2$ и $KO_2 = 5$.

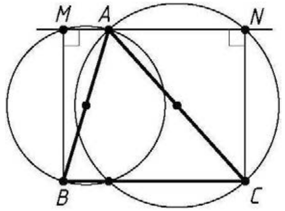


По теореме Пифагора

$$AO_1^2 - KO_1^2 = AO_2^2 - KO_2^2, \quad \text{или} \quad r^2 - 4 = 4r^2 - 25,$$

откуда находим, что $r = \sqrt{7}$. Следовательно, $AB = 2AK = 2\sqrt{R^2 - 4} = 2\sqrt{7-4} = 2\sqrt{3}$.

10.4. Через вершину A остроугольного треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне BC, равной a, и пересекающая окружности, построенные на сторонах AB и AC как на диаметрах, в точках M и N, отличных от A. Найдите MN.



Ответ: a.

Решение. Поскольку точка M лежит на окружности с диаметром AB, то $\angle AMB = 90^\circ$. Аналогично $\angle ANC = 90^\circ$. Значит, противоположные стороны четырёхугольника $BMNC$ попарно параллельны. Следовательно, $MN = BC = a$.

10.5. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены диаметры AC и AD этих окружностей. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $BC = a$ и $BD = b$.

Ответ: $\frac{a+b}{2}$ или $\frac{|a-b|}{2}$.

Решение. Пусть O_1 — центр окружности с диаметром AC, O_2 — центр окружности с диаметром AD. Точка B лежит на окружности с диаметром AC, поэтому $\angle ABC = 90^\circ$. Аналогично $\angle ABD = 90^\circ$.

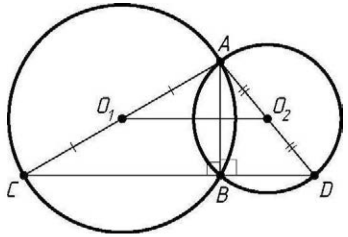
Рассмотрим случай, когда точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB (см. рисунок слева). Тогда

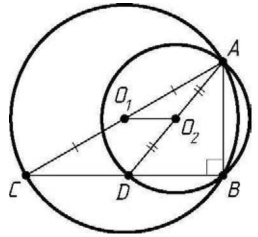
$$\angle CBD = \angle ABC + \angle ABD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

значит, точки C, B и D лежат на одной прямой, причём точка B лежит между C и D, поэтому $CD = BC + BD = a + b$, а так как O_1O_2 — средняя линия треугольника ACD, то

$$O_1O_2 = \frac{1}{2}CD = \frac{a+b}{2}.$$

Пусть теперь точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB и $a > b$ (см. рисунок справа). Тогда точки B, C и D лежат на одной





прямой, причём точка D лежит между B и C. Следовательно,

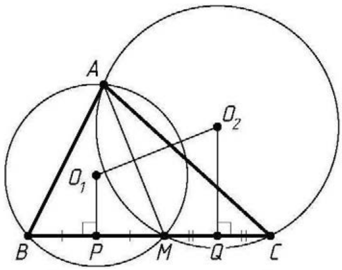
$$O_1O_2 = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}(BC - BD) = \frac{a-b}{2}.$$

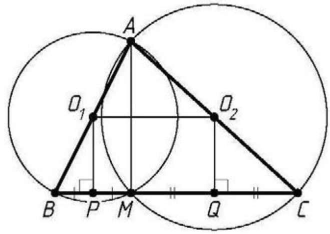
Аналогично для случая $a < b$.

10.6. В треугольнике ABC на наибольшей стороне BC, равной b, выбирается точка M. Найдите наименьшее расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAM и ACM.

Ответ: $\frac{b}{2}$.

Решение. Проекции центров O_1 и O_2 данных окружностей на BC — середины P и Q отрезков BM и MC соответственно. Тогда $O_1O_2 \geqslant PQ = \frac{b}{2}$ (см. рисунок слева).





Если AM — высота треугольника BAC, то

$$O_1O_2 = PQ = \frac{b}{2}$$

(см. рисунок справа). В остальных случаях $O_1O_2 > \frac{b}{2}$.

Тренировочные задачи

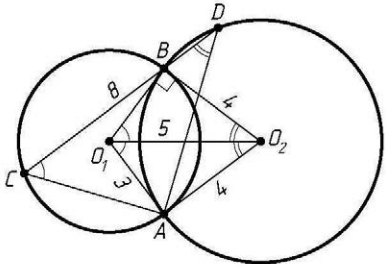
10.7. Две окружности радиусов 3 и 4, расстояние между центрами которых равно 5, пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D, причём $CD = 8$ и точка B лежит между точками C и D. Найдите площадь треугольника ACD.

Ответ: $\frac{384}{25}$.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры меньшей и большей окружностей соответственно, а точка C расположена на меньшей окружности. Тогда

$$\angle DCA = \angle BCA = \frac{1}{2}\smile AB = \angle BO_1O_2.$$

Аналогично $\angle CDA = \angle BO_2O_1$. Следовательно, треугольник ACD подобен треугольнику BO_1O_2 с коэффициентом $\frac{CD}{O_1O_2} = \frac{8}{5}$.



Треугольник BO_1O_2 прямоугольный, так как

$$O_1O_2^2 = 5^2 = 3^2 + 4^2 = O_1B^2 + O_2B^2.$$

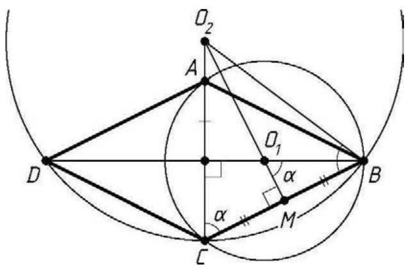
Следовательно,

$$S_{\Delta BCD} = \left(\frac{8}{5}\right)^2 \cdot S_{\Delta BO_1O_2} = \frac{64}{25} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = \frac{384}{25}.$$

10.8. Дан ромб $ABCD$. Радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и BCD, равны 1 и 2. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

Ответ: $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Отрезок BC — общая хорда окружностей с центрами O_1 и O_2, описанных около треугольников ABC и BCD соответственно, поэтому прямая O_1O_2 перпендикулярна отрезку BC и делит его пополам.



Пусть M — середина BC. Тогда O_1M и BD — серединные перпендикуляры к сторонам BC и AC треугольника ABC. Обозначим $\angle CBO_2 = \angle BCO_2 = \angle BO_1M = \alpha$. Из прямоугольных треугольников BMO_1 и BMO_2 находим, что

$$BM = BO_1 \sin\alpha = 1 \cdot \sin\alpha = \sin\alpha, \quad BM = O_2B\cos\alpha = 2\cos\alpha,$$

откуда $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Тогда $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, значит,

$$O_1M = BO_1\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad O_2M = BO_2\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

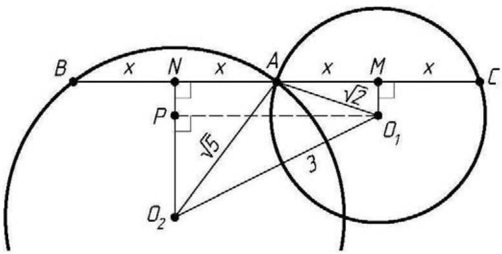
Следовательно,

$$O_1O_2 = O_2M - O_1M = \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

10.9. Две окружности радиусов $\sqrt{5}$ и $\sqrt{2}$ пересекаются в точке A. Расстояние между центрами окружностей равно 3. Через точку A проведена прямая, пересекающая окружности в точках B и C так, что $AB = AC$ (точка B не совпадает с C). Найдите AB.

Ответ: $\frac{6}{\sqrt{5}}$.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры меньшей и большей окружностей соответственно. Положим $AB = AC = 2x$ и опустим перпендикуляры O_1M и O_2N на прямую BC. Тогда M и N — середины хорд AB и AC.



Если P — проекция точки O_1 на прямую O_2N, то

$$O_1P = MN = MA + AN = 2x, \quad O_1M^2 = O_1A^2 - MA^2 = 2 - x^2,$$
$$O_2N^2 = O_2A^2 - NA^2 = 5 - x^2.$$

В прямоугольном треугольнике O_1PO_2 известно, что

$$O_1O_2^2 = (O_2N - O_1M)^2 + O_1P^2,$$

или

$$9 = (\sqrt{5 - x^2} - \sqrt{2 - x^2})^2 + 4x^2.$$

Из этого уравнения находим, что $x = \frac{3}{\sqrt{5}}$. Следовательно, $AB = 2x = \frac{6}{\sqrt{5}}$.

10.10. Первая из двух окружностей проходит через центр второй и пересекает её в точках A и B. Касательная к первой окружности, проходящая через точку A, делит вторую окружность на дуги, градусные меры которых относятся как $m:n$ $(m<n)$. В каком отношении вторая окружность делит первую?

Ответ: $\frac{n-m}{2m}$.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры соответственно первой и второй окружностей, P — такая точка на второй окружности, что AP — касательная к первой окружности. Тогда

$$\angle AO_2P = 360^\circ \cdot \frac{m}{m+n},$$

$$\angle PAO_2 = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AO_2P) = \frac{1}{2}\left(180^\circ - 360^\circ \cdot \frac{m}{m+n}\right) = 90^\circ \cdot \frac{n-m}{n+m}.$$

Поскольку $\angle PAO_2$ — угол между касательной и хордой, то

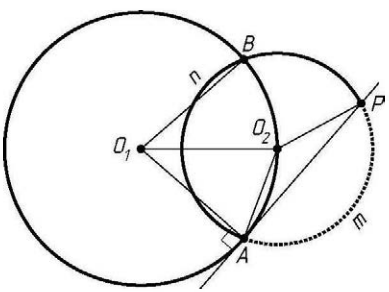
$$\angle AO_1O_2 = 2\angle PAO_2 = 180^\circ \cdot \frac{n-m}{n+m},$$

$$\angle AO_1B = 2\angle AO_1O_2 = 360^\circ \cdot \frac{n-m}{n+m}.$$

Следовательно, в первой окружности

$$\smile AO_2B = 360^\circ \cdot \frac{n-m}{n+m}.$$

Тогда дополнительная к ней дуга первой окружности равна $360^\circ \cdot \frac{2m}{n+m}$, а искомое отношение равно $\frac{n-m}{2m}$.



10.11. Через общую точку C двух равных окружностей проведены две прямые, пересекающие данные окружности в точках A, B и M, N соответственно. Прямая AB параллельна линии центров, а прямая MN образует угол α с линией центров. Известно, что $AB = a$. Найдите NM.

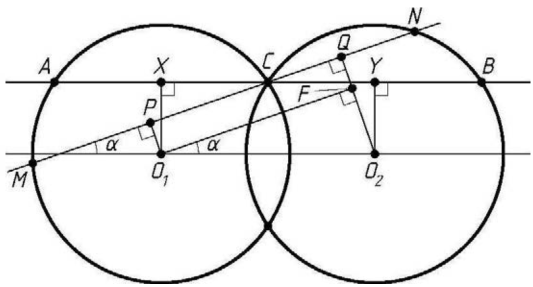
Ответ: $a \cos \alpha$.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, точки A и M принадлежат первой окружности, B и N — второй.

Опустим перпендикуляры O_1X и O_2Y на прямую AB. Тогда X и Y — середины хорд AC и BC. Поэтому

$$O_1O_2 = XY = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}.$$

Опустим перпендикуляры O_1P и O_2Q на прямую MN. Тогда P и Q — середины хорд MC и NC. Поэтому $PQ = \frac{1}{2}MN$.



Пусть F — проекция точки O_1 на O_2Q. Тогда $O_1F \parallel MN$. Следовательно, $\angle FO_1O_2 = \alpha$ и $O_1F = PQ$, а так как

$$O_1F = O_1O_2 \cos\alpha = \frac{a}{2} \cdot \cos\alpha,$$

то

$$MN = 2PQ = a\cos\alpha.$$

10.12. В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = a$, $BC = b$ и угол $\angle BAD = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.

Ответ: $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}\,|\mathrm{ctg}\,\alpha|$.

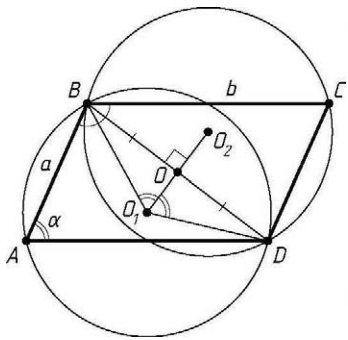
Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников DAB и BCD соответственно, O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Поскольку треугольники DAB и BCD равны, то радиусы окружностей также равны.

Пусть $\alpha < 90°$. По теореме косинусов

$$BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}.$$

Вписанный в окружность с центром O_1 угол BAD равен половине центрального угла BO_1D, значит,

$$\angle BO_1O_2 = \frac{1}{2}\angle BO_1D = \angle BAD = \alpha.$$



Прямая O_1O_2 — серединный перпендикуляр к диагонали BD, поэтому

$$O_1O_2 = 2O_1O = 2\cdot BO\operatorname{ctg}\angle BO_1O =$$
$$= 2\cdot\frac{1}{2}BD\operatorname{ctg}\angle BO_1O = BD\operatorname{ctg}\alpha =$$
$$= \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha.$$

Если же $\alpha \geqslant 90^\circ$, то

$$\angle BO_1O_2 = \frac{1}{2}\angle BO_1D =$$
$$= \frac{1}{2}(360^\circ - 2\alpha) = 180^\circ - \alpha.$$

Следовательно,

$$O_1O_2 = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}.$$

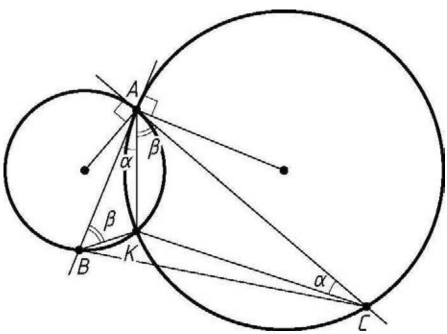
10.13. Две окружности пересекаются в точках A и K. Их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK. Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AB, касается одной окружности в точке A. Прямая, содержащая отрезок AC, касается другой окружности также в точке A. Длина отрезка BK равна 1, длина отрезка CK равна 4, а тангенс угла CAB равен $\frac{1}{\sqrt{15}}$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: $\frac{5+\sqrt{15}}{4}$.

Решение. Обозначим $\angle BAK = \alpha$, $\angle CAK = \beta$. По теореме об угле между касательной и хордой

$$\angle ACK = \angle BAK = \alpha, \quad \angle ABK = \angle CAK = \beta.$$

Треугольники ABK и CAK подобны по двум углам. Поэтому $\frac{BK}{AK} = \frac{AK}{KC}$. Отсюда находим, что $AK = \sqrt{BK\cdot KC} = \sqrt{1\cdot 4} = 2$.



Поскольку

$$\operatorname{tg}\angle CAB = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{1}{\sqrt{15}} > 0,$$

то угол CAB острый. Тогда

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad \sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{4}.$$

По теореме косинусов из треугольника AKB находим, что

$$AB^2 = AK^2 + BK^2 - 2AK\cdot BK\cos\angle AKB =$$
$$= AK^2 + BK^2 - 2AK\cdot BK\cos(180^\circ - \alpha - \beta) =$$
$$= AK^2 + BK^2 + 2AK\cdot BK\cos(\alpha+\beta) = 4+1+2\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = 5+\sqrt{15}.$$

Из подобия треугольников ABK и CAK следует, что $AC = 2AB$. Следовательно,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC = AB^2\sin\angle BAC = \frac{5+\sqrt{15}}{4}.$$

Задачи на доказательство и вычисление

10.14.1. Окружности, построенные на сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах, пересекаются в точке D, отличной от A.

а) Докажите, что точка D лежит на прямой BC.

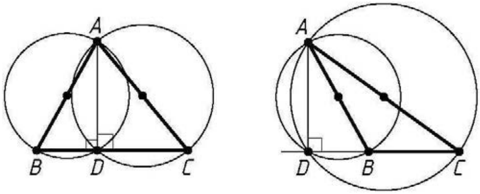
б) Найдите угол BAC, если $\angle ACB = 30^\circ$, а $DB : DC = 1 : 3$.

Ответ: 90°.

Решение. а) Точка D лежит на окружности с диаметром AB, поэтому $\angle ADB = 90^\circ$. Аналогично $\angle ADC = 90^\circ$.

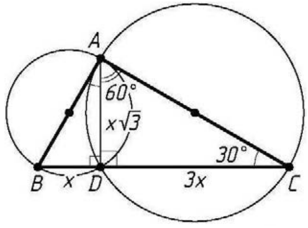
Если точки B и C лежат по разные стороны от прямой AD (см. рисунок слева), то $\angle ADB + \angle ADC = 180^\circ$. Следовательно, точка D лежит на прямой BC.

Если же точки B и C лежат по одну сторону от прямой AD (см. рисунок справа), то $\angle ADB = \angle ADC$. Следовательно, и в этом случае точка D лежит на прямой BC.



б) Положим $BD = x$, $CD = 3x$. Из прямоугольного треугольника ADC находим, что

$$AD = CD\,\mathrm{tg}\,30^\circ = 3x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = x\sqrt{3}.$$



Из прямоугольного треугольника ABD находим, что

$$\mathrm{tg}\,\angle BAD = \frac{BD}{AD} = \frac{x}{x\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

значит, $\angle BAD = 30^\circ$. Следовательно,

$$\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ.$$

10.15.1. Окружность с центром O вписана в угол, равный 60°. Окружность большего радиуса с центром O_1 также вписана в этот угол и проходит через точку O.

а) Докажите, что радиус второй окружности вдвое больше радиуса первой.

б) Найдите длину общей хорды этих окружностей, если радиус первой окружности равен $2\sqrt{15}$.

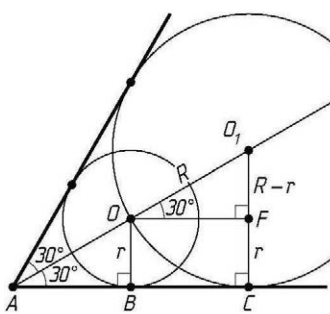
Ответ: 15.

Решение. а) Пусть окружность с центром O радиуса r касается одной из сторон угла с вершиной A в точке B, а окружность с центром O_1 радиуса $R > r$ касается той же стороны в точке C.

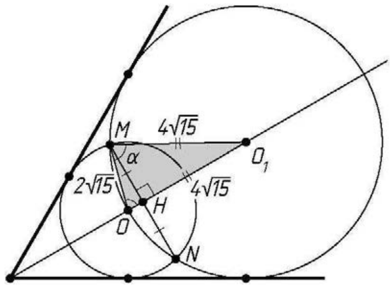
Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому $\angle OAB = 30^\circ$. Пусть F — проекция точки O на O_1C. Тогда

$$OF \parallel AC, \quad \angle FOO_1 = \angle OAB = 30^\circ, \quad FO_1 = O_1C - FC = O_1C - OB = R - r.$$

В прямоугольном треугольнике FOO_1 катет FO_1 лежит против угла в 30°, значит, $OO_1 = 2FO_1$, или $R = 2(R - r)$. Следовательно, $R = 2r$.



б) Пусть окружности пересекаются в точках M и N. Тогда общая хорда MN окружностей перпендикулярна их линии центров OO_1 и делится ею пополам.



Отрезок MH — высота равнобедренного треугольника OMO_1 со сторонами

$$OM = r = 2\sqrt{15}, \quad O_1M = 2r = 4\sqrt{15}, \quad OO_1 = 2r = 4\sqrt{15}.$$

Обозначим $\angle MOO_1 = \angle OMO_1 = \alpha$. Тогда

$$\cos\alpha = \frac{MO}{2OO_1} = \frac{r}{4r} = \frac{1}{4}, \quad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

поэтому

$$MH = OM\sin\alpha = 2\sqrt{15}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{15}{2},$$

Следовательно, $MN = 2MH = 15$.

10.16.1. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через точку P, второй раз пересекает первую окружность в точке A, а вторую — в точке D. Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD, второй раз пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C.

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

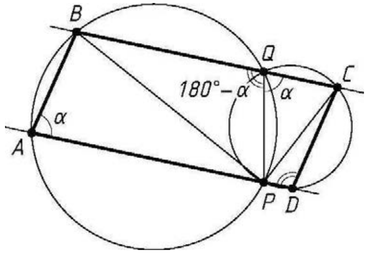
б) Найдите отношение $BP : PC$, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.

Ответ: $2:1$.

Решение. а) Обозначим $\angle BAP = \alpha$. Четырёхугольники $ABQP$ и $CDPQ$ вписанные, поэтому

$$\angle BQP = 180^\circ - \alpha, \quad \angle PQC = 180^\circ - \angle BQP = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha,$$
$$\angle ADC = \angle PDC = 180^\circ - \angle PQC = 180^\circ - \alpha.$$

Значит, $AB \parallel CD$. Противоположные стороны четырёхугольника $ABCD$ попарно параллельны, следовательно, это параллелограмм.



б) Пусть R и r — радиусы первой и второй окружностей соответственно, причём $R=2r$. По теореме синусов

$$BP = 2R\sin\angle BAP = 4r\sin\alpha, \quad CP = 2r\sin\angle PQC = 2r\sin\alpha.$$

Следовательно, $\frac{BP}{PC}=\frac{4r\sin\alpha}{2r\sin\alpha}=2$.

10.17.1. Окружности с центрами O_1 и O_2 разных радиусов пересекаются в точках A и B. Хорда AC большей окружности пересекает меньшую окружность в точке M и делится этой точкой пополам.

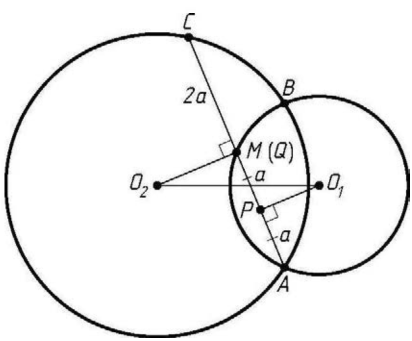
а) Докажите, что проекция отрезка O_1O_2 на прямую AC в четыре раза меньше AC.

б) Найдите O_1O_2, если радиусы окружностей равны 5 и 17, а $AC = 16$.

Ответ: $2\sqrt{85}$.

Решение. а) Пусть $O_1A<O_2A$, O_1P и O_2Q — перпендикуляры, опущенные из центров окружностей на прямую AC. Тогда PQ — проекция отрезка O_1O_2 эту прямую. Радиус, перпендикулярный хорде, делит её пополам, поэтому P — середина отрезка AM, а Q — середина AC. Значит, точка Q совпадает с M.

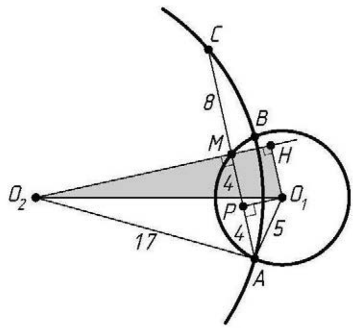
Обозначим $AP=PM=a$. Тогда $MC=AM=2a$, а $AC=2MC=4a$. Следовательно, $PM=\frac{1}{4}AC$.



б) В прямоугольных треугольниках AO_2M и AO_1P известно, что

$$O_2A = 17, \quad AM = \frac{1}{2}AC = 8,$$

$$O_1A = 5, \quad AP = PM = \frac{1}{4}AC = 4.$$



По теореме Пифагора

$$O_2M = \sqrt{O_2A^2 - AM^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15,$$

$$O_1P = \sqrt{O_1A^2 - AP^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Опустим перпендикуляр O_1H на прямую O_2M. Тогда $HMPO_1$ — прямоугольник, поэтому

$$O_1H = MP = 4, \quad MH = O_1P = 3, \quad O_2H = O_2M + MH = 15 + 3 = 18.$$

Из прямоугольного треугольника O_1HO_2 находим, что

$$O_1O_2 = \sqrt{O_1H^2 + O_2H^2} = \sqrt{4^2 + 18^2} = 2\sqrt{85}.$$

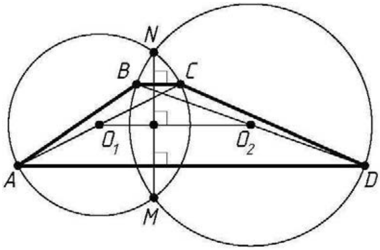
10.18.1. На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности.

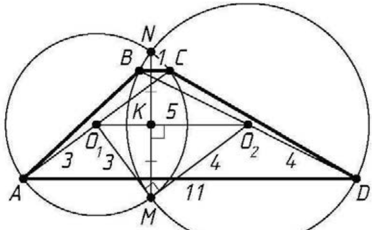
а) Докажите, что их общая хорда перпендикулярна основаниям трапеции.

б) Найдите длину этой хорды, если основания трапеции равны 1 и 11, а диагонали — 6 и 8.

Ответ: 4,8.

Решение. а) Пусть O_1 и O_2 — середины диагоналей соответственно AC и BD трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD. Тогда O_1 и O_2 — центры окружностей с диаметрами AC и BD. Пусть M и N — точки пересечения этих окружностей. Линия центров пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде, поэтому $MN \perp O_1O_2$, а так как отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен её основаниям, то $MN \perp AD$ и $MN \perp BC$.





б) Пусть $BC = 1$, $AD = 11$, $AC = 6$, $BD = 8$. Расстояние между серединами диагоналей трапеции равно полуразности оснований (см. п. 5 приложения 2), поэтому

$$O_1O_2 = \frac{AD - BC}{2} = \frac{11 - 1}{2} = 5.$$

Линия центров пересекающихся окружностей перпендикулярна общей хорде и делит её пополам, поэтому отрезок MN вдвое больше высоты MK треугольника O_1MO_2 со сторонами $O_1M = \frac{1}{2}AC = 3$, $O_2M = \frac{1}{2}BD = 4$ и $O_1O_2 = 5$. Этот треугольник прямоугольный с прямым углом при вершине M. Значит,

$$MK = \frac{O_1M \cdot O_2M}{O_1O_2} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

Следовательно, $MN = 2MK = \frac{24}{5} = 4{,}8$.

10.19.1. Две равные окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках M и N. Лучи O_1M и O_1N вторично пересекают окружность с центром O_2 в точках A и B соответственно, причём M — середина O_1A.

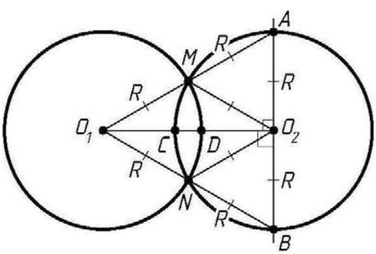
а) Докажите, что точки A, B и O_2 лежат на одной прямой.

б) Окружности пересекают отрезок O_1O_2 в точках C и D. Найдите отношение отрезка CD к радиусу окружностей.

Ответ: $(2 - \sqrt{3}) : 1$.

Решение. а) Поскольку каждая из окружностей симметрична относительно прямой O_1O_2, точка N — середина O_1B.

Пусть R — радиус окружностей. В треугольнике AO_1O_2 известно, что $AM = O_1M = O_2M = R$, т. е. медиана O_2M равна половине стороны O_1A. Значит, $\angle AO_2O_1 = 90°$. Аналогично $\angle BO_2O_1 = 90°$. Следовательно, точки A, B и O_2 лежат на одной прямой.



б) Треугольник O_1AB равносторонний, так как $AO_2 = \frac{1}{2}AO_1$ и

$$\angle AO_1B = 2\angle AO_1O_2 = 2 \cdot 30° = 60°.$$

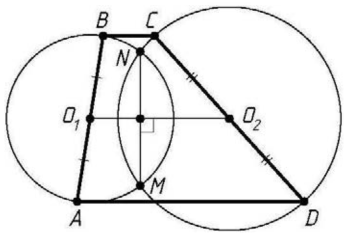
Поэтому $O_1O_2 = \frac{O_1A\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$. Предположим, что точка C лежит между O_1 и D. Тогда $O_1O_2 = O_1D + O_2C - CD$, поэтому $R\sqrt{3} = R + R - CD$. Отсюда находим, что $CD = R(2-\sqrt{3})$. Следовательно, $\frac{CD}{R} = 2-\sqrt{3}$.

10.20.1. Дана трапеция с основаниями AD и BC. Окружности, построенные на боковых сторонах AB и CD как на диаметрах, пересекаются в точках M и N.

а) Докажите, что $MN \perp AD$.

б) Найдите MN, если боковые стороны трапеции равны 12 и 16, а сумма проекций диагоналей на большее основание равна 20.

Ответ: 9,6.



Решение. а) Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей с диаметрами AB и CD. Тогда O_1O_2 — средняя линия трапеции, поэтому $O_1O_2 \parallel AD$. Линия центров пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде, поэтому $MN \perp O_1O_2$. Следовательно, $MN \perp AD$.

б) Пусть P и Q — проекции вершин C и B на большее основание AD трапеции. Тогда

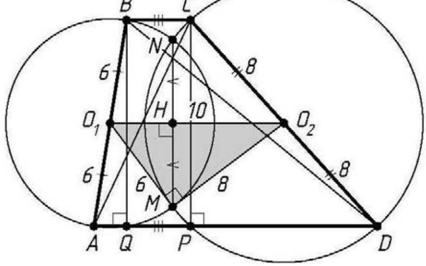
$$AP + DQ = 20, \quad PQ = BC, \quad AD = AP + DQ - PQ = AP + DQ - BC,$$

поэтому $AD + BC = AP + DQ = 20$. Значит, $O_1O_2 = \frac{AD+BC}{2} = 10$.

Пусть $AB = 12$ и $CD = 16$. В треугольнике O_1MO_2 известно, что

$$O_1O_2 = 10, \quad O_1M = \frac{1}{2}AB = 6, \quad O_2M = \frac{1}{2}CD = 8.$$

Этот треугольник прямоугольный с прямым углом при вершине M. Общая хорда пересекающихся окружностей перпендикулярна линии центров и делится ею пополам, поэтому отрезок MN вдвое больше вы-



соты MH прямоугольного треугольника O_1MO_2, проведённой из вершины прямого угла. Следовательно,

$$MN = 2MH = 2\cdot\frac{O_1M\cdot O_2M}{O_1O_2} = 2\cdot\frac{6\cdot 8}{10} = 9{,}6.$$

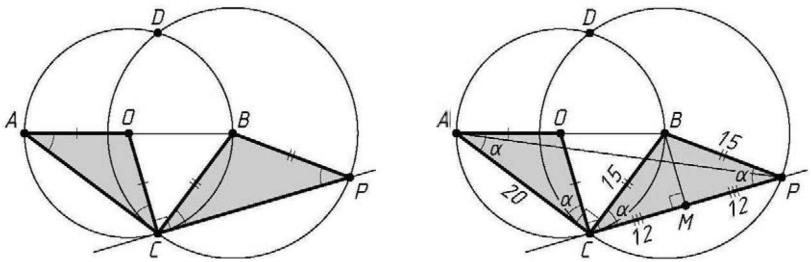
10.21.1. Отрезок AB — диаметр окружности с центром O. Вторая окружность с центром в точке B пересекается с первой окружностью в точках C и D. Касательная, проведённая в точке C к первой окружности, вторично пересекает вторую окружность в точке P.

а) Докажите, что треугольники AOC и CBP подобны.

б) Найдите AP, если известно, что $BC=15$ и $PC=24$.

Ответ: $4\sqrt{97}$.

Решение. а) Треугольники AOC и BCP равнобедренные. Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что $\angle BPC=\angle BCP=\angle CAB=\angle OAC$. Следовательно, треугольники AOC и CBP подобны по двум углам.



б) Пусть M — проекция точки B на хорду CP второй окружности. Тогда M — середина CP. Обозначим $\angle BAC=\angle BCM=\alpha$. Тогда $\angle ACP=\angle ACB+\angle BCP=90^\circ+\alpha$. Из прямоугольного треугольника BMC находим, что $\cos\alpha=\frac{CM}{BC}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$. Тогда $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$. Из прямоугольного треугольника ABC находим, что $AC=BC\operatorname{ctg}\alpha=15\cdot\frac{4}{3}=20$. По теореме косинусов

$$AP=\sqrt{AC^2+CP^2-2AC\cdot CP\cos(90^\circ+\alpha)}=\sqrt{AC^2+CP^2+2AC\cdot CP\sin\alpha}=$$
$$=\sqrt{20^2+24^2+2\cdot 20\cdot 24\cdot\frac{3}{5}}=4\sqrt{97}.$$

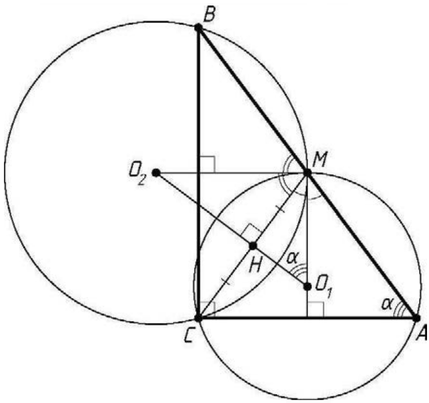
10.22.1. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Около треугольников ACM и BCM описаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно.

а) Докажите, что треугольник O_1MO_2 прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами окружностей, если $AC=72$, $BC=96$.

Ответ: 62,5.

Решение. а) Медиана CM прямоугольного треугольника ABC равна половине гипотенузы AB, поэтому треугольники AMC и BMC равнобедренные с основаниями AC и BC. Центры их описанных окружностей лежат на серединных перпендикулярах: O_1 — на серединном перпендикуляре к AC, а значит, на биссектрисе угла AMC, O_2 — на серединном перпендикуляре к BC, а значит, на биссектрисе угла BMC. Биссектрисы смежных углов перпендикулярны, следовательно, $\angle O_1MO_2 = 90°$, т. е. треугольник O_1MO_2 прямоугольный.



б) По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{72^2 + 96^2} = \sqrt{12^2 \cdot 6^2 + 12^2 \cdot 8^2} = 12\sqrt{36 + 64} = 120.$$

Поэтому $CM = \frac{1}{2}AB = 60$.

Пусть H — середина общей хорды MC данных окружностей. Линия центров пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит её пополам, значит, $MH = \frac{1}{2}CM = 30$ и отрезок MH — высота прямоугольного треугольника O_1MO_2, проведённая из вершины прямого угла.

Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{96}{72} = \frac{4}{3}$. Стороны острых углов MO_1O_2 и MCA соответственно перпендикулярны, поэтому

$$\angle HMO_2 = \angle MO_1O_2 = \angle MCA = \angle BAC = \alpha.$$

Из прямоугольных треугольников MHO_1 и MHO_2 находим, что

$$O_1H = MH \operatorname{ctg}\alpha = 30 \cdot \frac{3}{4} = 22{,}5, \quad O_2H = MH \operatorname{tg}\alpha = 30 \cdot \frac{4}{3} = 40.$$

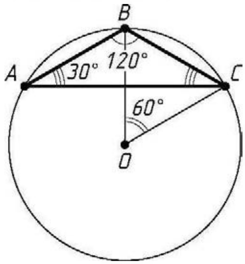
Следовательно,

$$O_1O_2 = O_1H + O_2H = 22{,}5 + 40 = 62{,}5.$$

§ 11. Окружности, связанные с треугольником, четырёхугольником

Подготовительные задачи

11.1. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 2, угол при вершине равен 120°. Найдите диаметр описанной окружности.



Ответ: 4.

Решение. Боковая сторона BC равнобедренного треугольника ABC видна из центра O описанной окружности под углом 60°, так как на дугу BC опирается вписанный угол CAB, равный 30°. Поэтому треугольник COB равносторонний. Следовательно,

$$R = OC = BC = 2.$$

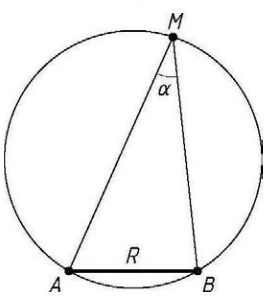
11.2. Под каким углом видна из точек окружности хорда, равная радиусу?

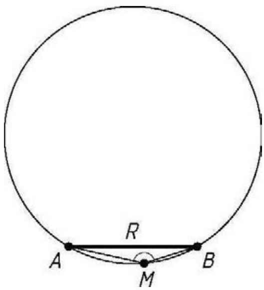
Ответ: 30° или 150°.

Решение. Пусть AB — хорда окружности радиуса R, M — произвольная точка, лежащая на окружности и отличная от точек A и B, $\angle AMB = \alpha$. По теореме синусов

$$\sin\alpha = \frac{AB}{2R} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\alpha = 30^\circ$ (в этом случае точка M лежит на большей дуге AB, см. рисунок слева) или $\alpha = 150^\circ$ (в этом случае точка M лежит на меньшей дуге AB, см. рисунок справа).

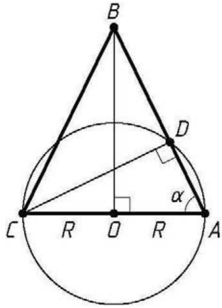




11.3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена высота CD. Угол BAC равен α. Радиус окружности, проходящей через точки A, C и D, равен R. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: $R^2 \operatorname{tg}\alpha$.

Решение. Из точки D отрезок AC виден под прямым углом, значит, эта точка лежит на окружности с диаметром AC, а так как через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная окружность, то окружность с диаметром AC — это окружность, о которой говорится в условии задачи. Пусть O — её центр. Тогда O — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC, поэтому BO — высота данного треугольника. Из прямоугольного треугольника OAB находим, что $BO = OA \operatorname{tg}\angle OAB = R \operatorname{tg}\alpha$. Следовательно,

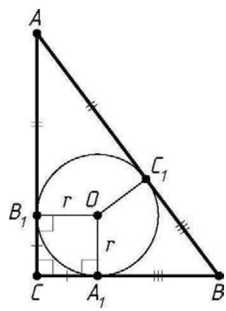


$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R \operatorname{tg}\alpha = R^2 \operatorname{tg}\alpha.$$

11.4. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b, а гипотенуза равна c. Найдите радиус вписанной окружности.

Ответ: $\frac{a+b-c}{2}$.

Решение. Обозначим вершины треугольника, противолежащие сторонам a, b и c, через A, B и C соответственно, а точки касания с этими сторонами — соответственно A_1, B_1 и C_1.



Если O — центр данной окружности, то OA_1CB_1 — квадрат. Поэтому

$$CA_1 = r, \quad BC_1 = BA_1 = a - r, \quad AC_1 = AB_1 = b - r,$$

$$c = AB = AC_1 + C_1B = a + b - 2r.$$

Следовательно,

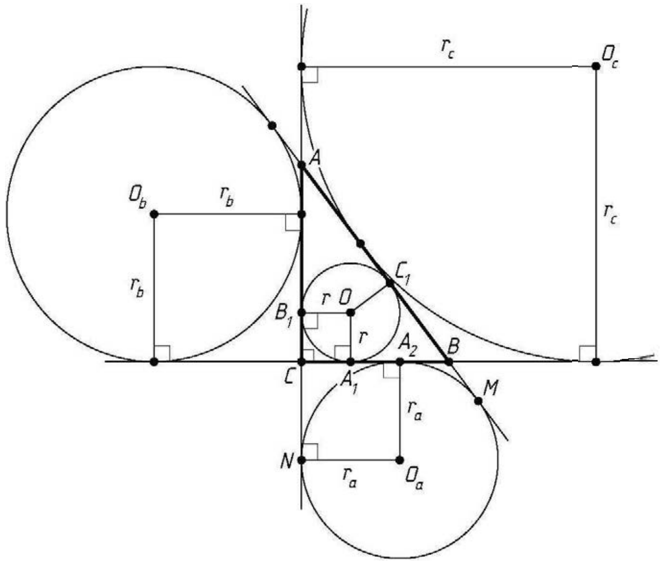
$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

11.5. Дан треугольник со сторонами 3, 4, 5. Найдите радиусы его описанной, вписанной и вневписанных окружностей.

Ответ: $\frac{5}{2}$; 1; 2; 3; 6.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, в котором $AB = 5$, $BC = 3$, $AC = 4$. Поскольку $AB^2 = 5^2 = 4^2 + 3^2 = AC^2 + BC^2$, этот треугольник прямоугольный, причём AB — его гипотенуза. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы, т. е. $\frac{5}{2}$.

Если A_1, B_1 и C_1 — точки касания окружности, вписанной в треугольник, со сторонами BC, AC и AB соответственно, а r — радиус



вписанной окружности с центром O, то четырёхугольник OA_1CB_1 — квадрат со стороной r, поэтому

$$AC_1 = AB_1 = AC - CB_1 = AC - r, \quad BC_1 = BA_1 = BC - CA_1 = BC - r.$$

Тогда

$$AB = AC_1 + BC_1 = (AC - r) + (BC - r) = AC + BC - 2r.$$

Следовательно,

$$r = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{4+3-5}{2} = 1.$$

Пусть $p = \frac{3+4+5}{2} = 6$ — полупериметр треугольника ABC, r_a — радиус окружности с центром O_a, касающейся катета BC в точке A_2, а продолжений гипотенузы AB и катета AC — в точках M и N соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} 2p &= AC + BC + AB = AC + (CA_2 + A_2B) + AB = \\ &= AC + (CN + BM) + AB = (AC + CN) + (AB + BM) = AN + AM, \end{aligned}$$

а так как $AM = AN$, то $AN = p$. Четырёхугольник O_aNCA_2 — квадрат со стороной r_a, поэтому

$$r_a = O_aA_2 = CN = AN - AC = p - AC = 6 - 4 = 2.$$

Если r_b и r_c — радиусы вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся катета AC и гипотенузы AB, то аналогично найдём, что

$$r_b = p - BC = 6 - 3 = 3, \quad r_c = p = 6.$$

11.6. Найдите радиусы описанной, вписанной и вневписанных окружностей треугольника со сторонами 13, 13, 10.

Ответ: $\frac{169}{24}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{15}{2}$, 12, 12.

Решение. Пусть стороны AB, AC и BC треугольника ABC равны 13, 13 и 10 соответственно, AH — высота треугольника, R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно, r_a, r_b и r_c — радиусы вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, AC и AB соответственно.

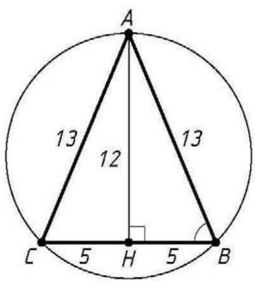
Поскольку треугольник равнобедренный, точка H — середина основания BC (см. рисунок слева). Из прямоугольного треугольника ABH находим, что

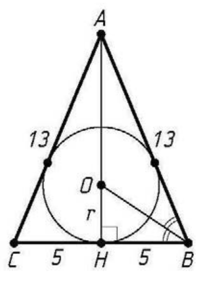
$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12,$$

$$\sin\angle ABC = \sin\angle ABH = \frac{AH}{AB} = \frac{12}{13}.$$

По теореме синусов

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{13}{2\cdot\frac{12}{13}} = \frac{169}{24}.$$





Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC (см. рисунок справа). Тогда BO — биссектриса треугольника ABH, поэтому

$$\frac{OH}{OA} = \frac{BH}{AB} = \frac{5}{13}, \quad \frac{OH}{AH} = \frac{5}{5+13} = \frac{5}{18}.$$

Следовательно,

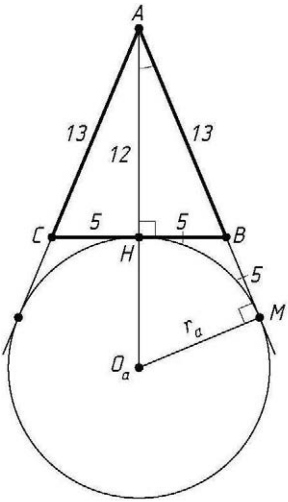
$$r = OH = \frac{5}{18}AH = \frac{5}{18}\cdot 12 = \frac{10}{3}.$$

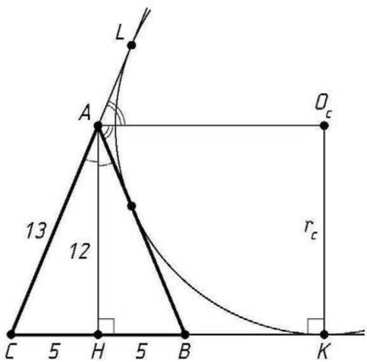
Пусть O_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжения сторон AC и AB, причём продолжения стороны AB — в точке M (см. рисунок слева). Тогда

$$BM = BH = 5, \quad AM = AB + BM = 13 + 5 = 18.$$

Из прямоугольного треугольника AMO_a находим, что

$$r_a = O_aM = AM \operatorname{tg} \angle MAH = AM \cdot \frac{BH}{AH} = 18 \cdot \frac{5}{12} = \frac{15}{2}.$$





Пусть O_c — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB и продолжений сторон BC и AC в точках K и L соответственно (см. рисунок справа). Тогда AO_c — биссектриса угла BAL, а так как AH — биссектриса смежного с ним угла BAC, то $\angle HAO_c = 90^\circ$. Четырёхугольник AO_cKH — прямоугольник ($\angle HAO_c = \angle AHK = \angle HKO_c = 90^\circ$), поэтому

$$r_c = O_cK = AH = 12.$$

Аналогично найдём, что $r_b = AH = 12$.

11.7. Найдите радиусы описанной, вписанной и вневписанных окружностей треугольника со сторонами 13, 14, 15.

Ответ: $\frac{65}{8}$, 4, 14, 12, $\frac{21}{2}$.

Решение. Пусть стороны AB, AC и BC треугольника ABC равны 13, 14 и 15 соответственно, R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно, r_a, r_b и r_c — радиусы вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, AC и AB соответственно, S — площадь треугольника ABC, p — полупериметр.

По теореме косинусов

$$\cos\angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB\cdot AC} = \frac{169+196-225}{2\cdot 13\cdot 14} = \frac{5}{13}.$$

Тогда

$$\sin\angle BAC = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13},$$

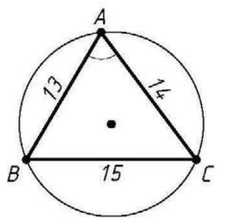
$$S = \frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC = \frac{1}{2}\cdot 13\cdot 14\cdot \frac{12}{13} = 84.$$

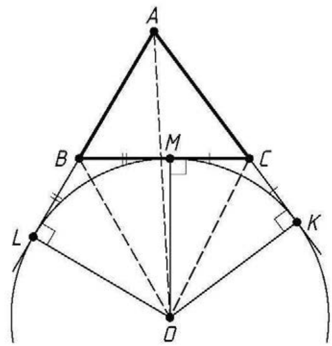
Следовательно,

$$r = \frac{S}{p} = \frac{84}{21} = 4.$$

По теореме синусов

$$R = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{15}{2\cdot\frac{12}{13}} = \frac{65}{8}.$$





Пусть O — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC в точке M и продолжения сторон AC и AB — в точках K и L соответственно (см. рисунок справа). Тогда

$$AK = AL, \quad CK = CM, \quad BL = BM,$$

$$2p = AC + BC + AB = AC + (CM + BM) + AB =$$
$$= (AC + CM) + (AB + BM) = (AC + CK) + (AB + BL) = AK + AL,$$

значит, $AK = AL = p$, поэтому

$$S = S_{\Delta AOK} + S_{\Delta AOL} - S_{KCBLO} = S_{\Delta AOK} + S_{\Delta AOL} - 2S_{BOC} =$$
$$= \frac{1}{2}AK\cdot OK + \frac{1}{2}AL\cdot OL - 2\cdot\frac{1}{2}BC\cdot OM = \frac{1}{2}pr_a + \frac{1}{2}pr_a - BC\cdot r_a = (p - BC)r_a.$$

Следовательно,

$$r_a = \frac{S}{p - BC} = \frac{84}{21 - 15} = \frac{84}{6} = 14.$$

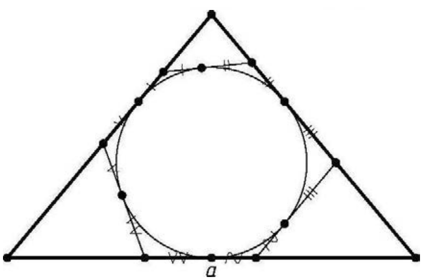
Аналогично найдём, что

$$r_b = \frac{S}{p - AC} = \frac{84}{21 - 14} = \frac{84}{7} = 12, \quad r_c = \frac{S}{p - AB} = \frac{84}{21 - 13} = \frac{84}{8} = \frac{21}{2}.$$

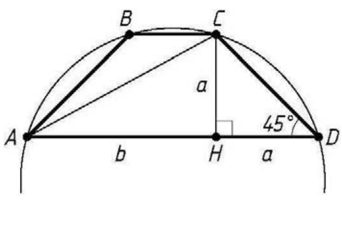
11.8. В равнобедренный треугольник с основанием, равным a, вписана окружность, и к ней проведены три касательные так, что они отсекают от данного треугольника три маленьких треугольника, сумма периметров которых равна b. Найдите боковую сторону данного треугольника.

Ответ: $\frac{b-a}{2}$.

Решение. Сумма периметров отсечённых треугольников равна периметру данного треугольника. Поэтому сумма боковых сторон равна $b - a$. Тогда каждая боковая сторона равна $\frac{b-a}{2}$.



11.9. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на большее основание равна a, средняя линия трапеции равна b, а острый угол при основании равен $45°$. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.



Ответ: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Решение. Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция с основаниями $AD > BC$, $\angle ADC = 45°$, CH — высота трапеции, R — радиус окружности, описанной около трапеции. Известно, что проекция диагонали равнобедренной трапеции на большее основание равна полусумме оснований, т. е. средней линии трапеции. Тогда

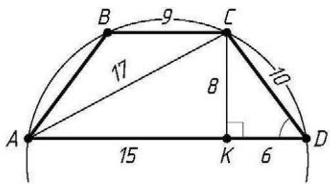
$$CH = DH = a, \quad AH = \frac{1}{2}(AD + BC) = b, \quad AC = \sqrt{CH^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Окружность, описанная около трапеции, совпадает с окружностью, описанной около треугольника ACD. По теореме синусов

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle ADC} = \frac{AC}{2\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

11.10. Основания равнобедренной трапеции равны 9 и 21, а высота равна 8. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

Ответ: $\frac{85}{8}$.



Решение. Из вершины C меньшего основания BC трапеции $ABCD$ опустим перпендикуляр CK на большее основание AD. Тогда $CK = 8$. Если $AD = 21$, $BC = 9$, то

$$KD = \frac{AD - BC}{2} = 6, \quad CD = \sqrt{CK^2 + DK^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10,$$

$$\sin\angle D = \frac{CK}{CD} = \frac{4}{5}, \quad AC = \sqrt{AK^2 + CK^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17.$$

Если R — радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$, то

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle D} = \frac{85}{8}.$$

Тренировочные задачи

11.11. Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 2$ и $AD = 10$ такова, что в неё можно вписать окружность и около неё можно описать окружность. Определите, где находится центр описанной окружности, т. е. расположен он внутри трапеции, или вне её, или же на одной из сторон трапеции $ABCD$. Найдите также отношение радиусов описанной и вписанной окружностей.

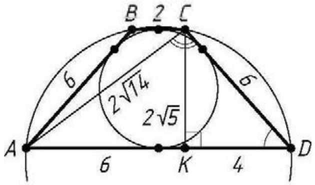
Ответ: вне; $\frac{3\sqrt{14}}{5}$.

Решение. Пусть R и r — радиусы вписанной и описанной окружностей, K — основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на сторону AD. Поскольку трапеция вписанная, то она равнобедренная.

Тогда $AK = \frac{AD+BC}{2} = 6$, $KD = \frac{AD+BC}{2} = 4$, а так как трапеция описанная, то $2 \cdot CD = BC + AD$, поэтому $CD = 6$. Отсюда находим, что

$$CK = 2\sqrt{5}, \quad AC = 2\sqrt{14}.$$

С помощью теоремы косинусов убеждаемся, что угол $\angle ACD$ тупой, поэтому центр описанной окружности лежит вне трапеции. Кроме того,



$$\sin\angle D = \frac{CK}{CD} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

поэтому

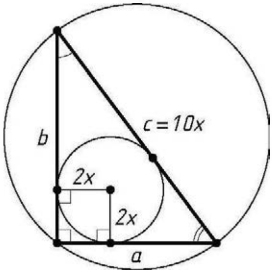
$$R = \frac{AC}{2\sin\angle D} = \frac{3\sqrt{14}}{\sqrt{5}},$$

а так как $r = \frac{1}{2}CK = \sqrt{5}$, то $\frac{R}{r} = \frac{3\sqrt{14}}{5}$.

11.12. В прямоугольном треугольнике отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности равно $\frac{2}{5}$. Найдите острые углы треугольника.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, $\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}$.

Решение. Пусть радиус вписанной окружности прямоугольного треугольника с катетами a, b и гипотенузой c равен $2x$, тогда радиус описанной окружности равен $5x$ и $c = 10x$. Поэтому $a^2 + b^2 = 100x^2$.



Поскольку радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен $\frac{a+b-c}{2}$ (задача 11.4), получим уравнение $a + b = 14x$. Из системы

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 100x^2, \\ a + b = 14x \end{cases}$$

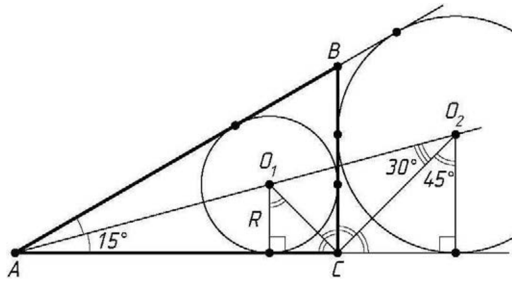
находим, что

$$a = 8x, \quad b = 6x \quad \text{или} \quad a = 6x, \quad b = 8x.$$

Следовательно, тангенсы острых углов треугольника равны $\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{3}$.

11.13. В прямоугольный треугольник ABC с углом A, равным 30°, вписана окружность радиуса R. Вторая окружность, лежащая вне треугольника, касается стороны BC и продолжений двух других сторон. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

Ответ: $2R\sqrt{2}$.



Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей (R — радиус первой), C — вершина прямого угла. Тогда треугольник O_1CO_2 прямоугольный. Поскольку точки O_1 и O_2 расположены на биссектрисе угла A, то

$$\angle O_1O_2C = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ.$$

Следовательно,

$$O_1O_2 = 2O_1C = 2R\sqrt{2}.$$

11.14. В треугольнике PQR угол QRP равен 60°. Найдите расстояние между точками касания со стороной QR окружности радиуса 2, вписанной в треугольник, и окружности радиуса 3, касающейся продолжений сторон PQ и PR.

Ответ: $\sqrt{3}$.

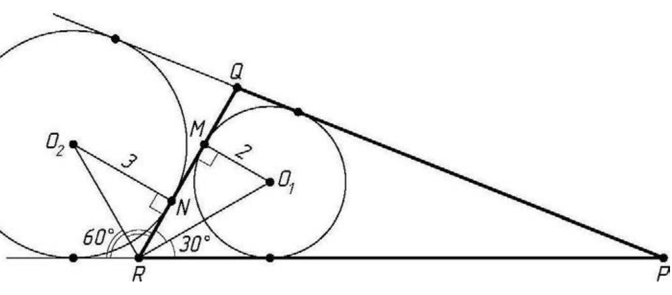
Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиусов 2 и 3 соответственно, M и N — их точки касания со стороной RQ. Тогда

$$RM = O_1M \operatorname{ctg} \angle MRO_1 = 2 \operatorname{ctg} 30^\circ = 2\sqrt{3},$$

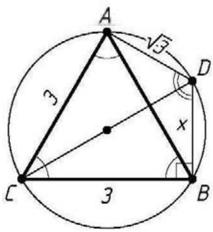
$$RN = O_2N \operatorname{ctg} \angle NRO_2 = 3 \operatorname{ctg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Поэтому

$$MN = RM - RN = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}.$$



11.15. Равносторонний треугольник ABC со стороной 3 вписан в окружность. Точка D лежит на окружности, причём хорда AD равна $\sqrt{3}$. Найдите хорды BD и CD.



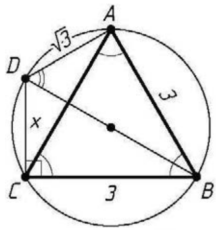
Ответ: $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ или $2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$.

Решение. Пусть точка D лежит на меньшей дуге AB. Тогда четырёхугольник $ADBC$ вписанный, поэтому

$$\angle ADB = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Обозначим $BD = x$. По теореме косинусов

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos 120^\circ,$$



или $9 = 3 + x^2 + x\sqrt{3}$, откуда находим, что $BD = x = \sqrt{3} = AD$, а так как $CA = CB$, то прямая CD — серединный перпендикуляр к хорде AB, значит, CD — диаметр окружности. Следовательно, $CD = 2\sqrt{3}$.

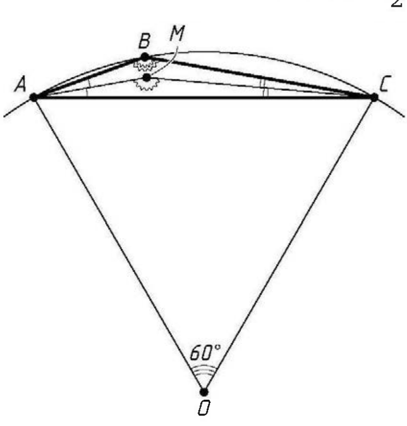
Если же точка D лежит на меньшей дуге AC, то аналогично найдём, что $BD = 2\sqrt{3}$ и $CD = \sqrt{3}$.

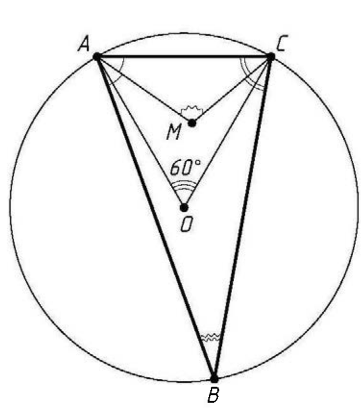
11.16. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, $\angle AOC = 60^\circ$. Найдите угол AMC, где M — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

Ответ: 165° или 105°.

Решение. Если точки O и B лежат по разные стороны от прямой AC (см. рисунок слева), то градусная мера дуги AC, не содержащей точки B, равна $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$, поэтому

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 300^\circ = 150^\circ.$$





Сумма углов при вершинах A и C треугольника ABC равна $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$, а так как AM и CM — биссектрисы треугольника ABC, то сумма углов при вершинах A и C треугольника AMC равна 15°. Следовательно,

$$\angle AMC = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ.$$

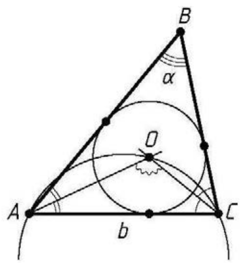
Если же точки O и B лежат по одну сторону от прямой AC (см. рисунок справа), то аналогично получим, что $\angle AMC = 105^\circ$.

11.17. В треугольнике ABC известно, что $AC = b$, $\angle ABC = \alpha$. Найдите радиус окружности, проходящей через центр вписанного в треугольник ABC круга и вершины A и C.

Ответ: $\dfrac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Решение. Пусть O — центр вписанного в треугольник ABC круга, R — искомый радиус. Имеем

$$\angle AOC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC - \frac{1}{2}\angle BCA = \\ = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) = \\ = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$



Тогда

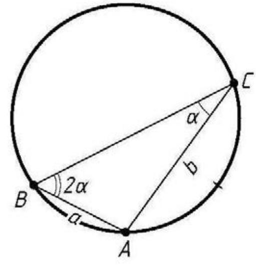
$$R = \frac{AC}{2\sin\angle AOC} = \frac{b}{2\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

11.18. В окружности проведены две хорды $AB = a$ и $AC = b$. Длина дуги AC, не содержащей точки B, вдвое больше длины дуги AB, не содержащей точки C. Найдите радиус окружности.

Ответ: $\dfrac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$.

Решение. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, поэтому угол B треугольника ABC вдвое больше угла C. Пусть $\angle ACB = \alpha$. Тогда $\angle ABC = 2\alpha$. По теореме синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin 2\alpha},$$



откуда $\cos\alpha = \dfrac{b}{2a}$. Тогда

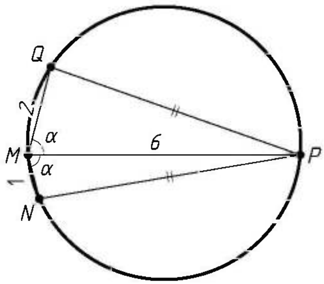
$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2} = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2a}.$$

Если R — радиус окружности, то по теореме синусов

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}.$$

11.19. Из точки M на окружности проведены три хорды: $MN = 1$, $MP = 6$, $MQ = 2$. При этом углы NMP и PMQ равны. Найдите радиус окружности.

Ответ: $2\sqrt{\frac{34}{15}}$.



Решение. Обозначим $\angle NMP = \angle PMQ = \alpha$. Выразим равные отрезки NP и PQ по теореме косинусов из треугольников NMP и PMQ соответственно:

$$NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2NM \cdot MP\cos\alpha,$$

$$PQ^2 = MP^2 + MQ^2 - 2MP \cdot MQ\cos\alpha.$$

Приравняв правые части полученных равенств, получим уравнение, из которого найдём, что $\cos\alpha = \frac{1}{4}$. Тогда

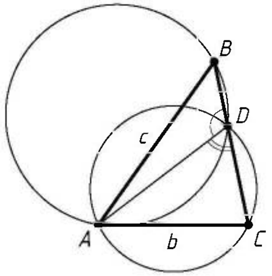
$$NP = \sqrt{1 + 36 - 2\cdot 1\cdot 6\cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{34}, \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Если R — искомый радиус, то

$$R = \frac{NP}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{34}}{\frac{\sqrt{15}}{2}} = 2\sqrt{\frac{34}{15}}.$$

11.20. Через вершины A и B треугольника ABC проходит окружность радиуса r, пересекающая сторону BC в точке D. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и C, если $AB = c$ и $AC = b$.

Ответ: $\frac{br}{c}$.



Решение. Поскольку

$$\angle ADC + \angle ADB = 180^\circ,$$

то

$$\sin\angle ADC = \sin\angle ADB = \frac{c}{2r}.$$

Если R — радиус окружности, проходящей через точки A, C и D, то

$$R = \frac{b}{2\sin\angle ADC} = \frac{b}{2\cdot\frac{c}{2r}} = \frac{br}{c}.$$

11.21. Центр описанной окружности треугольника симметричен его центру вписанной окружности относительно одной из сторон. Найдите углы треугольника.

Ответ: 36°, 36°, 108°.

Решение. Пусть O и Q — соответственно центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC, причём точки O и Q симметричны относительно прямой BC. Обозначим $\angle OBC = \angle QBC = \alpha$. Треугольник BOC равнобедренный, поэтому

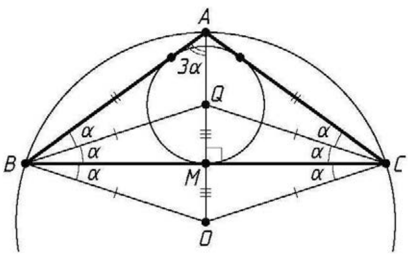
$$\angle QCB = \angle OCB = \angle OBC = \alpha,$$

а так как BQ — биссектриса угла ABC, то $\angle ABC = 2\alpha$. Аналогично $\angle ACB = 2\alpha$. Значит, треугольник ABC равнобедренный, его биссектриса AM является высотой, а точки Q и M лежат на отрезке OA. Поскольку треугольник AOB также равнобедренный ($OA = OB$ как радиусы одной окружности), то

$$\angle OBA = \angle OAB, \quad \text{или} \quad 3\alpha = 90^\circ - 2\alpha.$$

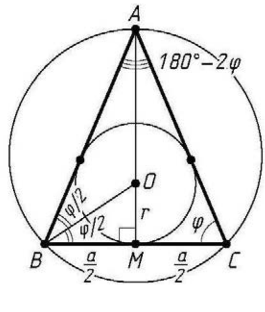
Отсюда находим, что $\alpha = 18^\circ$. Следовательно,

$$\angle ACB = \angle ABC = 2\alpha = 36^\circ, \quad \angle CAB = 6\alpha = 108^\circ.$$



11.22. Угол при основании равнобедренного треугольника равен φ. Найдите отношение радиуса вписанной в данный треугольник окружности к радиусу описанной окружности.

Ответ: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sin 2\varphi$.



Решение. Обозначим основание BC равнобедренного треугольника ABC через a, радиусы вписанной и описанной окружностей — r и R соответственно, центр вписанной окружности — O, середину BC — M. Тогда

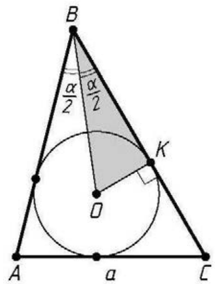
$$R = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{a}{2\sin(180^\circ - 2\varphi)} = \frac{a}{2\sin 2\varphi},$$

$$r = OM = BM \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle B\right) = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{r}{R} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \sin 2\varphi.$$

11.23. В треугольнике ABC с периметром $2p$ сторона AC равна a, острый угол ABC равен α. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается стороны BC в точке K. Найдите площадь треугольника BOK.



Ответ: $\frac{1}{2}(p-a)^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Решение. Поскольку

$$BK = p - AC = p - a, \quad OK = BK \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = (p-a) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

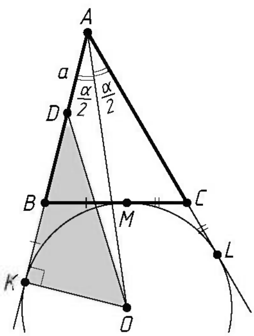
то

$$S_{\Delta BOK} = \frac{1}{2} BK \cdot OK = \frac{1}{2}(p-a)^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

11.24. В треугольнике ABC с периметром $2p$ острый угол BAC равен α. Окружность с центром в точке O касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC в точках K и L соответственно. Точка D лежит внутри отрезка AK, $AD = a$. Найдите площадь треугольника DOK.

Ответ: $\frac{1}{2} p(p-a) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Решение. Пусть M — точка касания данной окружности со стороной BC. Тогда



$$KB = BM, \quad LC = CM,$$
$$2p = AB + BC + AC = AK + AL,$$

а так как $AK = AL$, то $AK = p$. Поэтому

$$OK = AK \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = p \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно,

$$S_{DOK} = \frac{1}{2} DK \cdot OK = \frac{1}{2} p(p-a) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

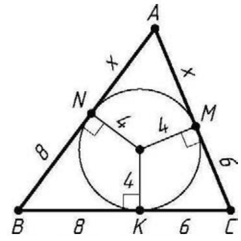
11.25. В треугольник вписана окружность радиуса 4. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на части, равные 6 и 8. Найдите две другие стороны треугольника.

Ответ: 13 и 15.

Решение. Пусть K, M, N — точки касания вписанной окружности со сторонами соответственно BC, AC и AB треугольника ABC; $BK=8$, $KC=6$. Тогда $CM=KC=6$, $BN=BK=8$.

Обозначим $AM = AN = x$. Поскольку площадь треугольника равна произведению полупериметра треугольника на радиус вписанной окружности, то

$$S_{\triangle ABC} = (8+6+x)4 = (14+x)4.$$



С другой стороны, по формуле Герона

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{(14+x)\cdot 6\cdot 8\cdot x}.$$

Решив уравнение

$$4(14+x) = \sqrt{(14+x)\cdot 6\cdot 8\cdot x},$$

найдём, что $x=7$. Следовательно,

$$AC = x+6 = 13, \quad AB = x+8 = 15.$$

11.26. Прямоугольный треугольник ABC разделён высотой CD, проведённой к гипотенузе, на два треугольника: BCD и ACD. Радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники, равны 4 и 3 соответственно. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Ответ: 5.

Решение. Пусть r — искомый радиус, r_1 и r_2 — радиусы данных окружностей. Из подобия треугольников DBC и CBA находим, что

$$\frac{r_1}{r} = \frac{BC}{AB},$$

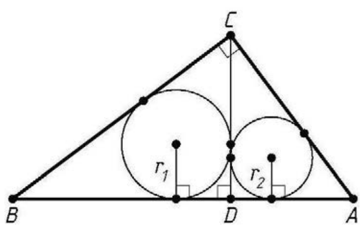
а из подобия треугольников DCA и CBA — что

$$\frac{r_2}{r} = \frac{AC}{AB}.$$

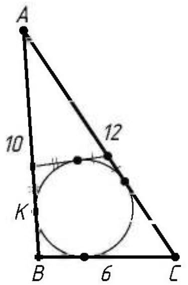
Возведём обе части этих равенств в квадрат и сложим почленно полученные равенства. Тогда

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 = 16+9 = 25.$$

Следовательно, $r=5$.



11.27. К окружности, вписанной в треугольник со сторонами 6, 10 и 12, проведена касательная, пересекающая две бо́льшие стороны. Найдите периметр отсечённого треугольника.



Ответ: 16.

Решение. Пусть K — точка касания окружности, вписанной в треугольник ABC, со стороной AB ($AB=10$, $AC=12$, $BC=6$).

Если p — полупериметр треугольника, то

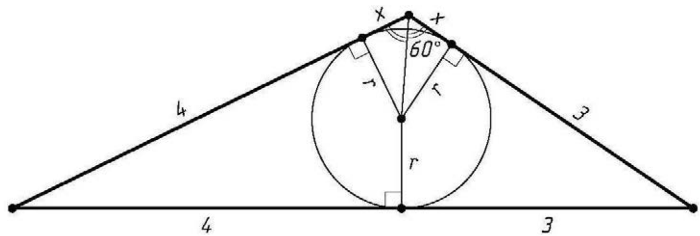
$$AK = p - BC = 14 - 6 = 8,$$

а длина отрезка AK равна полупериметру отсечённого треугольника. Следовательно, искомый периметр равен 16.

11.28. Окружность, вписанная в треугольник, точкой касания делит одну из сторон на отрезки, равные 3 и 4, а противолежащий этой стороне угол равен 120°. Найдите площадь треугольника.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Решение. Обозначим через x расстояние от вершины угла в 120° до ближайшей точки касания и применим теорему косинусов. Получим уравнение $x^2+7x-4=0$, из которого находим, что $x=\dfrac{\sqrt{65}-7}{2}$.



Пусть p — полупериметр треугольника, r — радиус вписанной окружности, S — площадь. Тогда

$$p = 3+4+\frac{\sqrt{65}-7}{2} = \frac{\sqrt{65}+7}{2}, \quad r = x\,\mathrm{tg}\,60^\circ = x\sqrt{3} = \frac{(\sqrt{65}-7)\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно,

$$S = pr = \frac{\sqrt{65}+7}{2}\cdot\frac{(\sqrt{65}-7)\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

11.29. Пусть CD — медиана треугольника ABC. Окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, касаются отрезка CD в точках M и N. Найдите MN, если $AC-BC=2$.

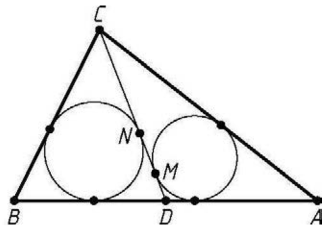
Ответ: 1.

Решение. Поскольку $AD = DB$, а

$$CM = \frac{AC + CD - AD}{2}, \quad CN = \frac{BC + CD - BD}{2},$$

то

$$MN = |CM - CN| = \\ = \left|\frac{AC + CD - AD}{2} - \frac{BC + CD - BD}{2}\right| = \\ = \frac{|AC - BC|}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$



11.30. На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка D, причём $BD - AD = 4$. Найдите расстояние между точками, в которых окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, касаются отрезка CD.

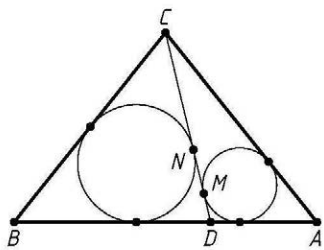
Ответ: 2.

Решение. Пусть окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, касаются отрезка CD в точках M и N соответственно. Поскольку $AC = BC$, а

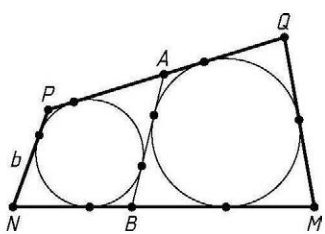
$$CM = \frac{AC + CD - AD}{2}, \quad CN = \frac{BC + CD - BD}{2},$$

то

$$MN = |CM - CN| = \\ = \left|\frac{AC + CD - AD}{2} - \frac{BC + CD - BD}{2}\right| = \\ = \frac{|BD - AD|}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$



11.31. В четырёхугольнике $MNPQ$ расположены две непересекающиеся окружности так, что одна из них касается сторон MN, NP, PQ, а другая — сторон MN, MQ, PQ. Точки B и A лежат соответственно на сторонах MN и PQ, причём отрезок AB касается обеих окружностей. Найдите длину стороны MQ, если $NP = b$ и периметр четырёхугольника $BAQM$ больше периметра четырёхугольника $ABNP$ на величину $2p$.



Ответ: $b+p$.

Решение. Четырёхугольники $ABMQ$ и $ABNP$ описанные, поэтому

$$MQ+AB=\frac{1}{2}P_1, \quad AB+NP=\frac{1}{2}P_2,$$

где P_1 и P_2 — периметры этих четырёхугольников, значит,

$$MQ-NP=\frac{1}{2}(P_1-P_2)=p.$$

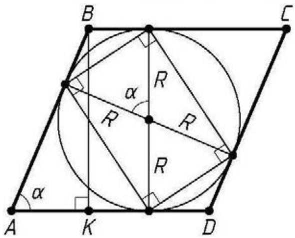
Отсюда находим, что

$$MQ=NP+p=b+p.$$

11.32. Около окружности радиуса R описан параллелограмм. Площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности и параллелограмма равна S. Найдите стороны параллелограмма.

Ответ: $\frac{4R^3}{S}$.

Решение. В данный параллелограмм $ABCD$ вписана окружность, поэтому $ABCD$ — ромб. Пусть A — его острый угол. Четырёхугольник с вершинами в точках касания — прямоугольник с диагоналями, равными $2R$. Обозначим угол между ними через α. Тогда



$$S=\frac{1}{2}2R\cdot 2R\sin\alpha=2R^2\sin\alpha,$$

откуда $\sin\alpha=\frac{S}{2R^2}$.

Пусть K — проекция точки B на сторону AD. Тогда

$$AB=\frac{BK}{\sin\angle A}=\frac{2R}{\sin\alpha}=\frac{2R}{\frac{S}{2R^2}}=\frac{4R^3}{S}.$$

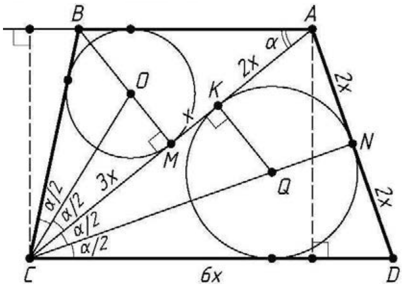
11.33. В четырёхугольнике $ABCD$ сторона AB равна стороне BC, диагональ AC равна стороне CD, а $\angle ACB=\angle ACD$. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACB и ACD, относятся как $3:4$. Найдите отношение площадей этих треугольников.

Ответ: $9:14$.

Решение. Обозначим $\angle ACB=\angle ACD=\alpha$. Прямые AB и CD параллельны, так как $\angle BAC=\angle ACB=\angle ACD$, значит, $ABCD$ — трапеция. Высоты треугольников ABC и ACD, проведённые из вершин соответственно C и A, равны, поэтому отношение площадей треугольников ABC и ACD равно отношению оснований AB и CD трапеции.

Центры O и Q окружностей, вписанных в треугольники ABC и ACD соответственно, — точки пересечения биссектрис этих треугольников, поэтому $\angle ACO=\angle ACQ$.

Пусть OM и QK — радиусы окружностей, проведённые в точки касания окружностей со стороной AC, N — середина основания AD равнобедренного треугольника ACD.



Прямоугольные треугольники CKQ и CMO подобны по двум углам, причём коэффициент подобия равен $\frac{QK}{OM} = \frac{4}{3}$, значит, $\frac{CK}{CM} = \frac{4}{3}$.

Положим $CK = 4x$, $CM = 3x$. Точка M — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC, поэтому

$$CD = AC = 2CM = 6x, \quad AK = AC - CK = 6x - 4x = 2x,$$
$$AN = AK = 2x, \quad AD = 4x.$$

По теореме косинусов

$$\cos\alpha = \frac{AC^2 + CD^2 - AD^2}{2AC \cdot CD} = \frac{36x^2 + 36x^2 - 16x^2}{2 \cdot 6x \cdot 6x} = \frac{7}{9}.$$

Из прямоугольного треугольника BMC находим, что

$$BC = \frac{CM}{\cos\alpha} = \frac{3x}{\frac{7}{9}} = \frac{27x}{7},$$

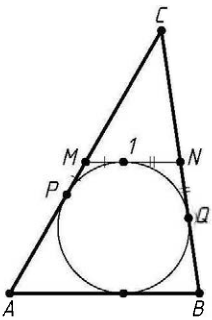
значит, $AB = BC = \frac{27x}{7}$. Следовательно,

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{AB}{CD} = \frac{\frac{27x}{7}}{6x} = \frac{9}{14}.$$

11.34. Периметр треугольника ABC равен 8. В треугольник вписана окружность, и к ней проведена касательная, параллельная стороне AB. Отрезок этой касательной, заключённый между сторонами AC и CB, равен 1. Найдите сторону AB.

Ответ: 2.

Решение. Обозначим точки пересечения касательной со сторонами AC и CB через M и N, а точки касания этих сторон с вписанной



окружностью — через P и Q. Тогда полупериметр треугольника CMN равен

$$CP = CQ = 4 - AB.$$

Из подобия треугольников CMN и CAB следует, что

$$\frac{MN}{AB} = \frac{4-AB}{4}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{AB} = \frac{4-AB}{4}$$

(отношение периметров подобных треугольников равно отношению соответствующих сторон). Из этого уравнения находим, что $AB = 2$.

11.35. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен $\sqrt{3} - 1$. Угол BAC равен 60°, а радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC, равен $\sqrt{3} + 1$. Найдите углы ABC и ACB.

Ответ: 30°, 90°.

Решение. Пусть O и O_1 — центры окружностей радиусов $\sqrt{3} - 1$ и $\sqrt{3} + 1$ соответственно, P и N — точки касания окружностей с прямой AC, M — точка пересечения биссектрисы AO_1 угла A со стороной BC. Тогда

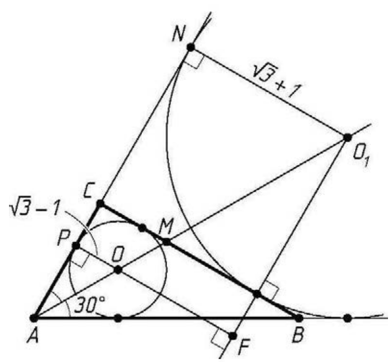
$$OO_1 = AO_1 - AO = 2O_1N - 2OP = 4.$$

Опустим перпендикуляр OF на продолжение радиуса большей окружности, проведённого в точку касания с прямой BC. Тогда

$$O_1F = \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 1 = 2\sqrt{3}, \quad \cos\angle FO_1O = \frac{O_1F}{O_1O} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно,

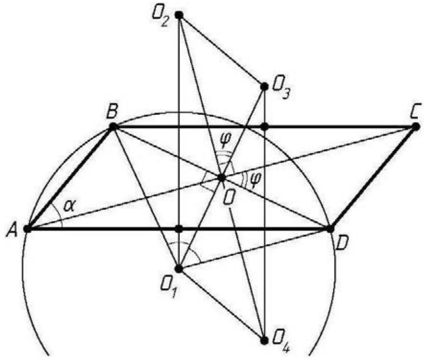
$$\angle FO_1O = 30^\circ, \quad \angle BMA = 120^\circ,$$
$$\angle ACB = \angle BMA - \angle MAC = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ, \quad \angle ABC = 30^\circ.$$



11.36. В параллелограмме $ABCD$ острый угол BAD равен α. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры окружностей, описанных около треугольников DAB, DAC, DBC, ABC соответственно. Найдите отношение площади четырёхугольника $O_1O_2O_3O_4$ к площади параллелограмма $ABCD$.

Ответ: $\operatorname{ctg}^2\alpha$.

Решение. Рассмотрим четырёхугольник, вершины которого — точки пересечения четырёх серединных перпендикуляров к сторонам данного параллелограмма. Это также параллелограмм, и его вершины — это точки O_1, O_2, O_3 и O_4. Обозначим через O общий центр этих параллелограммов.



Пусть острый угол между диагоналями параллелограмма $ABCD$ равен φ. Тогда острый угол между диагоналями параллелограмма $O_1O_2O_3O_4$ также равен φ (острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами равны).

Рассмотрим окружность с центром O_1, описанную около треугольника ABD. Центральный угол BO_1D вдвое больше вписанного угла BAD, поэтому

$$\angle BO_1O = \frac{1}{2}\angle BO_1D = \angle BAD = \alpha.$$

Из прямоугольного треугольника BO_1O находим, что $\frac{OO_1}{BO} = \operatorname{ctg}\alpha$. Аналогично находим, что $\frac{OO_2}{AO} = \operatorname{ctg}\alpha$. Следовательно,

$$\frac{S_{O_1O_2O_3O_4}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}O_1O_3\cdot O_2O_4\sin\varphi}{\frac{1}{2}BD\cdot AC\sin\varphi} =$$

$$= \frac{O_1O_3}{BD}\cdot\frac{O_2O_4}{AC} = \frac{O_1O}{BO}\cdot\frac{OO_2}{AO} = \operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha.$$

11.37. Около треугольника ABC описана окружность. Медиана AD продолжена до пересечения с этой окружностью в точке E. Известно, что $AB + AD = DE$, $\angle BAD = 60^\circ$, $AE = 6$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Решение. На продолжении отрезка EA за точку A отложим отрезок AB_1, равный AB. Тогда

$$B_1D = B_1A + AD = BA + AD = DE.$$

Следовательно, четырёхугольник B_1BEC — параллелограмм. Тогда

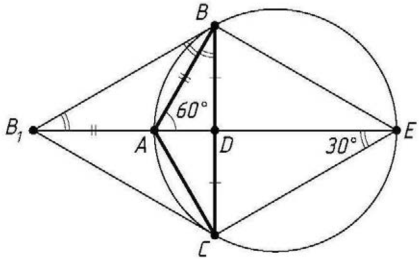
$$\angle ABC = \angle B_1EC = \angle BB_1A = 30^\circ, \quad \angle ADB = 90^\circ,$$

поэтому AE — диаметр окружности,

$$\angle ABE = 90^\circ, \quad AC = AB = \frac{1}{2}AE = 3.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin\angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \sin 120^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$



11.38. В четырёхугольник $ABCD$ можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагонали этого четырёхугольника взаимно перпендикулярны. Найдите его площадь, если радиус описанной окружности равен R и $AB = 2BC$.

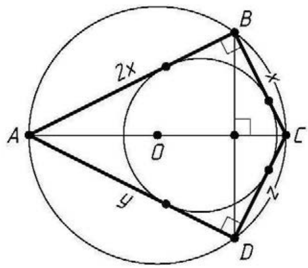
Ответ: $\frac{8}{5}R^2$.

Решение. Обозначим $BC = x$, $AB = 2x$, $AD = y$, $CD = z$. Поскольку в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны, а так как диагонали четырёхугольника перпендикулярны, то равны и суммы квадратов его противоположных сторон. Тогда

$$\begin{cases} x+y=2x+z, \\ x^2+y^2=4x^2+z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-z, \\ 3x^2=y^2-z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-z, \\ 3x^2=(y-z)(y+z) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y-z, \\ 3x^2=x(y+z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-z, \\ 3x=y+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x, \\ z=x \end{cases}$$

(так как $x \neq 0$). Поэтому $BC = DC$ и $BA = DA$, т. е. точки A и C равноудалены от концов отрезка BD. Значит, прямая AC — серединный перпендикуляр к хорде BD описанной окружности четырёхугольника $ABCD$. Следовательно, AC — диаметр этой окружности, $\angle ABC = \angle ADC = 90°$.



По теореме Пифагора

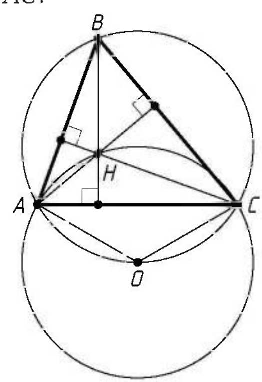
$$BC^2 + AB^2 = AC^2, \quad \text{или} \quad x^2 + 4x^2 = 4R^2,$$

откуда $x^2 = \frac{4}{5}R^2$. Следовательно,

$$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} BC \cdot AB = 2x^2 = \frac{8}{5}R^2.$$

11.39. Радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, равен 1. Известно, что на этой окружности лежит центр другой окружности, проходящей через вершины A, C и точку пересечения высот треугольника ABC. Найдите AC.

Ответ: $\sqrt{3}$.



Решение. Если H — точка пересечения высот треугольника ABC, то $\angle AHC = 180° - \angle ABC$. Тогда

$$\angle AOC = \smile AHC = 360° - 2\angle AHC = 2\angle ABC,$$

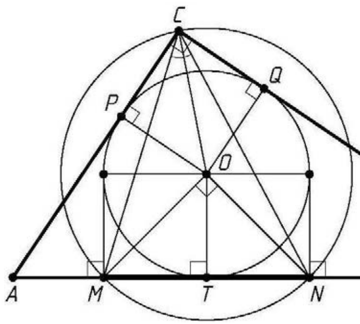
где O — центр второй окружности, а так как $\angle AOC + \angle ABC = 180°$, то $3\angle ABC = 180°$. Следовательно, $\angle ABC = 60°$. Тогда

$$AC = 2R \sin \angle ABC = 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

11.40. Под каким углом видна из вершины прямого угла прямоугольного треугольника проекция вписанной окружности на гипотенузу?

Ответ: 45°.

Решение. Первый способ. Пусть O — центр окружности радиуса r, вписанной в прямоугольный треугольник ABC; P, Q и T — точки касания этой окружности соответственно с катетами AC, BC и гипотенузой AB; MN — проекция окружности на гипотенузу.



Поскольку $CPOQ$ — квадрат со стороной r, то $OC = r\sqrt{2}$. Аналогично находим, что $OM = ON = r\sqrt{2}$. Значит, точки C, M и N лежат на окружности с центром O и радиусом $r\sqrt{2}$.

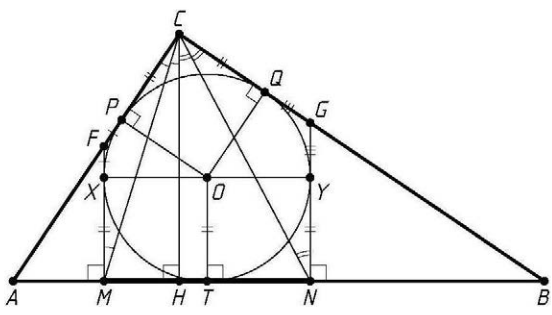
Поскольку MON — центральный угол этой окружности, а MCN — вписанный, то

$$\angle MCN = \frac{1}{2}\angle MON = \frac{1}{2}\cdot 90^\circ = 45^\circ.$$

Второй способ. Через точки M и N проведём касательные к окружности, не совпадающие с прямой AB. Пусть X и Y — точки их касания с окружностью, а F и G — точки их пересечения с катетами AC и BC соответственно. Тогда

$$CF = CP + PF = r + PF = r + FX = MX + FX = MF.$$

Значит, треугольник CFM равнобедренный. Аналогично $CG = NG$, т. е. треугольник CNG также равнобедренный.



Проведём высоту CH треугольника ABC. Тогда $MF \parallel CH$ и $NG \parallel CH$, поэтому

$$\angle HCM = \angle CMF = \angle MCF, \quad \angle HCN = \angle CNG = \angle NCG.$$

Следовательно,

$$\angle MCN = \angle HCM + \angle HCN = \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}\cdot 90^\circ = 45^\circ.$$

Задачи на доказательство и вычисление

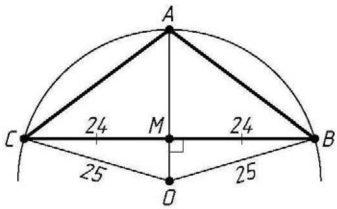
11.41.1. Сторона BC треугольника ABC равна 48. Около треугольника описана окружность радиуса 25. Известно, что радиус OA делит сторону BC на два равных отрезка.

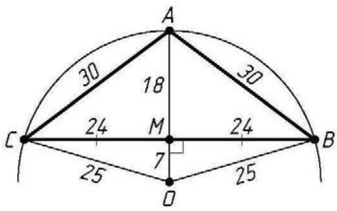
а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите его боковые стороны.

Ответ: 30.

Решение. а) Пусть M — середина хорды BC. Поскольку $BC = 48$, то BC — не диаметр окружности. Известно, что радиус окружности, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде, значит, OM — высота равнобедренного треугольника BOC. Высота AM треугольника ABC является его медианой, поэтому треугольник ABC равнобедренный.





б) Из прямоугольного треугольника OMB находим, что

$$OM = \sqrt{OB^2 - BM^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7.$$

Поэтому $AM = OA - OM = 25 - 7 = 18$. Следовательно,

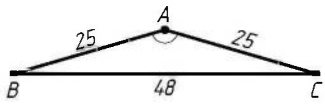
$$AC = AB = \sqrt{BM^2 + AM^2} = \sqrt{24^2 + 18^2} = 30.$$

11.42.1. Дан треугольник со сторонами 25, 25 и 48.

а) Докажите, что он тупоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей.

Ответ: $\frac{575}{14}$.

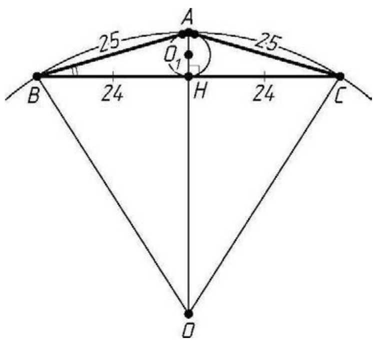


Решение. а) Пусть $AB = AC = 25$, $BC = 48$ — стороны треугольника ABC. По теореме косинусов

$$\cos\angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{25^2 + 25^2 - 48^2}{2 \cdot 25 \cdot 25} = \frac{2 \cdot 25^2 - 48^2}{2 \cdot 25 \cdot 25} < 0.$$

Следовательно, $\angle BAC > 90^\circ$.

б) Пусть AH — высота равнобедренного треугольника ABC. Тогда H — середина BC, а так как AH — биссектриса треугольника, то центр O_1 вписанной окружности лежит на отрезке AH. Поскольку треугольник ABC тупоугольный с тупым углом при вершине A, центр O его описанной окружности и вершина A лежат по разные стороны от прямой BC, причём точка O лежит на серединном перпендикуляре к стороне BC, т. е. на прямой AH. Значит, $OO_1 = OA - O_1A$.



Из прямоугольного треугольника AHB находим, что

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7, \quad \sin\angle ABC = \frac{AH}{AB} = \frac{7}{25},$$

Пусть $OA = R$ — радиус описанной окружности треугольника ABC. По теореме синусов

$$OA = R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{25}{2 \cdot \frac{7}{25}} = \frac{625}{14}.$$

Пусть S — площадь треугольника ABC, p — полупериметр, $r = O_1H$ — радиус вписанной окружности. Тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 7 = 24 \cdot 7, \quad p = \frac{25 + 25 + 48}{2} = 49,$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{24 \cdot 7}{49} = \frac{24}{7}, \quad O_1A = AH - O_1H = AH - r = 7 - \frac{24}{7} = \frac{25}{7}.$$

Следовательно,

$$OO_1 = OA - O_1A = \frac{625}{14} - \frac{25}{7} = \frac{575}{14}.$$

11.43.1. Трапеция с основаниями 1 и 3 такова, что в неё можно вписать окружность и около неё можно описать окружность.

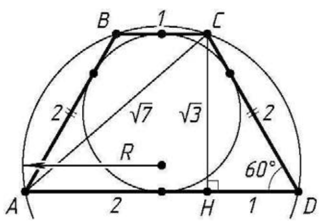
а) Докажите, что центр описанной около трапеции окружности расположен внутри трапеции.

б) Найдите площадь круга, описанного около трапеции.

Ответ: $\frac{7\pi}{3}$.

Решение. а) Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC. Поскольку около неё можно описать окружность, трапеция равнобедренная, $AB = CD$. Поскольку в неё можно вписать окружность, суммы её противоположных сторон равны, поэтому $AB = CD = \frac{1+3}{2} = 2$.

Пусть CH — высота трапеции. Тогда $DH = \frac{AD - BC}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$, $AH = 3 - 1 = 2$. Обозначим $\angle ADC = \alpha$. В прямоугольном треугольнике CHD катет DH равен половине гипотенузы CD, значит, $\angle ADC = \angle HDC = 60^\circ$, а $CH = \sqrt{3}$.



Из прямоугольного треугольника ACH находим, что

$$AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}.$$

По теореме косинусов

$$\cos\angle ACD = \frac{AC^2 + CD^2 - AD^2}{2AC \cdot CD} = \frac{7+4-9}{2\cdot\sqrt{7}\cdot 2} > 0,$$

значит, $\angle ACD < 90^\circ$. Этот угол наибольший в треугольнике ACD, так как он лежит против наибольшей стороны AD. Поэтому треугольник ACD остроугольный. Центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ACD, лежит внутри треугольника, следовательно, центр той же окружности, описанной около трапеции $ABCD$, лежит внутри трапеции.

б) Пусть радиус этой окружности равен R. По теореме синусов

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle ADC} = \frac{AC}{2\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{7}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Следовательно, площадь круга равна $\pi R^2 = \frac{7\pi}{3}$.

11.44.1. В параллелограмме $ABCD$ с углом A, равным 60°, проведена биссектриса угла B, пересекающая сторону CD в точке M.

а) Докажите, что треугольник BCM равносторонний.

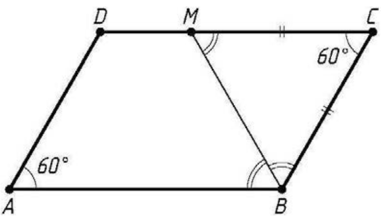
б) В треугольник BCM вписана окружность радиуса $\sqrt{7}$. Другая окружность вписана в трапецию $ABMD$. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

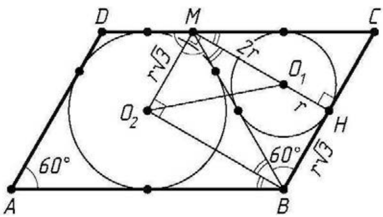
Ответ: 7.

Решение. а) Луч BM — биссектриса угла ABC, поэтому

$$\angle BMC = \angle ABM = \angle MBC,$$

значит, треугольник BMC равнобедренный, а так как $\angle BCM = \angle BAD = 60^\circ$, то равнобедренный треугольник BCM — равносторонний.





б) Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных соответственно в треугольник BCM и в трапецию $ABMD$, а радиус первой окружности равен r. Тогда $O_1M = 2r$.

Треугольник O_1MO_2 прямоугольный, поскольку $\angle O_1MO_2 = 90^\circ$ как угол между биссектрисами смежных углов. Треугольник BO_2M также прямоугольный, так как $\angle BO_2M = 90^\circ$ как угол между биссектрисами внутренних односторонних углов ABM и BMD при параллельных прямых AB и CD и секущей BM.

Пусть MH — высота равностороннего треугольника BCM. Тогда $BHMO_2$ — прямоугольник, значит,

$$O_2M = BH = MH\operatorname{ctg} 60^\circ = 3r\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = r\sqrt{3}.$$

Следовательно,

$$O_1O_2 = \sqrt{O_1M^2 + O_2M^2} = \sqrt{4r^2+3r^2} = r\sqrt{7} = \sqrt{7}\cdot\sqrt{7} = 7.$$

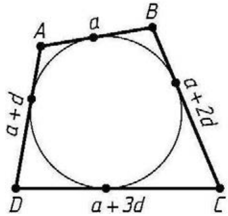
11.45.1. Длины сторон AB, AD, BC и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию.

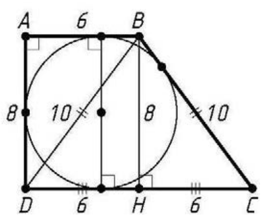
а) Докажите, что в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

б) Найдите радиус этой окружности, если $AB=6$, $AD=8$, $BC=10$, $CD=12$ и $BD=BC$.

Ответ: 4.

Решение. а) Пусть $AB=a$, $AD=a+d$, $BC=a+2d$, $CD=a+3d$. Тогда $AB+CD=a+a+3d=2a+3d$ и $AD+BC=a+d+a+2d=2a+3d$. Значит, $AB+CD=AD+BC$. Суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны, следовательно, в него можно вписать окружность.





б) Из пункта а) следует, что в данный четырёхугольник можно вписать окружность.

Треугольник ABD прямоугольный с прямым углом при вершине A, так как $AB^2+AD^2=36+64=100=BD^2$. Треугольник BCD равнобедренный, его высота BH является медианой, поэтому

$$DH=\frac{1}{2}CD=6=AB, \quad BH=\sqrt{BC^2-CH^2}=\sqrt{100-36}=8=AD.$$

Противоположные стороны четырёхугольника $ABHD$ попарно равны, значит, это параллелограмм, а так как $\angle BAD=90^\circ$, это прямоугольник. Поскольку $AB \parallel CD$, данный четырёхугольник $ABCD$ — прямоугольная трапеция. Диаметр вписанной в неё окружности равен меньшей боковой стороне AD. Следовательно, радиус этой окружности равен $\frac{1}{2}AD=4$.

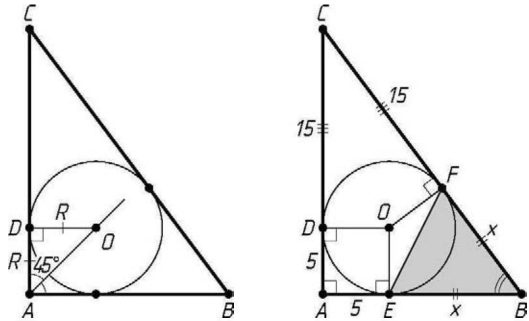
11.46.1. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке D, причём $AD=R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F. Найдите площадь треугольника BEF, если $R=5$ и $CD=15$.

Ответ: 40.

Решение. а) Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит, AO — биссектриса угла BAC. Треугольник AOD прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle OAD = 45°$. Следовательно, $\angle BAC = 90°$.



б) Обозначим $BF = x$. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, $AE = AD = 5$, $CF = CD = 15$ и $BE = BF = x$. По теореме Пифагора $BC^2 = AC^2 + AB^2$, или $(15+x)^2 = 20^2 + (5+x)^2$. Из этого уравнения находим, что $x = 10$. Тогда

$$BC = 25, \quad \sin\angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} BE \cdot BF \sin\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5} = 40.$$

11.47.1. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$, $BC = CD = 5$, $AD = 8$ и диагональю $AC = 7$.

а) Докажите, что около него можно описать окружность.

б) Найдите диагональ BD.

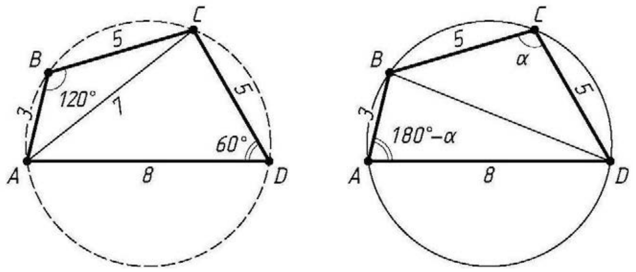
Ответ: $\frac{55}{7}$.

Решение. а) По теореме косинусов

$$\cos\angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{9+25-49}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos\angle ADC = \frac{AD^2 + DC^2 - AC^2}{2AD \cdot DC} = \frac{64+25-49}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{1}{2},$$

значит, $\angle ABC = 120°$ и $\angle ADC = 60°$. Сумма противоположных углов четырёхугольника равна $120° + 60° = 180°$, следовательно, около него можно описать окружность.



б) Обозначим $\angle BCD = \alpha$. Тогда по свойству вписанного четырёхугольника $\angle BAD = 180^\circ - \alpha$. По теореме косинусов

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos\alpha = 25 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos\alpha = 50 - 50\cos\alpha,$$
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos(180^\circ - \alpha) =$$
$$= 9 + 64 + 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos\alpha = 73 + 48\cos\alpha.$$

Из равенства $50 - 50\cos\alpha = 73 + 48\cos\alpha$ находим, что $\cos\alpha = -\frac{23}{98}$. Следовательно,

$$BD = \sqrt{50 - 50\cos\alpha} = \sqrt{50 + 50 \cdot \frac{23}{98}} = \frac{5}{7}\sqrt{98 + 23} = \frac{5}{7} \cdot 11 = \frac{55}{7}.$$

11.48.1. Сторона AC треугольника ABC больше стороны AB. Вписанная в треугольник окружность касается стороны BC в точке M, а вневписанная — в точке N.

а) Докажите, что $MN = AC - AB$.

б) Найдите расстояние между центрами окружностей, если сумма их радиусов равна 24, а $MN = 10$.

Ответ: 26.

Решение. а) Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника, а вневписанная окружность касается продолжений сторон AB и AC в точках K и L соответственно. Тогда

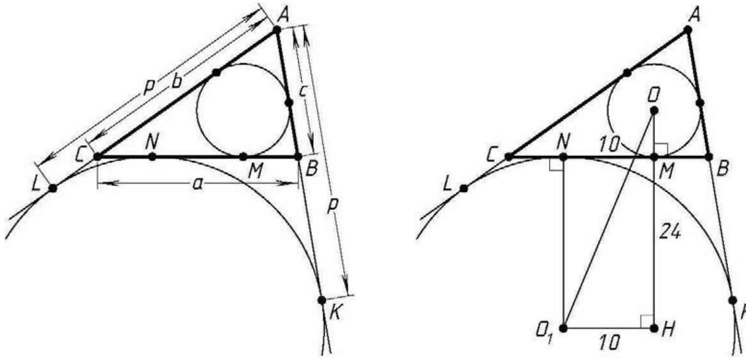
$$CN = CL, \quad BN = BK, \quad AL = AK,$$
$$2p = AC + CN + BN + AB = AC + CL + BK + AB = AL + AK = 2AL,$$

поэтому

$$AL = AK = p = \frac{a+b+c}{2}, \quad CN = CL = AL - AC = p - b = \frac{a+c-b}{2}.$$

Аналогично докажем, что $BM = p - b = \frac{a+c-b}{2}$. Следовательно,

$$MN = BC - CN - BM = a - \frac{a+c-b}{2} - \frac{a+c-b}{2} = \\ = a - (a+c-b) = b - c = AC - AB.$$



б) Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC, O_1 — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Радиусы OM и O_1N этих окружностей параллельны, так как они перпендикулярны одной и той же прямой BC.

Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки O_1 на прямую OM. Тогда MNO_1H — прямоугольник, поэтому

$$HO_1 = MN = 10, \quad HM = O_1N, \quad OH = OM + HM = OM + O_1N = 24.$$

Из прямоугольного треугольника OHO_1 находим, что

$$OO_1 = \sqrt{HO_1^2 + OH^2} = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26.$$

11.49.1. Окружность, построенная на медиане BM равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, пересекает основание BC в точке K.

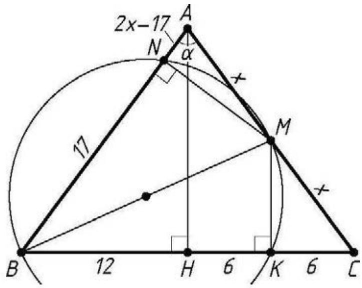
а) Докажите, что отрезок BK втрое больше отрезка CK.

б) Пусть указанная окружность пересекает сторону AB в точке N. Найдите AB, если $BK = 18$ и $BN = 17$.

Ответ: 18.

Решение. а) Пусть AH — высота треугольника ABC. Точка K лежит на окружности с диаметром BM, поэтому $\angle BKM = 90^\circ$, значит, $MK \parallel AH$, а так как M — середина AC, то MK — средняя линия треугольника AHC. Тогда K — середина CH, следовательно,

$$CK = \frac{1}{2}CH = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}BC = \frac{1}{4}BC, \quad BK = 3CK.$$



б) Положим $AB = AC = 2x$, $\angle BAC = \alpha$. Тогда $AM = x$, $AN = 2x - 17$. Из прямоугольного треугольника AMN находим, что

$$\cos\alpha = \frac{AN}{AM} = \frac{2x-17}{x},$$

а так как $BC = BK + CK = 18 + 6 = 24$, то по теореме косинусов

$$\cos\alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{4x^2 + 4x^2 - 24^2}{2 \cdot 2x \cdot 2x} = \frac{x^2 - 72}{x^2}.$$

Из уравнения $\frac{x^2-72}{x^2} = \frac{2x-17}{x}$ находим, что $x = 8$ или $x = 9$.

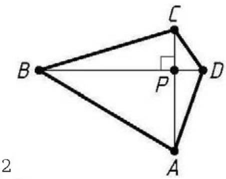
В первом случае $AN = 2x - 17 = -1$, что противоречит условию (точка N должна лежать на отрезке AB). Второе решение удовлетворяет условию задачи. Следовательно, $AB = 2x = 18$.

11.50.1. Диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны.

а) Докажите, что $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

б) Известно, что в этот четырёхугольник можно вписать окружность. Найдите её радиус, если $BC = 8$, $CD = 12$, $\angle BAD = 150°$.

Ответ: 2,4.



Решение. а) Пусть P — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. По теореме Пифагора из прямоугольных треугольников APB, BPC, CPD и APD находим, что

$$AB^2 = PA^2 + PB^2, \quad BC^2 = PB^2 + PC^2,$$

$$CD^2 = PC^2 + PD^2, \quad AD^2 = PD^2 + PA^2.$$

Следовательно,

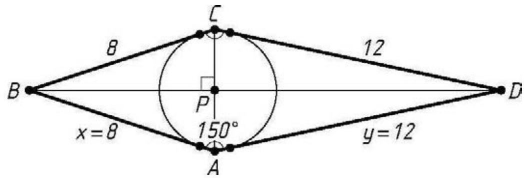
$$AB^2 + CD^2 = (PA^2 + PB^2) + (PC^2 + PD^2) =$$

$$= (PB^2 + PC^2) + (PD^2 + PA^2) = BC^2 + AD^2.$$

б) Обозначим $AB = x$ и $AD = y$. Поскольку четырёхугольник описанный, то $x + 12 = y + 8$, откуда $y - x = 4$. Диагонали четырёхугольника перпендикулярны, поэтому $x^2 + 144 = y^2 + 64$, значит, $y^2 - x^2 = 80$, а так как $x - y = 4$, то $x + y = 20$. Из системы

$$\begin{cases} y - x = 4, \\ y + x = 20 \end{cases}$$

находим, что $x = 8$, $y = 12$.



Таким образом, четырёхугольник $ABCD$ разбивается диагональю BD на два равных треугольника. Тогда

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin 150^\circ = 8 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 48.$$

В то же время площадь описанного четырёхугольника равна произведению его полупериметра на радиус r вписанной окружности, следовательно,

$$r = \frac{S_{ABCD}}{AB + AD} = \frac{48}{8 + 12} = 2{,}4.$$

11.51.1. Стороны треугольника относятся как $2:3:3$.

а) Докажите, что точки касания вписанной и вневписанной окружностей треугольника делят его бóльшую сторону на три равных отрезка.

б) Найдите отношение радиусов этих окружностей.

Ответ: $1:4$.

Решение. а) Пусть $AB = AC = 3a$, $BC = 2a$ — стороны треугольника ABC, $p = \frac{1}{2}(2a + 3a + 3a) = 4a$ — его полупериметр, M и N — точки касания соответственно вписанной и вневписанной окружностей со стороной AB, K — точка касания вневписанной окружности с продолжением стороны AC, H — точка касания вписанной окружности со стороной BC. Поскольку треугольник равнобедренный, H — середина основания BC.

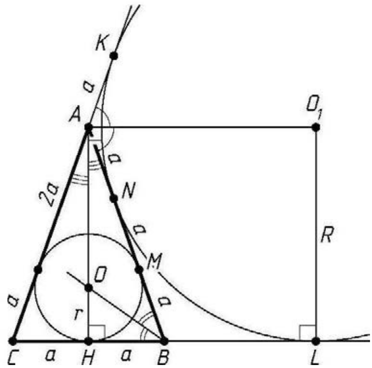
Тогда

$$BM = BH = a, \quad AN = AK = CK - AC = p - 3a = 4a - 3a = a,$$

значит,

$$MN = AB - BM - AN = 3a - a - a = a.$$

Следовательно, $BM = MN = AN$.



б) Пусть O и O_1 — центры соответственно вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC, r и R — их радиусы, L — точка касания вневписанной окружности с продолжением основания BC. Тогда

$$\angle AHL = \angle HLO_1 = 90^\circ,$$

а так как центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, то AO_1 и AH — биссектрисы смежных углов, значит, $\angle HAO_1 = 90^\circ$. Тогда $AHLO_1$ — прямоугольник, поэтому $AH = O_1L = R$.

По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{OH}{OA} = \frac{BH}{BA} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$\frac{r}{R} = \frac{OH}{AH} = \frac{OH}{OH + OA} = \frac{1}{4}.$$

11.52.1. К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.

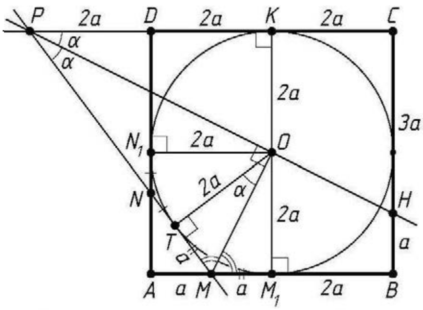
б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P. В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM : MB = 1 : 3$?

Ответ: $1 : 3$.

Решение. а) Пусть окружность, вписанная в квадрат, касается его стороны AB в точке M_1, стороны AD — в точке N_1, а прямой MN — в точке T. Тогда

$$MM_1 = MT, \quad NN_1 = NT,$$

$$AM + MN + AN = AM + MT + NT + AN =$$
$$= (AM + MM_1) + (NN_1 + AN) = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AD = AB.$$



б) Положим $AB = 4a$. Тогда радиус окружности равен $2a$, $AM = \frac{1}{4}AB = a$.

Пусть O — центр окружности. Тогда

$$MT = MM_1 = AM_1 - AM = 2a - a = a.$$

Треугольник POM прямоугольный, поскольку $\angle MOP = 90^\circ$ как угол между биссектрисами внутренних односторонних углов при параллельных прямых AB, PC и секущей MP. Пусть K — точка касания окружности со стороной CD, H — точка пересечения прямой PO со стороной BC. Обозначим $\angle MOT = \alpha$. Тогда

$$\angle OPK = \angle OPM = \angle MOT = \alpha, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{MT}{OT} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$PK = OK\operatorname{ctg}\alpha = 2a \cdot 2 = 4a, \quad CP = PK + KC = 4a + 2a = 6a,$$

значит,

$$CH = CP\operatorname{tg}\alpha = 6a \cdot \frac{1}{2} = 3a, \quad BH = BC - CH = 4a - 3a = a.$$

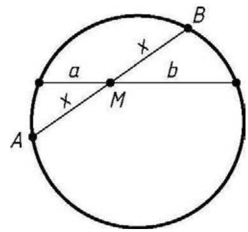
Следовательно,

$$\frac{BH}{CH} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}.$$

§ 12. Пропорциональные отрезки в окружности

Подготовительные задачи

12.1. Точка M внутри окружности делит хорду этой окружности на отрезки, равные a и b. Через точку M проведена хорда AB, делящаяся точкой M пополам. Найдите AB.



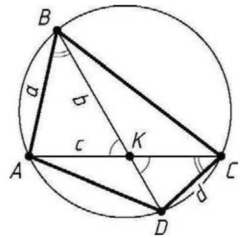
Ответ: $2\sqrt{ab}$.

Решение. Обозначим $AM = BM = x$. По теореме об отрезках пересекающихся хорд $x^2 = ab$, откуда $x = \sqrt{ab}$. Следовательно, $AB = 2x = 2\sqrt{ab}$.

12.2. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K. Известно, что $AB = a$, $BK = b$, $AK = c$, $CD = d$. Найдите AC.

Ответ: $\dfrac{ac+bd}{a}$.

Решение. Из подобия треугольников ABK и DCK (по двум углам) следует, что



$$\frac{AB}{CD} = \frac{BK}{CK}.$$

Поэтому

$$CK = CD \cdot \frac{BK}{AB} = \frac{db}{a}.$$

Следовательно,

$$AC = AK + KC = c + \frac{db}{a} = \frac{ac+bd}{a}.$$

12.3. Из точки, расположенной вне окружности на расстоянии $\sqrt{7}$ от центра, проведена секущая, внутренняя часть которой вдвое меньше внешней и равна радиусу окружности. Найдите радиус окружности.

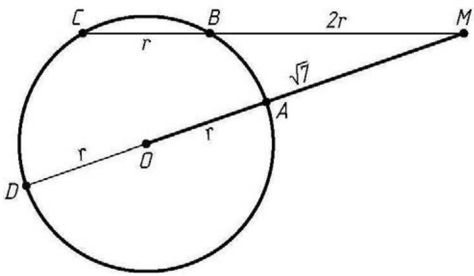
Ответ: 1.

Решение. Пусть секущая, проведённая из точки M, пересекает окружность с центром O в точках B и C (B лежит между C и M), а прямая MO пересекает окружность в точках A и D (A лежит между M и O). Тогда $MB \cdot MC = MA \cdot MD$ (оба произведения равны квадрату касательной, проведённой к окружности из точки M).

Обозначим через r радиус окружности. Тогда

$$BC = r, \quad BM = 2r, \quad MC = 3r, \quad MA = MO - OA = \sqrt{7} - r,$$

$$MD = MO + OD = \sqrt{7} + r,$$



значит, $2r \cdot 3r = (\sqrt{7} - r)(\sqrt{7} + r)$. Из этого уравнения находим, что $r = 1$.

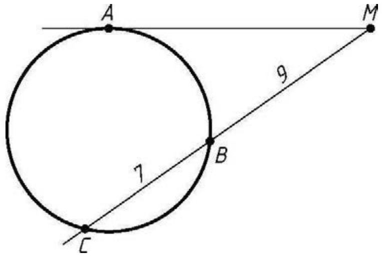
12.4. Через точку M проведены две прямые. Одна из них касается некоторой окружности в точке A, а вторая пересекает эту окружность в точках B и C, причём $BC = 7$ и $BM = 9$. Найдите AM.

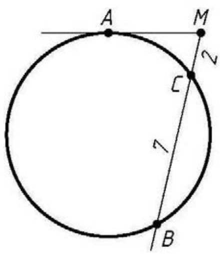
Ответ: 12 или $3\sqrt{2}$.

Решение. Пусть точка B лежит между точками M и C (см. рисунок слева). По теореме о касательной и секущей

$$AM^2 = MC \cdot MB = (9+7)9 = 16 \cdot 9 = 12^2.$$

Следовательно, $AM = 12$.



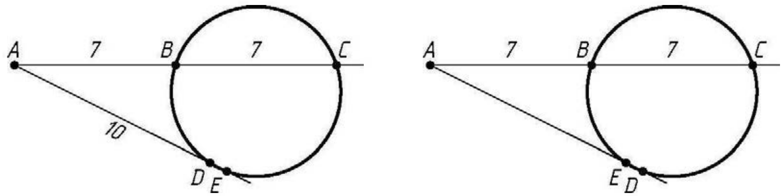


Если точка C лежит между точками B и M (см. рисунок справа), то аналогично получим, что $AM = 3\sqrt{2}$.

12.5. Из точки A проведены два луча, пересекающие данную окружность: один — в точках B и C, другой — в точках D и E. Известно, что $AB = 7$, $BC = 7$, $AD = 10$. Найдите DE.

Ответ: $\frac{1}{5}$.

Решение. Ясно, что точка B расположена между точками A и C. Предположим, что точка D расположена между точками A и E (см. ри-



сунок слева). Тогда по следствию из теоремы о касательной и секущей

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE, \quad \text{или} \quad 14 \cdot 7 = 10(10 + DE).$$

Отсюда находим, что $DE = -\frac{1}{5}$, что невозможно. Поэтому точка E расположена между A и D (см. рисунок справа). Тогда

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE, \quad \text{или} \quad 14 \cdot 7 = 10(10 - DE).$$

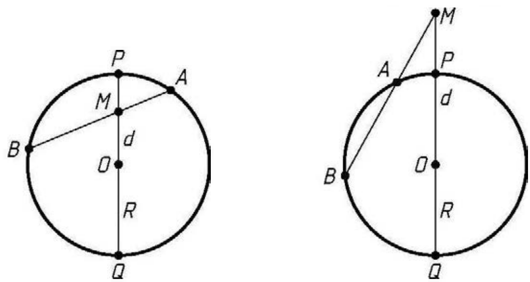
Отсюда находим, что $DE = \frac{1}{5}$.

12.6. Точка M удалена от центра окружности радиуса R на расстояние d. Прямая, проходящая через точку M, пересекает окружность в точках A и B. Найдите произведение $AM \cdot BM$.

Ответ: $|R^2 - d^2|$.

Решение. Рассмотрим случай, когда точка M лежит внутри окружности (см. рисунок слева). Пусть O — центр окружности, R — радиус, PQ — диаметр, проходящий через точку M (M между O и P). По теореме о произведениях отрезков пересекающихся хорд для любой хорды AB, проходящей через точку M,

$$AM \cdot BM = PM \cdot QM = (OP - OM)(OQ + OM) = (R - d)(R + d) = R^2 - d^2.$$

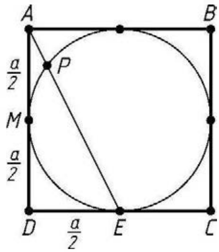


Если же точка M лежит вне окружности (см. рисунок справа), то аналогично получим, что $AM \cdot BM = d^2 - R^2$.

12.7. В квадрат $ABCD$ со стороной a вписана окружность, которая касается стороны CD в точке E. Найдите хорду, соединяющую точки, в которых окружность пересекается с прямой AE.

Ответ: $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Решение. Пусть PE — искомая хорда, M — точка касания окружности со стороной AD. Тогда



$$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \quad AM = \frac{a}{2}.$$

По теореме о касательной и секущей

$$AM^2 = AE \cdot AP, \quad \text{или} \quad \frac{a^2}{4} = \frac{a\sqrt{5}}{2}\left(\frac{a\sqrt{5}}{2} - PE\right).$$

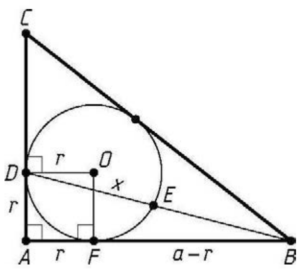
Из этого уравнения находим, что $PE = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

12.8. В прямоугольном треугольнике ABC угол A прямой, катет AB равен a, радиус вписанной окружности равен r. Вписанная окружность касается катета AC в точке D. Найдите хорду, соединяющую точки пересечения окружности с прямой BD.

Ответ: $\dfrac{2ar}{\sqrt{r^2+a^2}}$.

Решение. Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC, E — отличная от D точка пересечения прямой BD с этой окружностью, F — точка касания окружности с катетом AB. Обозначим $DE = x$.

Четырёхугольник $AFOD$ — квадрат со стороной r, поэтому $AF = OD = r$ и $AD = OF = r$. По теореме Пифагора



$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + r^2}.$$

По теореме о касательной и секущей $BD \cdot BE = BF^2$, или

$$\sqrt{a^2+r^2}\left(\sqrt{a^2+r^2} - x\right) = (a-r)^2.$$

Из этого уравнения находим, что $x = \dfrac{2ar}{\sqrt{r^2+a^2}}$.

12.9. На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, делящая вторую боковую сторону на отрезки, равные a и b. Найдите основание треугольника.

Ответ: $\sqrt{2a(a+b)}$ или $\sqrt{2b(a+b)}$.

Решение. Первый способ. Пусть окружность, построенная как на диаметре на боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC, пересекает боковую сторону AC в точке K, причём $CK = a$, $AK = b$.

Тогда $\angle AKB = 90^\circ$. Из прямоугольного треугольника AKB по теореме Пифагора находим, что

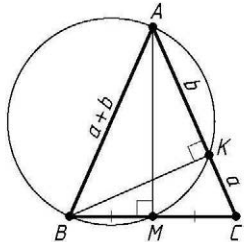
$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{(a+b)^2 - b^2} = \sqrt{a(2b+a)},$$

а из прямоугольного треугольника BKC — что

$$BC = \sqrt{BK^2 + CK^2} = \sqrt{a(2b+a) + a^2} = \sqrt{2a(a+b)}.$$

Если $CK = b$, $AK = a$, то аналогично получим, что $BC = \sqrt{2b(a+b)}$.

Второй способ. Пусть окружность, построенная как на диаметре на боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC, пересекает боковую сторону AC в точке K, а основание BC — в точке M, причём $CK = a$, $AK = b$. Тогда $\angle AMB = 90^\circ$, т. е. AM — высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию. Значит, M — середина BC.



Из точки C к окружности проведены две секущие, поэтому

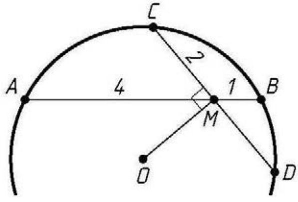
$$CM \cdot CB = CK \cdot CA, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}CB^2 = a(a+b),$$

откуда $CB = \sqrt{2a(a+b)}$.

Если $CK = b$, $AK = a$, то аналогично получим, что $BC = \sqrt{2b(a+b)}$.

12.10. В окружности с центром O проведены хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M, причём $AM = 4$, $MB = 1$, $CM = 2$. Найдите угол OMC.

Ответ: 90°.



Решение. Из равенства $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ следует, что

$$MD = \frac{AM \cdot MB}{CM} = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2,$$

т. е. M — середина хорды CD. Поскольку диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде, то $\angle OMC = 90^\circ$.

Тренировочные задачи

12.11. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$, причём AB является диаметром окружности. Диагонали AC и BD пересекаются в точке M. Известно, что $BC=3$, $CM=\frac{3}{4}$, а площадь треугольника ABC втрое больше площади треугольника ACD. Найдите AM.

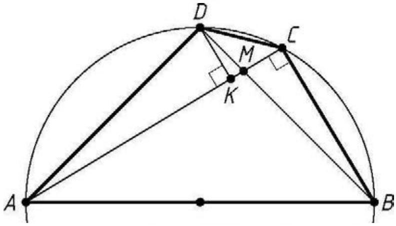
Ответ: $\frac{17}{4}$.

Решение. Пусть DK — высота треугольника ADC. Поскольку вписанный угол ACB опирается на диаметр AB, то $\angle ACB=90^\circ$. Поэтому DK параллельно BC, а так как площадь треугольника ADC в три раза меньше площади треугольника ABC, то его высота DK втрое меньше высоты BC треугольника ABC. Следовательно, треугольник DKM подобен треугольнику BCM с коэффициентом $\frac{1}{3}$. Имеем

$$BM=\sqrt{BC^2+CM^2}=\frac{3\sqrt{17}}{4},\quad DM=\frac{1}{3}BM=\frac{\sqrt{17}}{4}.$$

Поскольку $AM\cdot MC=DM\cdot MB$, то

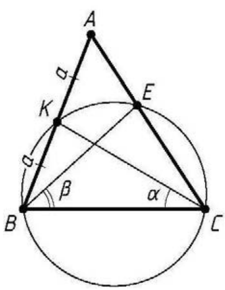
$$AM=\frac{DM\cdot MB}{MC}=\frac{17}{4}.$$



12.12. Через вершины B и C треугольника ABC проведена окружность, которая пересекает сторону AB в точке K, а сторону AC — в точке E. Найдите AE, зная, что $AK=KB=a$, $\angle BCK=\alpha$, $\angle CBE=\beta$.

Ответ: $\frac{a}{2\sin\alpha}\left(\sqrt{\sin^2\beta+8\sin^2\alpha}-\sin\beta\right)$.

Решение. Обозначим через R радиус данной окружности. Треугольник BCK вписан в окружность, поэтому $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$. Треугольник BCE также вписан в эту окружность, поэтому



$$CE=2R\sin\beta=\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha},$$

а так как $AC\cdot AE=AB\cdot AK$, то

$$\left(AE+\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}\right)AE=2a^2,$$

или

$$AE^2+\frac{a\sin\beta\cdot AE}{\sin\alpha}-2a^2=0.$$

Отсюда находим, что

$$AE = \frac{a}{2\sin\alpha}\left(\sqrt{\sin^2\beta + 8\sin^2\alpha} - \sin\beta\right).$$

12.13. Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, проходит через середину стороны BC и пересекает в точке D продолжение стороны AB за точку A, причём $AD = \frac{2}{3}AB$. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 1$.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{6}$.

Решение. Пусть M — середина BC. Диаметр AC виден из точки M под прямым углом, значит, AM — высота и медиана треугольника ABC, поэтому этот треугольник равнобедренный, $AB = AC = 1$. Тогда

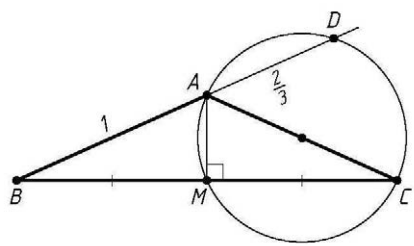
$$AD = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}, \quad BD = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3},$$

а так как $BC \cdot BM = BA \cdot BD$, то $2BM^2 = \frac{5}{3}$, $BM = \sqrt{\frac{5}{6}}$. Поэтому

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{1 - \frac{5}{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AM = BM \cdot AM = \sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{6}.$$



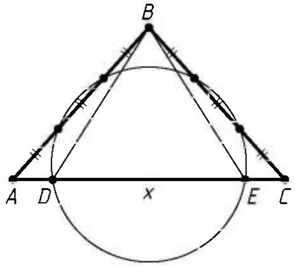
12.14. Каждая из боковых сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC разделена на три равные части, и через четыре точки деления на этих сторонах проведена окружность, высекающая на основании AC хорду DE. Найдите отношение площадей треугольников ABC и BDE, если $AB = BC = 3$ и $AC = 4$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Решение. Поскольку треугольник ABC равнобедренный, то $AD = EC$. Обозначим $DE = x$. Тогда

$$CE = \frac{4-x}{2}, \quad CD = \frac{4+x}{2}.$$

Из точки C к указанной окружности проведены две секущие. Произведение всей секущей на её внешнюю часть для данной точки и данной окружности постоянно, поэтому



$$CE \cdot CD = 2, \quad \text{или} \quad \frac{16-x^2}{4} = 2.$$

Отсюда находим, что $x = 2\sqrt{2}$. Следовательно,

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BDE}} = \frac{AC}{DE} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

12.15. Окружность, диаметр которой равен $\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины A и B прямоугольника $ABCD$. Длина касательной, проведённой из точки C к окружности, равна 3, $AB = 1$. Найдите сторону BC.

Ответ: $\frac{3}{2}(\sqrt{5} \pm 1)$.

Решение. Заметим, что вершина C расположена вне окружности. Пусть CK — указанная касательная (K — точка касания). Если окружность не имеет общих точек с данным прямоугольником, кроме точек A и B, то, продолжив отрезок CB до пересечения с окружностью в точке P, получим прямоугольный треугольник ABP, гипотенуза AP которого — диаметр окружности. Поэтому

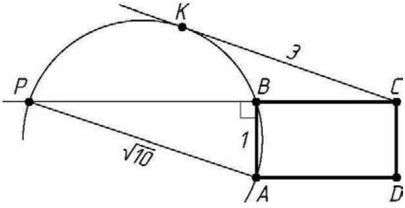
$$BP = \sqrt{AP^2 - AB^2} = \sqrt{10-1} = 3.$$

По теореме о касательной и секущей

$$BC(BC + BP) = CK^2, \quad \text{или} \quad BC(BC+3) = 9.$$

Отсюда находим, что

$$BC = \frac{3}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

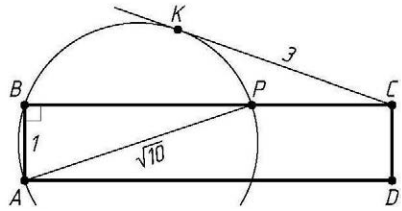


Если же окружность пересекает прямоугольник ещё в точках, отличных от A и B, то соответствующее уравнение имеет вид

$$BC(BC-3)=9.$$

Его корень —

$$BC=\frac{3}{2}(\sqrt{5}+1).$$



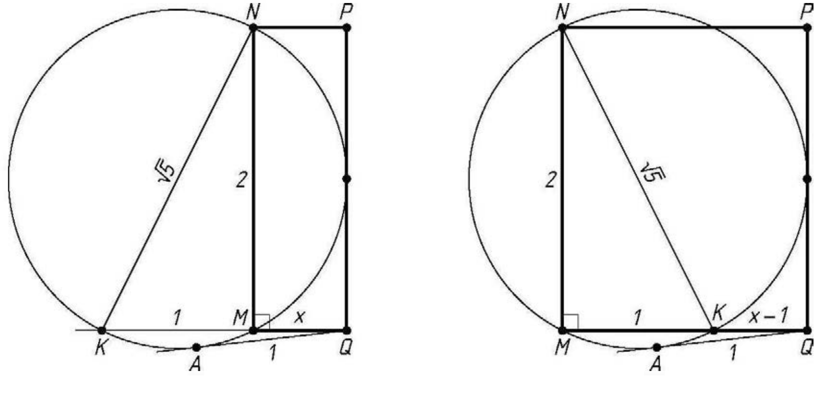
12.16. Окружность проходит через соседние вершины M и N прямоугольника $MNPQ$. Длина касательной, проведённой из точки Q к окружности, равна 1, $PQ=2$. Найдите площадь прямоугольника $MNPQ$, если диаметр окружности равен $\sqrt{5}$.

Ответ: $\sqrt{5}\pm 1$.

Решение. Пусть прямая MQ вторично пересекает окружность в точке K. Тогда $\angle NMK=90^\circ$, поэтому NK — диаметр окружности, $NK=\sqrt{5}$. По теореме Пифагора

$$MK=\sqrt{NK^2-MN^2}=\sqrt{5-4}=1.$$

Пусть прямая, проведённая через вершину Q, касается окружности в точке A. По теореме о касательной и секущей $QM\cdot QK=QA^2$. Обозначим $QM=x$.



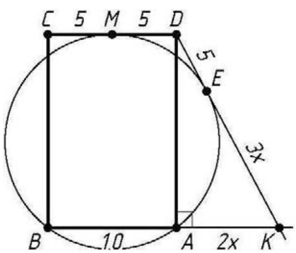
Если точка K лежит на продолжении стороны QM (см. рисунок слева), то $x(x+1)=1$, откуда $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Следовательно,

$$S_{MNPQ}=QM\cdot PQ=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot 2=\sqrt{5}-1.$$

Если же точка K лежит на отрезке QM (см. рисунок справа), то $x(x-1)=1$, откуда $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Следовательно,

$$S_{MNPQ}=QM\cdot PQ=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot 2=\sqrt{5}+1.$$

12.17. Точки A, B, C, D — последовательные вершины прямоугольника. Окружность проходит через вершины A и B и касается стороны CD. Через вершину D проведена прямая, которая касается той же окружности в точке E, а затем пересекает продолжение стороны AB в точке K. Найдите площадь трапеции $BCDK$, если известно, что $AB=10$ и $KE:KA=3:2$.



Ответ: 210.

Решение. Пусть M — середина CD. Тогда $DE=DM=5$. Положим $AK=2x$, $KE=3x$. По теореме о касательной и секущей

$$KE^2=BK\cdot AK,\quad \text{или}\quad 9x^2=(10+2x)2x.$$

Из этого уравнения находим, что $x=4$. Поэтому

$$AK=8,\quad BK=18,\quad KE=12,\quad KD=KE+ED=12+5=17.$$

По теореме Пифагора из треугольника KAD находим, что

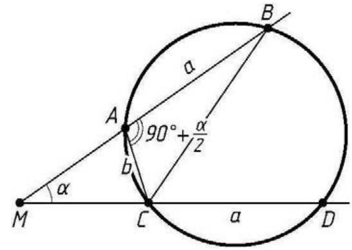
$$AD=\sqrt{KD^2-AK^2}=\sqrt{17^2-8^2}=\sqrt{225}=15.$$

Следовательно,

$$S_{BCDK}=\frac{1}{2}(BK+CD)\cdot AD=\frac{1}{2}(18+10)\cdot 15=210.$$

12.18. Найдите радиус окружности, которая высекает на обеих сторонах угла, равного α, хорды, равные a, если известно, что расстояние между ближайшими концами этих хорд равно b.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\sin\frac{\alpha}{2}}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.



Решение. Пусть M — вершина данного угла, AB и CD — данные хорды, $AC = b$, $AB = CD = a$, R — радиус окружности.

Поскольку $MA \cdot MB = MD \cdot MC$ и $AB = CD$, то $MA = MC$. Поэтому треугольник AMC равнобедренный. Следовательно,

$$\angle BAC = 180^\circ - \angle MAC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

По теореме косинусов

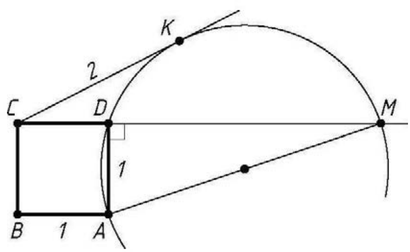
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = a^2 + b^2 + 2ab\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$R = \frac{BC}{2\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\sin\frac{\alpha}{2}}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

12.19. Сторона квадрата $ABCD$ равна 1 и является хордой некоторой окружности, причём остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Касательная CK, проведённая из вершины C к этой же окружности, равна 2. Найдите диаметр окружности.

Ответ: $\sqrt{10}$.

Решение. Пусть AD — хорда окружности, луч CD пересекает окружность в точке M, отличной от D. Тогда $CM \cdot CD = CK^2$. Отсюда находим, что $DM = 3$.



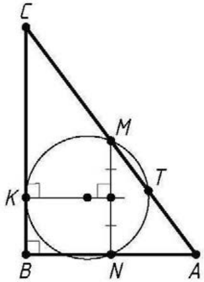
Поскольку $\angle ADM = 90^\circ$, то AM — диаметр окружности. Следовательно,

$$AM^2 = AD^2 + DM^2 = 1 + 9 = 10, \quad AM = \sqrt{10}.$$

12.20. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB = 3$ и $BC = 4$ через середины сторон AB и AC проведена окружность, касающаяся катета BC. Найдите длину отрезка гипотенузы AC, который лежит внутри этой окружности.

Ответ: $\frac{11}{10}$.

Решение. Пусть M и N — середины AC и AB соответственно, K — точка касания. Тогда MN — средняя линия треугольника ABC; диаметр окружности, проходящий через точку касания K, перпендикулярен BC, а значит, и MN. Поэтому



$$MN = \frac{1}{2}BC = 2,$$

$$CK = CB - KB = CB - \frac{1}{2}MN = 4 - 1 = 3.$$

Пусть T — вторая точка пересечения окружности с гипотенузой AC. Тогда

$$CT \cdot CM = CK^2, \quad \text{или} \quad \left(\frac{5}{2} + MT\right)\frac{5}{2} = 9.$$

Отсюда находим, что $MT = \frac{11}{10}$.

12.21. В треугольнике ABC сторона BC равна 4, а медиана, проведённая к этой стороне, равна 3. Найдите длину общей хорды двух окружностей, каждая из которых проходит через точку A и касается BC, причём одна касается BC в точке B, а вторая — в точке C.

Ответ: $\frac{5}{3}$.

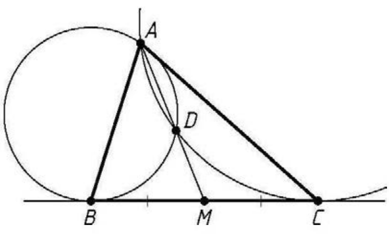
Решение. Пусть D — вторая точка пересечения указанных окружностей, а прямая AD пересекает BC в точке M. Тогда по теореме о касательной и секущей

$$MB^2 = MA \cdot MD = MC^2,$$

поэтому $MB = MC$, т. е. AM — медиана треугольника ABC, $AM = 3$. Из уравнения

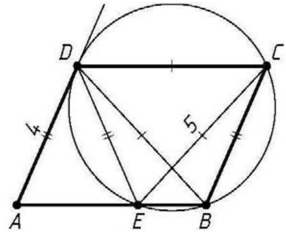
$$MA(MA - AD) = MB^2, \quad \text{или} \quad 3(3 - AD) = 4,$$

находим, что $AD = \frac{5}{3}$.



12.22. Окружность, проходящая через вершины B, C и D параллелограмма $ABCD$, касается прямой AD и пересекает прямую AB в точках B и E. Найдите длину отрезка AE, если $AD = 4$ и $CE = 5$.

Ответ: $\frac{16}{5}$.



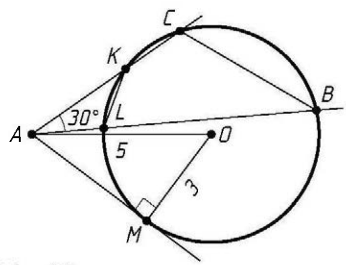
Решение. Пусть точка E лежит между точками A и B. Трапеция $BCDE$ вписана в окружность, поэтому она равнобедренная. Значит, $BD = CE = 5$. Хорда BC параллельна касательной AD, поэтому треугольник BDC равнобедренный (прямая, проходящая через точку D перпендикулярно касательной AD, проходит через центр окружности, перпендикулярна хорде BC и делит её пополам). Следовательно, $AB = CD = BD = CE = 5$, и по теореме о касательной и секущей $AD^2 = AB \cdot AE$, откуда $AE = \frac{AD^2}{AB} = \frac{16}{5}$.

Если точка не лежит между точками A и B, то задача не имеет решений (в этом случае, рассуждая аналогично первому случаю, получим, что $AE = \frac{16}{5} < 5$, что невозможно).

12.23. Из точки A, находящейся на расстоянии 5 от центра окружности радиуса 3, проведены две секущие AKC и ALB, угол между которыми равен 30° (K, C, L, B — точки пересечения секущих с окружностью). Найдите площадь треугольника AKL, если площадь треугольника ABC равна 10.

Ответ: $\frac{8}{5}$.

Решение. Проведём из точки A касательную к данной окружности. Пусть M — точка касания, O — центр окружности.



Из прямоугольного треугольника OMA находим, что

$$AM^2 = AO^2 - OM^2 = 25 - 9 = 16.$$

Тогда

$$AK \cdot AC = AL \cdot AB = AM^2 = 16.$$

Поэтому

$$S_{\Delta AKL} = \frac{1}{2} AK \cdot AL \sin 30^\circ = \frac{1}{4} AK \cdot AL = \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{AC} \cdot \frac{16}{AB} =$$

$$= \frac{64}{AC \cdot AB} = \frac{16}{\frac{1}{4} AC \cdot AB} = \frac{16}{\frac{1}{2} AC \cdot AB \sin 30^\circ} = \frac{16}{S_{\Delta ABC}} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}.$$

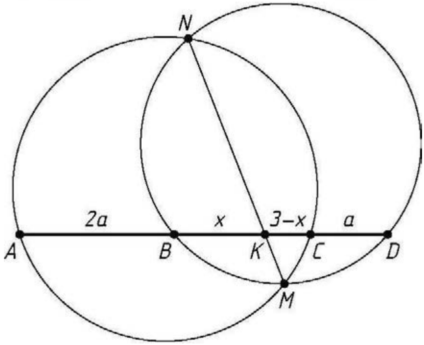
12.24. На прямой расположены точки A, B, C и D, следующие друг за другом в указанном порядке. Известно, что $BC = 3$, $AB = 2CD$. Через точки A и C проведена некоторая окружность, а через точки B и D — другая. Их общая хорда пересекает отрезок BC в точке K. Найдите BK.

Ответ: 2.

Решение. Пусть $CD=a$, $AB=2a$. Обозначим $BK=x$. Тогда

$$KC=3-x, \quad KD=DC+KC=a+3-x, \quad AK=AB+BK=2a+x.$$

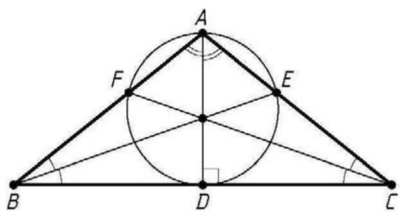
Пусть MN — общая хорда указанных окружностей. Тогда $AK\cdot KC=$ $=MK\cdot NK=BK\cdot KD$, поэтому $AK\cdot KC=BK\cdot KD$, или $(2a+x)(3-x)=$ $=x(a+3-x)$. Из этого уравнения находим, что $x=2$.



12.25. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=AC$) проведены биссектрисы AD, BE, CF. Найдите BC, если известно, что $AC=1$, а вершина A лежит на окружности, проходящей через точки D, E и F.

Ответ: $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$.

Решение. Пусть $BC=x$. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{CE}{AE}=\frac{BC}{AB}=\frac{x}{1}$. Отсюда находим, что $CE=x\cdot AE=x\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{x}{1+x}$.



Поскольку $CD^2=CE\cdot AC$, то

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x}{1+x}.$$

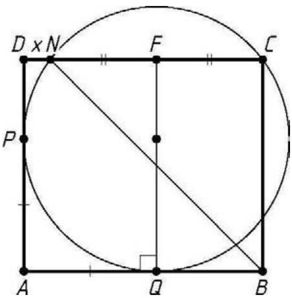
Из этого уравнения находим, что

$$x=\frac{\sqrt{17}-1}{2}.$$

12.26. Окружность касается сторон AB и AD прямоугольника $ABCD$ и проходит через вершину C. Сторону DC она пересекает в точке N. Найдите площадь трапеции $ABND$, если $AB=9$ и $AD=8$.

Ответ: 40.

Решение. Обозначим $DN = x$. Пусть P и Q — точки касания окружности со сторонами соответственно AD и AB данного прямоугольника, а перпендикуляр к стороне AB, проведённый через точку Q, пересекает сторону DC в точке F. Тогда центр окружности лежит на прямой QF, а так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, то F — середина хорды CN.



По теореме о касательной и секущей $PD^2=DC\cdot DN=9x$, поэтому $PD=3\sqrt{x}$. Тогда

$$AQ = AP = AD - PD = 8-3\sqrt{x},$$
$$QB = AB - AQ = 9-(8-3\sqrt{x}) = 1+3\sqrt{x},$$
$$NC = 2CF = 2QB = 2+6\sqrt{x}.$$

Поскольку $NC+ND=9$, то

$$2+6\sqrt{x}+x=9, \quad \text{или} \quad x+6\sqrt{x}-7=0.$$

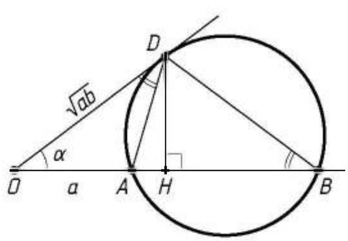
Отсюда находим, что $x=1$. Следовательно,

$$S_{ABND} = \frac{AB+ND}{2}\cdot AD = 10\cdot 4 = 40.$$

12.27. На одной из сторон угла, равного α ($\alpha<90^\circ$), с вершиной в точке O взяты точки A и B, причём $OA=a$, $OB=b$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся другой стороны угла.

Ответ: $\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}\cos\alpha}{2\sin\alpha}$.

Решение. Пусть D — точка касания окружности с другой стороной угла, H — проекция точки D на прямую AB, R — искомый радиус. По теореме о касательной и секущей находим, что $OD=\sqrt{ab}$. Тогда по теореме косинусов



$$AD^2 = ab+a^2-2a\sqrt{ab}\cos\alpha =$$
$$= a(a+b-2\sqrt{ab}\cos\alpha).$$

Треугольники ODB и OAD подобны (по двум углам) с коэффициентом

$$k=\frac{OB}{OD}=\frac{b}{\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}.$$

Из прямоугольного треугольника DHB находим, что

$$\sin\angle DBH=\frac{DH}{DB}=\frac{OD\cdot\sin\alpha}{DB}=\frac{\sqrt{ab}\sin\alpha}{\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}AD}=\frac{a\sin\alpha}{AD}$$

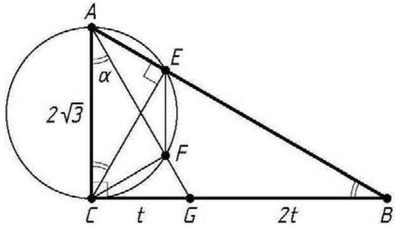
Следовательно,

$$R=\frac{AD}{2\sin\angle DBH}=\frac{AD}{\frac{2a\sin\alpha}{AD}}=\frac{AD^2}{2a\sin\alpha}=\frac{a(a+b-2\sqrt{ab}\cos\alpha)}{2a\sin\alpha}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}\cos\alpha}{2\sin\alpha}.$$

12.28. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность. Она пересекает гипотенузу AB в точке E. На стороне BC взята точка G так, что отрезок AG пересекает окружность в точке F, причём отрезки EF и AC параллельны, $BG=2CG$ и $AC=2\sqrt{3}$. Найдите GF.

Ответ: 1.

Решение. Пусть $CG=t$, $\angle CAG=\alpha$. Тогда $BC=3t$, а так как CE — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины прямого угла, то $\angle ABC=\angle ACE$. Поскольку трапеция $AEFC$ вписана в окружность, то она равнобедренная, поэтому $\angle ACE=\angle CAG=\alpha$. Значит, $\angle ABC=\angle CAG=\alpha$. Следовательно, прямоугольные треугольники ABC и GAC подобны по двум углам.



Из равенства $\frac{CG}{AC}=\frac{AC}{BC}$ следует, что $AC^2=CG\cdot BC$, или $12=3t^2$, откуда $t=2$.

Из прямоугольного треугольника ACG находим, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{CG}{AC}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

поэтому $\alpha=30^\circ$. Тогда $AG=2CG=4$.

По теореме о касательной и секущей $GF\cdot AG=CG^2$, или $4GF=4$. Следовательно, $GF=1$.

12.29. В параллелограмме $ABCD$ угол BCD равен 150°, а сторона AD равна 8. Найдите радиус окружности, касающейся прямой CD и проходящей через вершину A, а также пересекающей сторону AD на расстоянии 2 от точки D.

Ответ: $2(5\pm 2\sqrt{3})$.

Решение. Пусть R — искомый радиус, K — точка касания указанной окружности с прямой CD, M — точка пересечения этой окружности со стороной AD ($DM=2$). Тогда

$$DK=\sqrt{DM\cdot DA}=\sqrt{2\cdot 8}=4.$$

Если точка K лежит на луче DC, то

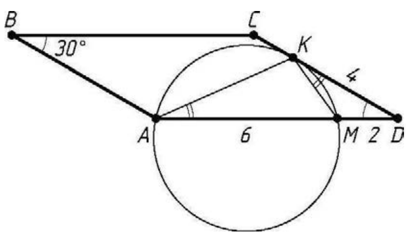
$$MK^2=DM^2+DK^2-2DM\cdot DK\cos 30^\circ = \\ =4+16-2\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=20-8\sqrt{3}=4(5-2\sqrt{3}).$$

Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что $\angle MAK = \angle DKM$. Тогда

$$\sin\angle MAK=\sin\angle DKM=\frac{DM\sin 30^\circ}{MK}=\frac{1}{MK}$$

(теорема синусов), поэтому

$$R=\frac{MK}{2\sin\angle MAK}=\frac{1}{2}MK^2=2(5-2\sqrt{3}).$$



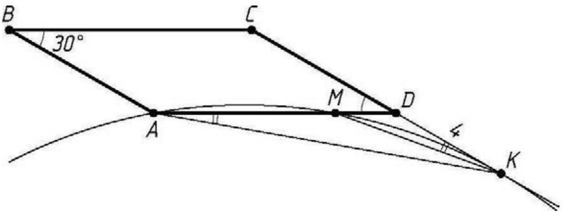
Если точка K лежит на продолжении стороны DC за точку D (см. рисунок на следующей странице), то

$$MK^2=DM^2+DK^2-2DM\cdot DK\cdot\cos 150^\circ=4(5+2\sqrt{3}),$$

$$\sin\angle MAK=\sin\angle DKM=\frac{DM\sin 150^\circ}{MK}=\frac{1}{MK}.$$

Следовательно,

$$R=\frac{MK}{2\sin\angle MAK}=\frac{1}{2}MK^2=2(5+2\sqrt{3}).$$



12.30. Окружность и прямая касаются в точке M. Из точек A и B этой окружности опущены перпендикуляры на прямую, равные a и b соответственно. Найдите расстояние от точки M до прямой AB.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

Решение. Пусть указанная касательная и прямая AB пересекаются в точке K под углом α, а x — искомое расстояние. Тогда

$$\sin\alpha = \frac{b}{BK} = \frac{x}{MK} = \frac{a}{AK}.$$

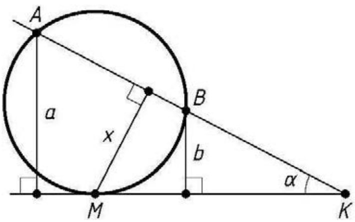
Перемножив почленно равенства

$$\frac{a}{AK} = \frac{x}{MK}, \quad \frac{b}{BK} = \frac{x}{MK},$$

получим

$$\frac{ab}{AK \cdot BK} = \frac{x^2}{MK^2}.$$

Поскольку $AK \cdot BK = MK^2$, то $x^2 = ab$. Следовательно, $x = \sqrt{ab}$.

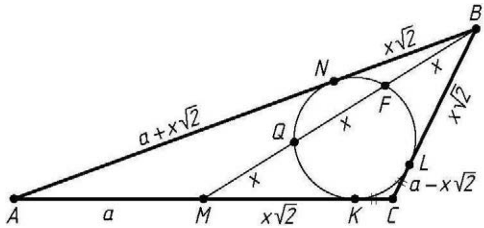


Если прямая AB параллельна касательной, то всё очевидно.

12.31. Окружность, вписанная в треугольник ABC, делит медиану BM на три равные части. Найдите отношение $BC : CA : AB$.

Ответ: $5 : 10 : 13$.

Решение. Пусть K, L и N — точки касания вписанной окружности со сторонами AC, BC и AB соответственно; F и Q — точки пересечения окружности с медианой BM (F лежит между B и Q). Предположим, что точка K расположена между точками M и C. Обозначим



$BC=a$, $BF=FQ=QM=x$. Тогда

$$BL^2 = BQ\cdot BF = 2x^2.$$

Поэтому $BL=x\sqrt{2}$, $BN=BL=x\sqrt{2}$. Аналогично находим, что $KM=x\sqrt{2}$, а так как $CL=CK$, то

$$MC = BC = a, \quad AC = 2a, \quad AB = AN+NB = a+x\sqrt{2}+x\sqrt{2} = a+2x\sqrt{2}.$$

Выразим медиану BM через стороны треугольника ABC:

$$4BM^2 = 2\cdot BC^2 + 2\cdot AB^2 - AC^2, \quad \text{или}$$
$$36x^2 = 2a^2 + 2(a+2x\sqrt{2})^2 - 4a^2.$$

Из этого уравнения находим, что $a=\dfrac{5x\sqrt{2}}{4}$. Тогда

$$BC = a = \frac{5x\sqrt{2}}{4}, \quad CA = 2a = \frac{5x\sqrt{2}}{2},$$
$$AB = a+2x\sqrt{2} = \frac{13x\sqrt{2}}{4}.$$

Следовательно, $BC:CA:AB=5:10:13$.

12.32. Две окружности радиусов R и r пересекаются в точках A и B и касаются прямой в точках C и D соответственно; N — точка пересечения прямых AB и CD (B между A и N). Найдите:

1) радиус окружности, описанной около треугольника ACD;

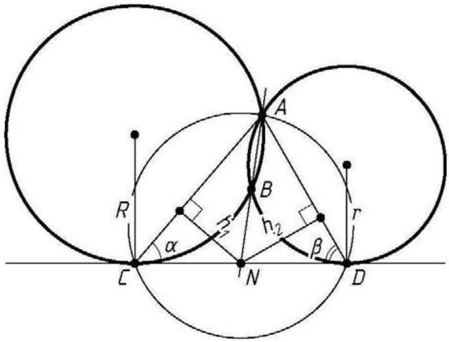
2) отношение высот треугольников NAC и NAD, опущенных из вершины N.

Ответ: $\sqrt{rR}$, $\sqrt{\dfrac{r}{R}}$.

Решение. Обозначим $\angle ACN=\alpha$, $\angle ADN=\beta$. Тогда по теореме синусов

$$AC = 2R\sin\alpha, \quad AD = 2r\sin\beta, \quad \frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AD}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{2R\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{2r\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Отсюда находим, что $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{\dfrac{r}{R}}$.



Если R_1 — радиус окружности, описанной около треугольника ACD, то

$$R_1 = \frac{AC}{2\sin\beta} = \frac{2R\sin\alpha}{2\sin\beta} = R\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{rR}.$$

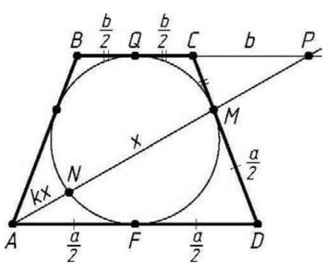
По теореме о касательной и секущей

$$CN^2 = NA\cdot NB, \quad DN^2 = NA\cdot NB.$$

Поэтому $CN = DN$. Если h_1 и h_2 — высоты, о которых говорится в условии задачи, то

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{CN\cdot\sin\alpha}{DN\cdot\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{\frac{r}{R}}.$$

12.33. Равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC $(AD > BC)$ описана около окружности, которая касается стороны CD в точке M. Отрезок AM пересекает окружность в точке N. Найдите отношение AD к BC, если $AN : NM = k$.



Ответ: $8k - 1$.

Решение. Обозначим $AD = a$, $BC = b$, $MN = x$. Пусть Q и F — точки касания окружности с основаниями BC и AD соответственно. Тогда по теореме о касательной и секущей

$$AF^2 = AM\cdot AN, \quad \text{или} \quad \frac{a^2}{4} = k(k+1)x^2.$$

Продолжим AM до пересечения с прямой BC в точке P. Из равенства $DM = FD = \frac{a}{2}$ и подобия треугольников CPM и DAM следует, что $\frac{CP}{CM} = \frac{AD}{DM} = 2$. Поэтому $CP = 2CM = 2CQ = b$.

По теореме о касательной и секущей

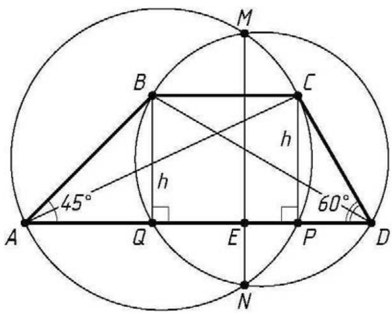
$$PQ^2 = PN \cdot PM, \quad \text{или} \quad \frac{9b^2}{4} = \left(\frac{bx(k+1)}{a} + x\right) \cdot \frac{bx(k+1)}{a}$$

(так как $PM = \frac{b}{a} \cdot AM$). Разделив почленно это равенство на доказанное ранее, получим, что $9bk = b(k+1) + a$. Отсюда находим, что $\frac{a}{b} = 8k - 1$.

12.34. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол A равен $45°$, угол D равен $60°$. На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках M и N. Хорда MN пересекает основание AD в точке E. Найдите отношение $AE : ED$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Решение. Пусть окружность с диаметром BD пересекает основание AD трапеции $ABCD$ в точке Q, а окружность с диаметром AC — в точке P. Тогда CP и BQ — высоты трапеции.



Обозначим $CP = BQ = h$. Тогда $DP = \frac{h}{\sqrt{3}}$, $AQ = h$. По теореме о произведениях отрезков пересекающихся хорд

$$DE \cdot EQ = NE \cdot EM = AE \cdot EP, \quad \text{или} \quad \left(\frac{h}{\sqrt{3}} + PE\right) EQ = (h + EQ)PE.$$

Отсюда находим, что $PE = \frac{EQ}{\sqrt{3}}$. Следовательно,

$$\frac{DE}{AE} = \frac{DP + PE}{AQ + QE} = \frac{\frac{h}{\sqrt{3}} + \frac{EQ}{\sqrt{3}}}{h + QE} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

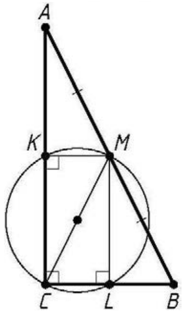
Задачи на доказательство и вычисление

12.35.1. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. На отрезке CM как на диаметре построена окружность.

а) Докажите, что она проходит через середины катетов.

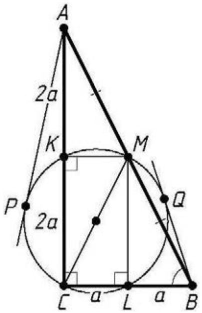
б) AP и BQ — касательные к этой окружности (P и Q — точки касания). Найдите отношение $AP : BQ$, если $\operatorname{tg}\angle ABC = 2$.

Ответ: 2 : 1.



Решение. а) Пусть окружность с диаметром CM пересекает катеты AC и BC прямоугольного треугольника ABC в точках K и L соответственно. Точка K лежит на окружности с диаметром CM, поэтому $\angle CKM = 90°$. Прямые KM и BC параллельны, так как они перпендикулярны одной и той же прямой AC. Значит, KM — средняя линия треугольника ABC. Следовательно, K — середина AC. Аналогично L — середина BC.

б) Обозначим $CL = BL = a$. Тогда



$$BC = 2a, \quad AC = BC \operatorname{tg}\angle ABC = 2a \cdot 2 = 4a,$$
$$AK = CK = 2a.$$

По теореме о касательной и секущей

$$BQ^2 = BL \cdot BC = a \cdot 2a = 2a^2,$$
$$AP^2 = AK \cdot AC = 2a \cdot 4a = 8a^2,$$

поэтому

$$\frac{AP^2}{BQ^2} = \frac{8a^2}{2a^2} = 4.$$

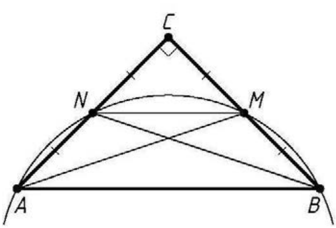
Следовательно, $\dfrac{AP}{BQ} = 2$.

12.36.1. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведены медианы AM и BN. Около четырёхугольника $ABMN$ можно описать окружность.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $ABMN$, если $AB = 4\sqrt{5}$.

Ответ: 5.



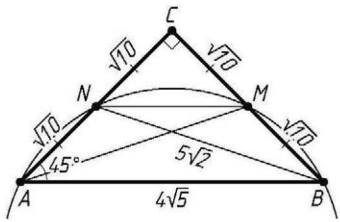
Решение. а) Отрезок MN — средняя линия треугольника ABC, поэтому $MN \parallel AB$. Поскольку $ABMN$ — трапеция, вписанная в окружность, она равнобедренная. Значит, $AN = BM$. Следовательно, $AC = 2AN = 2BM = BC$.

б) Гипотенуза AB равнобедренного прямоугольного треугольника равна $4\sqrt{5}$, значит, его катеты равны $\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{10}$. Поэтому $NC = \frac{1}{2}BC = \sqrt{10}$. Из прямоугольного треугольника BCN находим, что

$$BN = \sqrt{CN^2 + BC^2} = \sqrt{10 + 40} = 5\sqrt{2}.$$

Пусть R — радиус окружности, описанной около четырёхугольника $ABMN$. По теореме синусов

$$R = \frac{BN}{2\sin\angle BAN} = \frac{5\sqrt{2}}{2\sin 45^\circ} = 5.$$



12.37.1. Отрезок CD — биссектриса треугольника ABC. Окружность, проходящая через точки C и D, касается стороны AB и пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно.

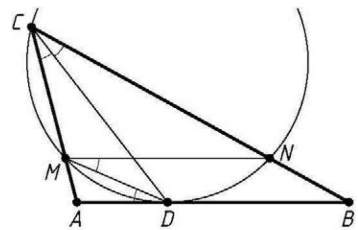
а) Докажите, что $MN \parallel AB$.

б) Найдите MN, если $AD = 2$, $BD = 4$ и $AM = 1$.

Ответ: 4,5.

Решение. а) Применяя теорему об угле между касательной и хордой и теорему о вписанных углах, получим, что

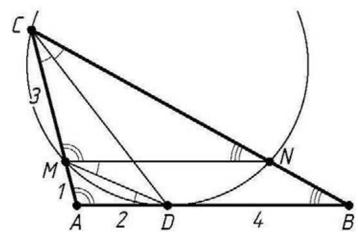
$$\angle ADM = \angle DCM = \angle DCN = \angle DMN.$$



Следовательно, $MN \parallel AB$.

б) По теореме о касательной и секущей $AM \cdot AC = AD^2$, откуда $AC = \frac{AD^2}{AM} = \frac{4}{1} = 4$. Тогда $MC = AC - AM = 4 - 1 = 3$. Поскольку $MN \parallel AB$, треугольник CMN подобен треугольнику CAB, причём коэффициент подобия равен $\frac{CM}{AC} = \frac{3}{4}$. Следовательно,

$$MN = \frac{3}{4}AB = \frac{3}{4}\cdot(2+4) = \frac{9}{2}.$$



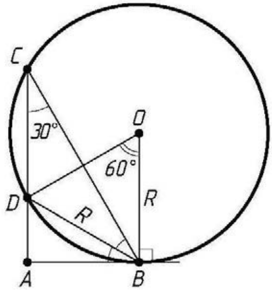
12.38.1. Из точки A проведены секущая и касательная к окружности радиуса R. Пусть B — точка касания, а D и C — точки пересечения секущей с окружностью, причём точка D лежит между A и C. Известно, что BD — биссектриса треугольника ABC и её длина равна R.

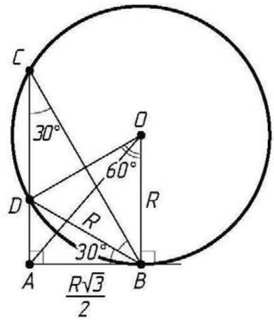
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите расстояние от точки A до центра окружности.

Ответ: $\frac{R\sqrt{7}}{2}$.

Решение. а) Пусть O — центр окружности. Поскольку $BD=R$, центральный угол BOD равен 60°, поэтому $\angle BCD = 30^\circ$. Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что $\angle ABD = \angle BCD = 30^\circ$, значит, $\angle ABC = 2\angle ABD = 60^\circ$. Следовательно, $\angle BAC = 90^\circ$.





б) Из прямоугольного треугольника BAD находим, что

$$AB = BD\cos 30^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно,

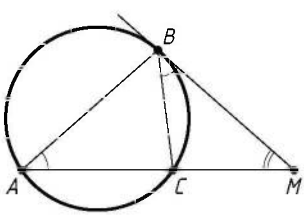
$$OA = \sqrt{AB^2+OB^2} = \sqrt{\frac{3R^2}{4}+R^2} = \frac{R\sqrt{7}}{2}.$$

12.39.1. Около треугольника ABC описана окружность. Касательная к окружности, проходящая через точку B, пересекает прямую AC в точке M.

а) Докажите, что треугольники AMB и BMC подобны.

б) Найдите отношение $AM:MC$, если известно, что $AB:BC=3:2$.

Ответ: $9:4$.



Решение. а) Пусть точка C лежит между A и M. Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что

$$\angle CBM = \angle CAB = \angle MAB.$$

Следовательно, треугольники AMB и BMC подобны по двум углам (угол при вершине M общий).

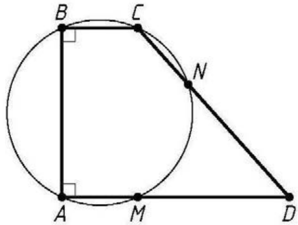
б) Коэффициент подобия треугольников AMB и BMC равен отношению соответствующих сторон, т. е. $\frac{AB}{BC}=\frac{3}{2}$. Значит, $AM=\frac{3}{2}BM$ и $BM=\frac{3}{2}MC$. Поэтому $AM=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}MC=\frac{9}{4}MC$. Следовательно, $\frac{AM}{MC}=\frac{9}{4}$.

12.40.1. Окружность, проходящая через вершины A, B и C прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямыми углами при вершинах A и B, пересекает отрезки AD и CD соответственно в точках M и N, причём $AM : AD = CN : CD = 1 : 3$.

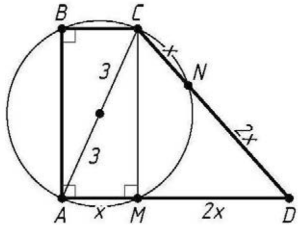
а) Докажите, что $CD = AD$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиус окружности равен 3.

Ответ: $12\sqrt{5}$.



Решение. а) Из точки D проведены к окружности секущие DMA и DNC. Значит, $DM \cdot AD = DN \cdot CD$, а так как $DM = \frac{2}{3}AD$ и $DN = \frac{2}{3}CD$, то $\frac{2}{3}AD^2 = \frac{2}{3}CD^2$. Следовательно, $CD = AD$.



б) Окружность описана около прямоугольного треугольника ABC, поэтому AC — её диаметр. Значит, $AC = 6$.

Точка M лежит на окружности с диаметром AC, значит, $CM \perp AD$, т. е. CM — высота трапеции.

Обозначим $AM = x$. Тогда $DM = 2x$, $CD = AD = 3x$. По теореме Пифагора

$$CM^2 = AC^2 - AM^2 = 36 - x^2, \quad CM^2 = CD^2 - DM^2 = 9x^2 - 4x^2 = 5x^2.$$

Из уравнения $36 - x^2 = 5x^2$ находим, что $x = \sqrt{6}$. Тогда

$$CM = \sqrt{36 - x^2} = \sqrt{36 - 6} = \sqrt{30}, \quad AM = \sqrt{6}, \quad AD = 3\sqrt{6}.$$

Следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CM = \frac{1}{2}(AD + AM) \cdot CM = \frac{1}{2}(3\sqrt{6} + \sqrt{6})\sqrt{30} = 12\sqrt{5}.$$

12.41.1. Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 26 и 38 соответственно.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная основанию, пересекает окружность, вписанную в треугольник.

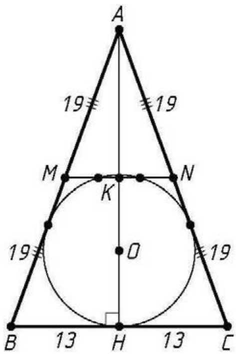
б) Найдите длину отрезка этой средней линии, заключённого внутри окружности.

Ответ: 5.

Решение. а) Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC со сторонами $AB = AC = 38$, $BC = 26$, AH — высота треугольника, точки M и N — середины сторон AB и AC соответственно, K — точка пересечения AH и MN, p — полупериметр треугольника ABC.

Поскольку MN — средняя линия равнобедренного треугольника, точка K — общая середина MN и AH.

Из прямоугольного треугольника ABH находим, что



$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{38^2 - 13^2} = 5\sqrt{51},$$

значит, $KH = \frac{1}{2}AH = \frac{5\sqrt{51}}{2}$.

Пусть r — радиус вписанной окружности треугольника ABC. Тогда

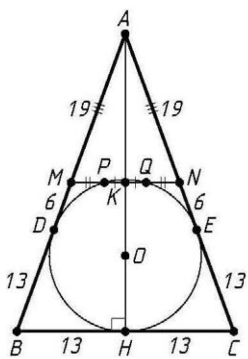
$$r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot AH}{AB + BH} = \frac{13 \cdot 5\sqrt{51}}{38 + 13} = \frac{65\sqrt{51}}{51},$$

а диаметр вписанной окружности равен $2r = \frac{130\sqrt{51}}{51}$. Поскольку

$$\frac{130\sqrt{51}}{51} > \frac{5\sqrt{51}}{2} \iff \frac{130}{51} > \frac{5}{2} \iff 260 > 255,$$

диаметр окружности больше KH. Следовательно, вписанная окружность пересекает среднюю линию MN треугольника.

б) Пусть вписанная окружность касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно, а средняя линия MN пересекает эту окружность в точках P и Q (P между M и Q). Тогда (см. [2], с. 109)



$$AD = p - BC = 51 - 26 = 25,$$
$$MD = AD - AM = 25 - 19 = 6.$$

По теореме о касательной и секущей $MD^2 = MP \cdot MQ$, а так как

$$MP = NQ = \frac{1}{2}(MN - PQ) = \frac{1}{2}(13 - PQ),$$

$$MQ = MP + PQ = \frac{1}{2}(MN + PQ) = \frac{1}{2}(13 + PQ),$$

то $36 = \frac{1}{4}(13 - PQ)(13 + PQ)$. Отсюда находим, что $PQ = 5$.

12.42.1. Пусть CQ — биссектриса треугольника ABC. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проходящая через точку C, пересекает прямую AB в точке D.

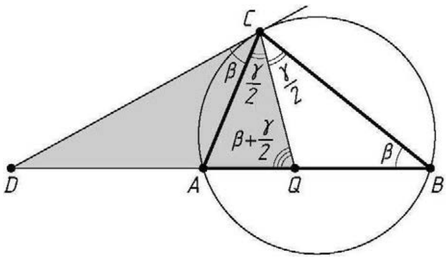
а) Докажите, что треугольник CDQ равнобедренный.

б) Найдите CD, если $BQ = a$ и $AQ = b$ ($a > b$).

Ответ: $\dfrac{ab}{a-b}$.

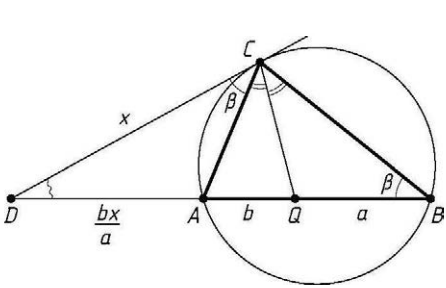
Решение. а) Предположим, что точка A лежит между B и D. Обозначим $\angle ABC=\beta$, $\angle ACB=\gamma$. Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что $\angle ACD=\angle ABC=\beta$, а так как CQ — биссектриса угла ACB, то $\angle ACQ=\frac{\gamma}{2}$. Поэтому $\angle DCQ=\beta+\frac{\gamma}{2}$. Аналогично для случая, когда точка B лежит между A и D.

Угол DQC — внешний угол треугольника BCQ, поэтому $\angle DQC = \beta+\frac{\gamma}{2}$. Значит, $\angle DCQ=\angle DQC$. Следовательно, треугольник CDQ равнобедренный.



б) Обозначим $CD=x$. Треугольник ADC подобен треугольнику CDB по двум углам, причём коэффициент подобия равен $\frac{AC}{BC}=\frac{AQ}{BQ}=\frac{b}{a}$ (биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам). Значит, $AD=\frac{b}{a}\cdot CD=\frac{bx}{a}$.

Тогда $x=CD=DQ=AQ+AD=b+\frac{bx}{a}$. Отсюда находим, что $CD=x=\dfrac{ab}{a-b}$.



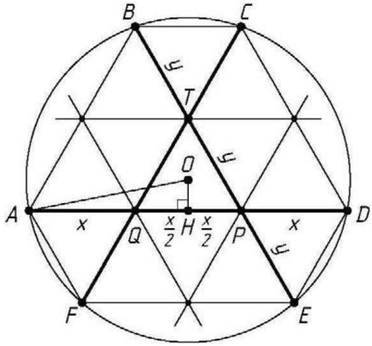
12.43.1. Хорды AD, BE и CF окружности делят друг друга на три равные части.

а) Докажите, что эти хорды равны.

б) Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$, если точки A, B, C, D, E и F последовательно расположены на окружности, а радиус окружности равен $2\sqrt{21}$.

Ответ: $117\sqrt{3}$.

Решение. а) Пусть хорды AD и BE пересекаются в точке P. Положим $AD = 3x$ и $BE = 3y$. По теореме о произведении отрезков пересекающихся хорд $AP \cdot PD = BP \cdot PE$, или $x \cdot 2x = y \cdot 2y$. Отсюда находим, что $x = y$. Значит, $AD = BE$. Аналогично $AD = CF$.



б) Пусть хорды AD и CF пересекаются в точке Q, а хорды BE и CF — в точке T. Равные хорды равноудалены от центра окружности, поэтому центр равностороннего треугольника PQT совпадает с центром O данной окружности.

Опустим перпендикуляр OH из центра окружности на сторону PQ. Тогда H — середина AD, а OH — радиус вписанной окружности равностороннего треугольника PQT со стороной x. Значит,

$$OH = \frac{x\sqrt{3}}{6}, \quad AH = \frac{1}{2}AD = \frac{3x}{2}.$$

По теореме Пифагора $OH^2 + AH^2 = OA^2$, или

$$\frac{1}{12}x^2 + \frac{9}{4}x^2 = (2\sqrt{21})^2.$$

Отсюда находим, что $x = 6$.

Через точки P, Q и T проведём прямые, соответственно параллельные хордам CF, BE и AD. Эти прямые и хорды CF, BE и AD разбивают шестиугольник $ABCDEF$ на 13 равных равносторонних треугольников со стороной x. Площадь каждого из них равна

$$\frac{1}{2}PQ \cdot TH = \frac{1}{2}x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}.$$

Следовательно,

$$S_{ABCDEF} = 13 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 13 \cdot \frac{36\sqrt{3}}{4} = 13 \cdot 9\sqrt{3} = 117\sqrt{3}.$$

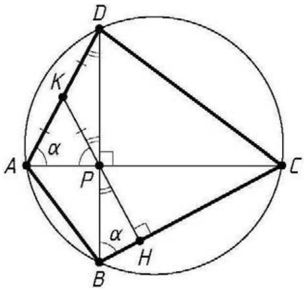
12.44.1. Четырёхугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями AC и BD вписан в окружность.

а) Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей четырёхугольника перпендикулярно стороне BC, делит пополам сторону AD.

б) Найдите стороны четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AC=84$, $BD=77$, а диаметр окружности равен 85.

Ответ: 40, 68, 75, 51.

Решение. а) Пусть P — точка пересечения диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$, PH — перпендикуляр, опущенный из точки P на сторону BC, K — точка пересечения прямой PH со стороной AD. Обозначим $\angle DAC=\angle DBC=\alpha$. Тогда

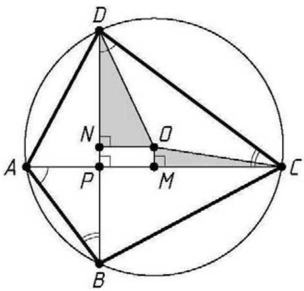


$$\angle KPD = \angle BPH = 90^\circ - \alpha,$$

$$\angle KDP = 90^\circ - \alpha = \angle KPD,$$

$$\angle APK = 90^\circ - \angle KPD = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha.$$

Значит, треугольники PKD и PKA равнобедренные, $KA=KP=KD$. Следовательно, K — середина стороны AD.



б) Будем считать, что центр O описанной окружности четырёхугольника $ABCD$ расположен внутри треугольника CPD.

Пусть точки M и N — проекции точки O на диагонали AC и BD соответственно. Тогда M и N — середины диагоналей.

Из прямоугольных треугольников OMC и OND находим, что

$$OM = \sqrt{OC^2 - MC^2} = \sqrt{\left(\frac{85}{2}\right)^2 - 42^2} = \sqrt{\left(\frac{85}{2} - 42\right)\left(\frac{85}{2} + 42\right)} = \\ = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{169}{2}} = \frac{13}{2},$$

$$ON = \sqrt{OD^2 - ND^2} = \sqrt{\left(\frac{85}{2}\right)^2 - \left(\frac{77}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{85}{2} - \frac{77}{2}\right)\left(\frac{85}{2} + \frac{77}{2}\right)} = \\ = \sqrt{\frac{8}{2}\cdot\frac{162}{2}} = 18.$$

Тогда

$$NP = OM = \frac{13}{2}, \quad BP = BN - NP = \frac{77}{2} - \frac{13}{2} = 32,$$
$$DP = BD - BP = 77 - 32 = 45, \quad MP = ON = 18,$$
$$AP = AM - MP = 42 - 18 = 24, \quad CP = AC - AP = 84 - 24 = 60.$$

Из прямоугольных треугольников ABP и BCP находим, что

$$AB = \sqrt{AP^2 + BP^2} = \sqrt{24^2 + 32^2} = 40,$$
$$BC = \sqrt{CP^2 + BP^2} = \sqrt{60^2 + 32^2} = 68.$$

Треугольник CPD подобен треугольнику BPA с коэффициентом $\frac{PC}{PB} = \frac{60}{32} = \frac{15}{8}$, поэтому

$$CD = \frac{15}{8}AB = \frac{15}{8} \cdot 40 = 75.$$

Аналогично находим, что

$$AD = \frac{24}{32}BC = \frac{3}{4} \cdot 68 = 51.$$

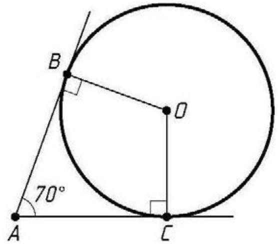
Для любого другого возможного расположения центра O получим тот же результат.

§ 13. Углы, связанные с окружностью

Подготовительные задачи

13.1. Окружность касается сторон угла с вершиной A в точках B и C. Найдите градусные меры дуг, на которые окружность делится точками B и C, если $\angle BAC = 70^\circ$.

Ответ: 110°, 250°.



Решение. Пусть O — центр окружности. В четырёхугольнике $ABOC$ углы при вершинах B и C прямые, значит,

$$\angle BOC = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ,$$

следовательно, градусная мера меньшей дуги BC также равна 110°. Тогда градусная мера большей дуги BC равна $360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$.

13.2. Пусть AB и AC — равные хорды, MAN — касательная, градусная мера дуги BC, не содержащей точки A, равна 200°. Найдите углы MAB и NAC.

Ответ: $\angle MAB = \angle NAC = 40^\circ$ или $\angle MAB = \angle NAC = 140^\circ$.

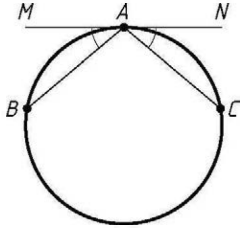
Решение. Заметим, что

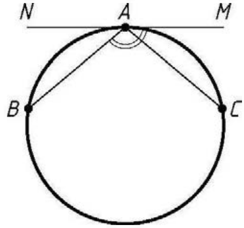
$$\smile CAB = 360^\circ - 200^\circ = 160^\circ, \quad \smile AB = \smile AC = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ.$$

Если угол MAB острый (см. рисунок слева), то

$$\angle MAB = \frac{1}{2}\smile AB = 40^\circ.$$

Тогда и $\angle NAC = 40^\circ$.





Если же угол MAB тупой (см. рисунок справа), то

$$\angle MAB = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ.$$

Тогда и $\angle NAC = 140^\circ$.

13.3. Треугольник ABC равнобедренный. Радиус OA описанного круга образует с основанием AC угол OAC, равный $20°$. Найдите угол BAC.

Ответ: $35°$ или $55°$.

Решение. Если точки O и B лежат по разные стороны от прямой AC (см. рисунок слева), то

$$\smile ABC = \angle AOC = 180° - 2\cdot 20° = 140°.$$

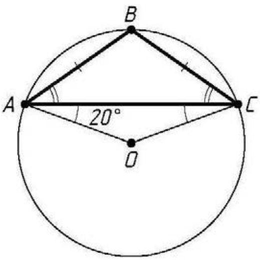
Тогда угол ABC опирается на дугу, угловая величина которой равна

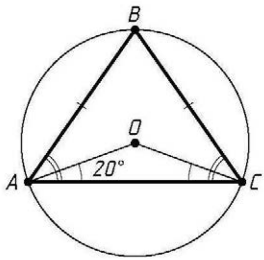
$$360° - 140° = 220°.$$

Поэтому

$$\angle ABC = 110°, \quad \angle BAC = \frac{180° - 110°}{2} = 35°.$$

Если точки O и B лежат по одну сторону от прямой AC (см. рисунок справа), то аналогично находим, что $\angle BAC = 55°$.



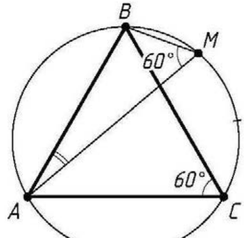


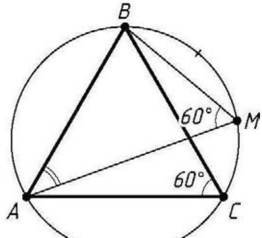
13.4. Окружность описана около равностороннего треугольника ABC. На дуге BC, не содержащей точку A, расположена точка M, делящая градусную меру этой дуги в отношении $1:2$. Найдите углы треугольника AMB.

Ответ: $20°$, $60°$, $100°$ или $40°$, $60°$, $80°$.

Решение. Пусть $\smile BM : \smile CM = 1:2$ (см. рисунок слева). Тогда

$$\smile BM = \frac{1}{3}\smile BMC = \frac{1}{3}\cdot 120° = 40°.$$





По теореме о вписанном угле

$$\angle BAM = \frac{1}{2}\smile BM = 20^\circ,$$

а так как вписанные углы AMB и ACB опираются на одну и ту же дугу, то $\angle AMB = \angle ACB = 60^\circ$. Следовательно,

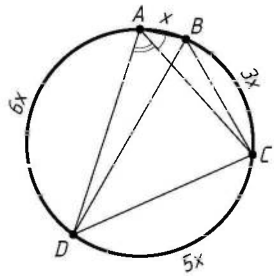
$$\angle ABM = 180^\circ - 20^\circ - 60^\circ = 100^\circ.$$

Если же $\smile BM : \smile CM = 2 : 1$ (см. рисунок справа), то аналогично найдём, что

$$\angle BAM = 40^\circ, \quad \angle AMB = 60^\circ, \quad \angle ABM = 80^\circ.$$

13.5. Точки A, B, C и D последовательно расположены на окружности. Известно, что градусные меры меньших дуг AB, BC, CD и AD относятся как $1:3:5:6$. Найдите углы четырёхугольника $ABCD$.

Ответ: 96°, 132°, 84°, 48°.



Решение. Пусть градусная мера меньшей дуги AB равна x. Тогда градусные меры последовательных дуг BC, CD и AD соответственно равны $3x$, $5x$ и $6x$. Из уравнения $x + 3x + 5x + 6x = 360^\circ$ находим, что $x = 24^\circ$, следовательно, градусные меры последовательных дуг AB, BC, CD и AD соответственно равны 24°, $3 \cdot 24^\circ = 72^\circ$, $5 \cdot 24^\circ = 120^\circ$ и $6 \cdot 24^\circ = 144^\circ$.

Градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается, следовательно,

$$\angle BAD = \frac{1}{2}\smile BCD = \frac{1}{2}(72^\circ + 120^\circ) = 96^\circ,$$

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\smile ADC = \frac{1}{2}(144^\circ + 120^\circ) = 132^\circ,$$

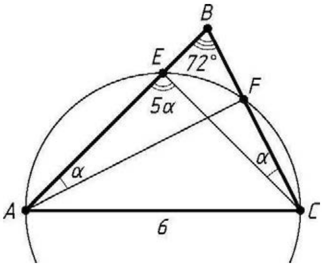
$$\angle BCD = \frac{1}{2}\smile BAD = \frac{1}{2}(24^\circ + 144^\circ) = 84^\circ,$$

$$\angle ADC = \frac{1}{2}\smile ABC = \frac{1}{2}(24^\circ + 72^\circ) = 48^\circ.$$

13.6. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC, пересекая сторону AB в точке E и сторону BC в точке F. Угол AEC в 5 раз больше угла BAF, а угол ABC равен 72°. Найдите радиус окружности, если $AC = 6$.

Ответ: 3.

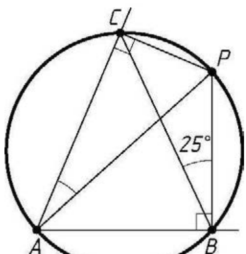
Решение. Обозначим $\angle BAF = \alpha$. Тогда $\angle AEC = 5\alpha$. Вписанные углы ECF и EAF опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle BCE = \angle ECF = \angle EAF = \angle BAF = \alpha$.



По теореме о внешнем угле треугольника $\angle ABC + \angle BCE = \angle AEC$, или $72^\circ + \alpha = 5\alpha$, откуда находим, что $\alpha = \frac{1}{4} \cdot 72^\circ = 18^\circ$, значит, $\angle AEC = 5\alpha = 5 \cdot 18^\circ = 90^\circ$.

Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника AEC, — середина гипотенузы AC, поэтому радиус окружности равен половине AC, т. е. 3.

13.7. Из точки P, расположенной внутри острого угла с вершиной A, опущены перпендикуляры PB и PC на стороны угла. Известно, что $\angle CBP = 25^\circ$. Найдите угол CAP.



Ответ: 25°.

Решение. Из точек B и C отрезок AP виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром AP. Вписанные в эту окружность углы CAP и CBP опираются на одну и ту же дугу, следовательно,

$$\angle CAP = \angle CBP = 25^\circ.$$

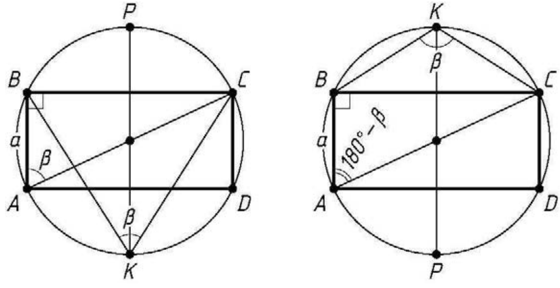
13.8. В окружность вписан прямоугольник $ABCD$, сторона AB которого равна a. Из конца K диаметра KP, параллельного стороне AB, сторона BC видна под углом β. Найдите радиус окружности.

Ответ: $\frac{a}{2|\cos\beta|}$.

Решение. Пусть R — искомый радиус. Рассмотрим случай, когда точка K лежит на дуге AD, не содержащей точки B (см. рисунок слева). Тогда в прямоугольном треугольнике ABC известно, что

$$\angle BAC = \angle BKC = \beta, \quad 2R = AC = \frac{AB}{\cos\angle BAC} = \frac{a}{\cos\beta}.$$

Следовательно, $R = \frac{a}{2\cos\beta}$.



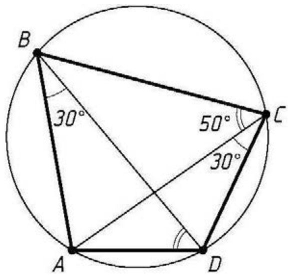
Если точка K лежит на дуге ABD (см. рисунок справа), то аналогично найдём, что $R = -\dfrac{a}{2\cos\beta}$.

13.9. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle BCD = 80^\circ$, $\angle ACB = 50^\circ$ и $\angle ABD = 30^\circ$. Найдите угол ADB.

Ответ: 50°.

Решение. Четырёхугольник $ABCD$ выпуклый, поэтому луч CA проходит между сторонами угла BCD, значит,

$$\angle ACD = \angle BCD - \angle ACB = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ.$$



Из точек B и C, лежащих по одну сторону от прямой AD, отрезок AD виден под одним и тем же углом, значит, точки B, C, A и D лежат на одной окружности. Вписанные в эту окружность углы ADB и ACB опираются на одну и ту же дугу, следовательно,

$$\angle ADB = \angle ACB = 50^\circ.$$

13.10. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ACB = 25^\circ$, $\angle ACD = 40^\circ$ и $\angle BAD = 115^\circ$. Найдите угол ADB.

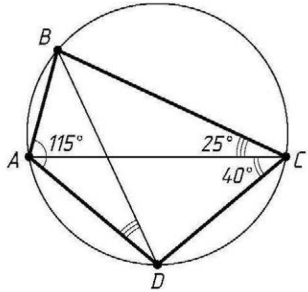
Ответ: 25°.

Решение. Четырёхугольник $ABCD$ выпуклый, поэтому луч CA проходит между сторонами угла BCD, значит,

$$\angle BCD = \angle ACB + \angle ACD = 25^\circ + 40^\circ = 65^\circ.$$

Тогда

$$\angle BCD + \angle BAD = 65^\circ + 115^\circ = 180^\circ,$$



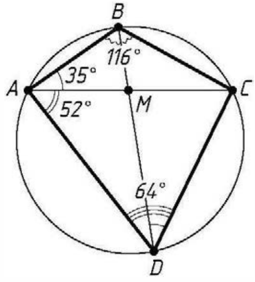
поэтому четырёхугольник $ABCD$ вписанный, т. е. точки A, B, C и D лежат на одной окружности. Вписанные в эту окружность углы ADB и ACB опираются на одну и ту же дугу, следовательно,

$$\angle ADB = \angle ACB = 25^\circ.$$

13.11. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ABC = 116^\circ$, $\angle ADC = 64^\circ$, $\angle CAB = 35^\circ$ и $\angle CAD = 52^\circ$. Найдите угол между диагоналями, опирающийся на сторону AB.

Ответ: 81°.

Решение. Пусть диагонали данного четырёхугольника пересекаются в точке M. Поскольку



$$\angle ABC + \angle ADC = 116^\circ + 64^\circ = 180^\circ,$$

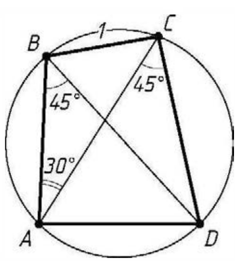
около данного четырёхугольника можно описать окружность. Искомый угол AMB есть внешний угол треугольника AMD. Поэтому он равен

$$\angle CAD + \angle ADB = 52^\circ + \angle ADC - \angle BDC = \\ = 52^\circ + 64^\circ - 35^\circ = 81^\circ.$$

13.12. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ABD = \angle ACD = 45^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $BC = 1$. Найдите AD.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Решение. Поскольку из точек B и C, расположенных по одну сторону от прямой AD, отрезок AD виден под одним и тем же углом, то



точки A, B, C и D лежат на одной окружности. Пусть R — радиус этой окружности. Тогда из треугольника ABC находим, что

$$R = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{1}{2\sin 30^\circ} = 1,$$

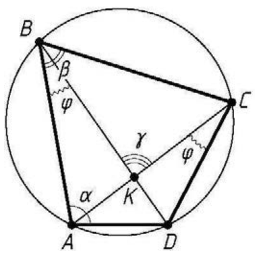
а из треугольника ABD — что

$$AD = 2R\sin\angle ABD = 2\sin 45^\circ = \sqrt{2}.$$

13.13. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle DAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BKC = \gamma$, где K — точка пересечения диагоналей. Найдите угол ACD.

Ответ: $\dfrac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$.

Решение. Обозначим $\angle ABD = \angle ACD = \varphi$. Тогда



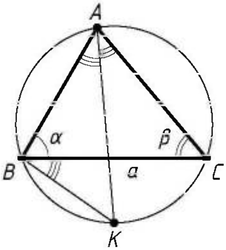
$$\angle DBC = \beta - \varphi, \quad \angle CAD = \angle DBC = \beta - \varphi,$$
$$\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD = \alpha - (\beta - \varphi),$$
$$\gamma = \angle BKC = \angle BAC + \angle ABD = \\ = (\alpha - \beta + \varphi) + \varphi = \alpha - \beta + 2\varphi.$$

Следовательно,

$$\varphi = \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}.$$

Тренировочные задачи

13.14. Около треугольника ABC, в котором $BC=a$, $\angle B=\alpha$, $\angle C=\beta$, описана окружность. Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке K. Найдите AK.



Ответ: $\dfrac{a\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin(\beta+\alpha)}$.

Решение. Пусть R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Тогда

$$\angle BAC = 180^\circ - (\beta+\alpha),$$

$$2R = \frac{BC}{\sin(\beta+\alpha)} = \frac{a}{\sin(\beta+\alpha)},$$

$$\angle ABK = \angle ABC + \angle CBK = \alpha + \frac{1}{2}(180^\circ - (\alpha+\beta)) = 90^\circ + \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Следовательно,

$$AK = 2R\sin\angle ABK = 2R\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2R\cos\frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{a\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin(\beta+\alpha)}.$$

13.15. Треугольники ABC и ADC имеют общую сторону AC; стороны AD и BC пересекаются в точке M. Углы B и D равны по 40°. Расстояние между вершинами D и B равно стороне AB, $\angle AMC=70^\circ$. Найдите углы треугольников ABC и ADC.

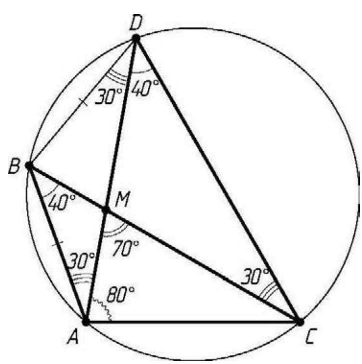
Ответ: $\angle BAC=110^\circ$, $\angle BCA=30^\circ$, $\angle DCA=60^\circ$, $\angle DAC=80^\circ$.

Решение. Точки A, B, C, D лежат на одной окружности; AMC — внешний угол треугольника DMC. Поэтому $\angle DCM=30^\circ$. Тогда

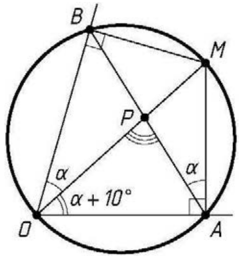
$$\angle BCA = \angle ADB = \angle BAD = \angle BCD = \angle DCM = 30^\circ.$$

Следовательно,

$$\angle DCA = 60^\circ, \quad \angle BAC = 110^\circ, \quad \angle DAC = 80^\circ.$$



13.16. Внутри угла с вершиной O взята некоторая точка M. Луч OM образует со сторонами угла углы, один из которого больше другого на 10°; A и B — проекции точки M на стороны угла. Найдите угол между прямыми AB и OM.



Ответ: 80°.

Решение. Пусть

$$\angle BOM = \alpha, \quad \angle AOM = \alpha + 10^\circ,$$

P — точка пересечения прямых AB и OM.

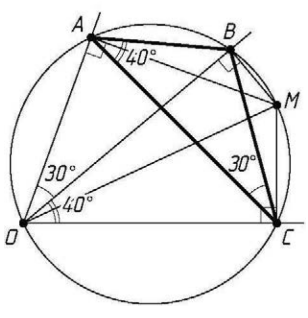
Поскольку отрезок OM виден из точек A и B под прямым углом, то точки A и B лежат на окружности с диаметром OM, а APO — внешний угол треугольника APM. Следовательно,

$$\angle APO = \angle AMO + \angle BAM = (90^\circ - \angle AOM) + \angle BOM = \\ = 90^\circ - (\alpha + 10^\circ) + \alpha = 80^\circ.$$

13.17. Вершина угла величиной 70° служит началом луча, образующего с его сторонами углы 30° и 40°. Из некоторой точки M на этот луч и на стороны угла опущены перпендикуляры, основания которых — A, B и C. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: 30°, 40°, 110°.

Решение. Пусть A и C — основания перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны данного угла с вершиной O, точка B — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на луч, проходящий между сторонами угла AOC, причём $\angle AOB = 30^\circ$ и $\angle COB = 40^\circ$.



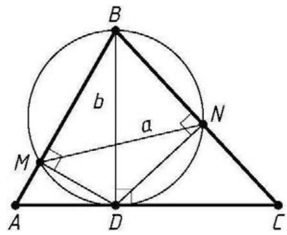
Из точек A, B и C отрезок OM виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром OM. Вписанные в эту окружность углы ACB и AOB опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle ACB = \angle AOB = 30^\circ$. Аналогично $\angle BAC = \angle COB = 40^\circ$. Следовательно, $\angle ABC = 180^\circ - 30^\circ - 40^\circ = 110^\circ$.

13.18. В остроугольном треугольнике ABC из основания D высоты BD опущены перпендикуляры DM и DN на стороны AB и BC. Известно, что $MN = a$, $BD = b$. Найдите угол ABC.

Ответ: $\arcsin\frac{a}{b}$.

Решение. Поскольку $\angle BMD = \angle BND = 90^\circ$, то отрезок BD виден из точек M и N под прямым углом, поэтому точки M и N лежат на окружности с диаметром $BD = 2R$, где R — радиус этой окружности. Значит, $MN = 2R\sin\angle ABC$. Следовательно,

$$\sin\angle ABC = \frac{MN}{2R} = \frac{MN}{BD} = \frac{a}{b}.$$



13.19. Хорда делит окружность на дуги, градусные меры которых относятся как $11:16$. Найдите угол между касательными, проведёнными через концы этой хорды.

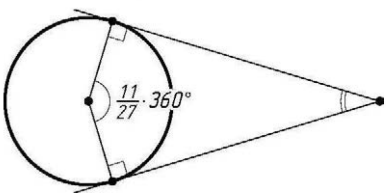
Ответ: $33^\circ 20' = \frac{5\pi}{27}$.

Решение. Угловая величина меньшей из двух дуг равна

$$\frac{11}{27}\cdot 360^\circ = \frac{11}{3}\cdot 40^\circ.$$

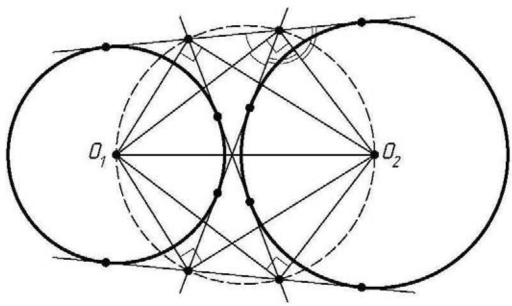
Следовательно, угол между касательными равен

$$180^\circ - \frac{11}{3}\cdot 40^\circ = 33^\circ 20'.$$



13.20. Расстояние между центрами непересекающихся окружностей равно a. Докажите, что точки пересечения общих внешних касательных с общими внутренними касательными лежат на одной окружности, и найдите её радиус.

Ответ: $\frac{a}{2}$.

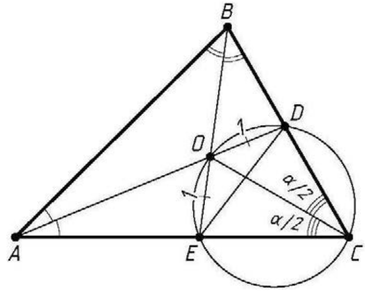


Решение. Поскольку центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, а угол между биссектрисами смежных углов прямой, то из каждой точки пересечения общих внешних касательных с общими внутренними отрезок O_1O_2 с концами в центрах окружностей виден под прямым углом. Значит, каждая такая точка лежит на окружности с диаметром $O_1O_2 = a$. Следовательно, радиус окружности равен $\frac{a}{2}$.

13.21. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE, пересекающиеся в точке O. Известно, что $OE = 1$, а вершина C лежит на окружности, проходящей через точки E, D и O. Найдите стороны и углы треугольника EDO.

Ответ: 1, 1, $\sqrt{3}$; 120°, 30°, 30°.

Решение. Поскольку биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, то CO — биссектриса угла ACB. Поэтому $OD = OE = 1$.



Обозначим $\angle ACB = \alpha$. Тогда

$$\angle DOE = \angle AOB = 180^\circ - \angle OAB - \angle OBA = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle B =$$
$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACB) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Поскольку четырёхугольник $CEOD$ вписанный, то

$$\angle ECD + \angle DOE = 180^\circ, \quad \text{или} \quad \alpha + \left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = 180^\circ.$$

Отсюда находим, что $\alpha = 60^\circ$. Следовательно,

$$\angle DOE = 120^\circ, \quad \angle DEO = \angle EDO = 30^\circ, \quad DE = \sqrt{3}.$$

13.22. В треугольнике ABC угол B прямой, величина угла A равна $\alpha \neq 45^\circ$, точка D — середина гипотенузы. Точка C_1 симметрична точке C относительно прямой BD. Найдите угол AC_1B.

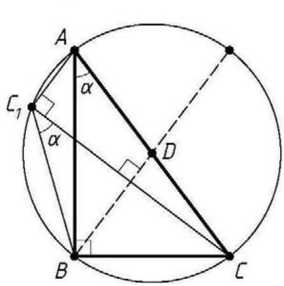
Ответ: $90^\circ + \alpha$, если $\alpha < 45^\circ$; $90^\circ - \alpha$, если $\alpha > 45^\circ$.

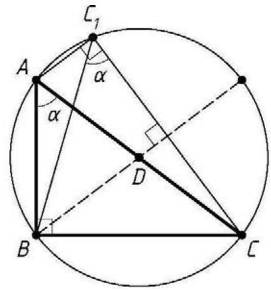
Решение. Пусть $\angle BAC < 45^\circ$ (см. рисунок слева). Точка D — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Поскольку $C_1D = DC$, то точка C_1 принадлежит этой окружности. Поэтому

$$\angle BC_1C = \angle BAC = \alpha,$$

а $\angle AC_1C = 90^\circ$, так как он вписанный и опирается на диаметр AC. Следовательно, $\angle AC_1B = 90^\circ + \alpha$.

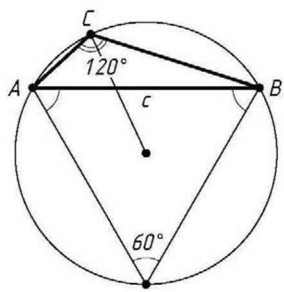
Если $\angle BAC > 45^\circ$ (см. рисунок справа), то аналогично получим, что $\angle AC_1B = 90^\circ - \alpha$.





13.23. На стороне AB треугольника ABC во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник. Найдите расстояние между его центром и вершиной C, если $AB = c$ и $\angle C = 120^\circ$.

Ответ: $\dfrac{c\sqrt{3}}{3}$.

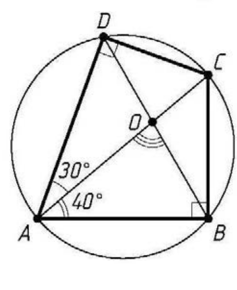


Решение. Точка C лежит на окружности, описанной около построенного равностороннего треугольника ($60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$), поэтому искомое расстояние равно радиусу этой окружности, т. е.

$$R = \frac{c}{2\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sqrt{3}} = \frac{c\sqrt{3}}{3}.$$

13.24. В четырёхугольнике $ABCD$ углы B и D прямые. Диагональ AC образует со стороной AB острый угол в 40°, а со стороной AD — угол в 30°. Найдите острый угол между диагоналями AC и BD.

Ответ: 80°.



Решение. Точки A, B, C и D лежат на окружности с диаметром AC. Поэтому

$$\smile AB = 2\angle ACB = 2(90^\circ - \angle CAB) = 2(90^\circ - 40^\circ) = 100^\circ, \quad \smile DC = 2\angle DAC = 60^\circ.$$

Если O — точка пересечения диагоналей, то

$$\angle AOB = \frac{\smile AB + \smile DC}{2} = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ.$$

13.25. В прямоугольном треугольнике ABC угол при вершине A равен 60°, O — середина гипотенузы AB, P — центр вписанной окружности. Найдите угол POC.

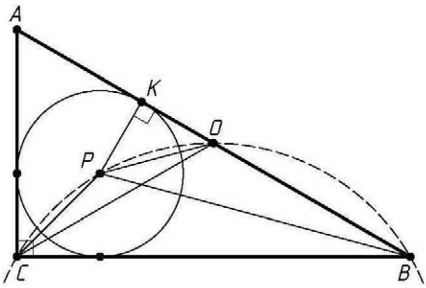
Ответ: 15°.

Решение. Первый способ. Поскольку $OC = OA$, а $\angle A = 60^\circ$, то треугольник AOC равносторонний, поэтому $\angle BOC = 120^\circ$. С другой стороны,

$$\angle BPC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

как угол между биссектрисами углов B и C треугольника ABC. Значит, точки B, O, P и C расположены на одной окружности. Следовательно,

$$\angle POC = \angle PBC = 15^\circ.$$



Второй способ. Поскольку $OC = OA$, а $\angle A = 60^\circ$, то треугольник AOC равносторонний, поэтому $\angle AOC = 60^\circ$. Пусть K — точка касания вписанной окружности с гипотенузой AB, $AB = 2a$, r — радиус вписанной окружности, p — полупериметр треугольника ABC. Тогда

$$OK = AO - AK = a - (p - BC) = a - \frac{AB + AC - BC}{2} =$$
$$= a - \frac{2a + a - a\sqrt{3}}{2} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2},$$

$$KP = r = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{a + a\sqrt{3} - 2a}{2} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}.$$

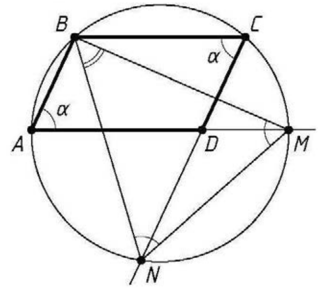
Значит, в прямоугольном треугольнике OKP катеты OK и KP равны. Следовательно, $\angle KOP = 45^\circ$, а

$$\angle POC = \angle AOC - \angle KOP = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ.$$

13.26. В параллелограмме $ABCD$ острый угол равен α. Окружность радиуса r проходит через вершины A, B, C и пересекает прямые AD и CD в точках M и N. Найдите площадь треугольника BMN.

Ответ: $2r^2\sin^2\alpha\sin 2\alpha$.

Решение. Предположим, что точка M лежит на прямой AD, а точка N — на прямой CD.



Пусть $\angle BAD = \alpha$. Тогда

$$\angle BNM = \angle BAD = \alpha, \quad \angle BMN = \angle BCN = \alpha.$$

Отсюда находим, что

$$BN = BM = 2r\sin\alpha, \quad \angle MBN = 180^\circ - 2\alpha.$$

Поэтому

$$S_{\Delta BMN} = \frac{1}{2}\cdot BN\cdot BM\sin\angle NBM = \frac{1}{2}(2r\sin\alpha)^2\sin(180^\circ - 2\alpha) = 2r^2\sin^2\alpha\sin 2\alpha.$$

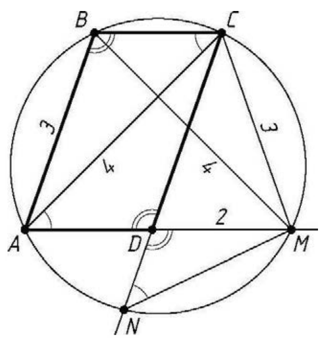
Если точка M лежит на прямой CD, а точка N — на прямой AD, то получим тот же результат.

13.27. Окружность, проходящая через вершины A, B и C параллелограмма $ABCD$, пересекает прямые AD и CD в точках M и N соответственно. Точка M удалена от вершин B, C и D на расстояния 4, 3 и 2 соответственно. Найдите MN.

Ответ: $\frac{8}{3}$.

Решение. Поскольку

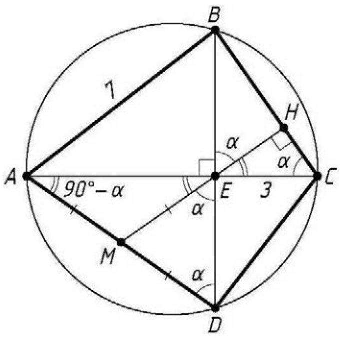
$$\angle ABC = \angle ADC = \angle NDM,$$
$$\angle ACB = \angle MAC = \angle MNC,$$



треугольники NDM и CBA подобны. Следовательно, $\frac{MN}{AC} = \frac{MD}{AB}$. Кроме того, поскольку $ABCM$ — равнобедренная трапеция, $AB = MC = 3$, $AC = MB = 4$. Поэтому

$$MN = \frac{AC\cdot MD}{AB} = \frac{4\cdot 2}{3} = \frac{8}{3}.$$

13.28. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к BC, пересекает сторону AD в точке M. Докажите, что EM — медиана треугольника AED, и найдите её длину, если $AB = 7$, $CE = 3$, $\angle ADB = \alpha$.



Ответ: $\dfrac{\sqrt{49-9\operatorname{tg}^2\alpha}}{2\sin\alpha}$.

Решение. Вписанные углы ACB и ADB опираются на одну и ту же дугу, поэтому

$$\angle ECB=\angle ACB=\angle ADB=\alpha.$$

Пусть прямые ME и BC пересекаются в точке H. Тогда

$$\angle DEM=\angle BEH=\angle BCE=\alpha,$$

поэтому $ME=MD$. Аналогично $ME=$ $=MA$. Следовательно, M — середина AD, т. е. EM — медиана треугольника AED.

Из прямоугольных треугольников BCE, ABE и AED находим, что

$$BE=CE\operatorname{tg}\alpha=3\operatorname{tg}\alpha,\quad AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{49-9\operatorname{tg}^2\alpha},$$

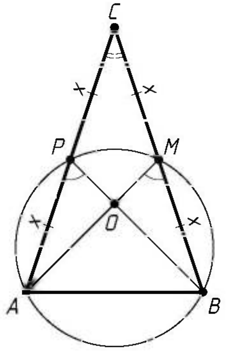
$$AD=\frac{AE}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{49-9\operatorname{tg}^2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Следовательно, $EM=\frac{1}{2}AD=\dfrac{\sqrt{49-9\operatorname{tg}^2\alpha}}{2\sin\alpha}$.

13.29. Дан треугольник ABC. Из вершины A проведена медиана AM, а из вершины B — медиана BP. Известно, что угол APB равен углу BMA. Косинус угла ACB равен 0,8 и $BP=1$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Решение. Первый способ. Поскольку $\angle APB=\angle BMA$, то точки A, B, M и P лежат на одной окружности; CB и CA — секущие, поэтому $CM\cdot CB=CP\cdot CA$, или $2CM^2=2CP^2$. Следовательно, $CM=CP$, поэтому $CA=CB$, т. е. треугольник ABC равнобедренный, поэтому $AM=BP=1$.



Пусть $MC=x$. Тогда $AC=2x$. По теореме косинусов

$$AM^2=CM^2+AC^2-2CM\cdot AC\cos\angle ACB,\quad \text{или}$$

$$1=x^2+4x^2-2x\cdot 2x\cdot\frac{4}{5}.$$

Отсюда находим, что $x^2=\frac{5}{9}$. Тогда

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin\angle C=\frac{1}{2}\cdot(2x)^2\cdot\frac{3}{5}=$$

$$=\frac{6x^2}{5}=\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{9}=\frac{2}{3}.$$

Второй способ. Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Треугольники AOP и BOM подобны (по двум углам). Поэтому $AO : OB = PO : OM$. Следовательно, $AO \cdot OM = BO \cdot OP$, или $\frac{2}{9}AM^2 = \frac{2}{9}BP^2$ (так как медианы делятся точкой пересечения в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника). Поэтому $AM = BP$. Следовательно, треугольник ABC равнобедренный. Далее см. первый способ.

13.30. В треугольнике ABC угол ABC равен α, угол BCA равен 2α. Окружность, проходящая через точки A, C и центр описанной около треугольника ABC окружности, пересекает сторону AB в точке M. Найдите отношение AM к AB.

Ответ: $\frac{1}{4\cos^2\alpha}$.

Решение. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Тогда по теореме об измерении вписанного угла и по теореме о внешнем угле треугольника

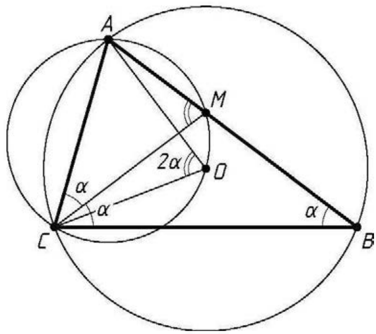
$$\angle AOC = 2\angle ABC = 2\alpha, \quad \angle AMC = \angle AOC = 2\alpha,$$
$$\angle MCB = \angle AMC - \angle MBC = 2\alpha - \alpha = \alpha,$$

а так как $\angle ACB = 2\alpha$, то CM — биссектриса треугольника ACB. Следовательно,

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BC} = \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}.$$

Поэтому

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha} = \frac{\sin\alpha}{2\sin 2\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{4\sin\alpha\cos^2\alpha} = \frac{1}{4\cos^2\alpha}.$$



13.31. Точка E лежит на продолжении стороны AC правильного треугольника ABC за точку C. Точка K — середина отрезка CE.

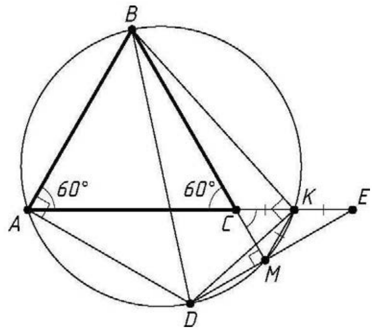
Прямая, проходящая через точку A перпендикулярно AB, и прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, пересекаются в точке D. Найдите углы треугольника BKD.

Ответ: 90°, 60°, 30°.

Решение. Пусть M — точка пересечения прямых BC и ED. Поскольку

$$\angle BAD = \angle BMD = 90^\circ,$$

то точки A, D, M, B лежат на окружности с диаметром BD.



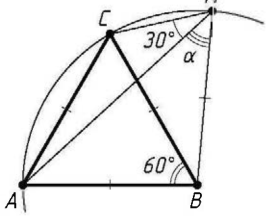
Поскольку MK — медиана прямоугольного треугольника CME, то

$$CK = KM, \quad \angle BMK = \angle CMK = \angle KCM = \angle BCA = 60^\circ,$$

а так как $\angle BAK = 60^\circ$, то точка K принадлежит окружности, проходящей через точки B, A и M, т. е. окружности с диаметром BD. Следовательно,

$$\angle BKD = 90^\circ, \quad \angle BDK = \angle BAK = 60^\circ,$$
$$\angle DBK = 30^\circ.$$

13.32. Вне правильного треугольника ABC, но внутри угла BAC взята точка M так, что угол CMA равен 30° и угол BMA равен α. Найдите угол ABM.



Ответ: $180^\circ - 2\alpha$.

Решение. Проведём окружность с центром в точке B и радиусом BA. Тогда точка M принадлежит этой окружности. Значит, треугольник ABM равнобедренный. Следовательно,

$$\angle ABM = 180^\circ - 2\angle AMB = 180^\circ - 2\alpha.$$

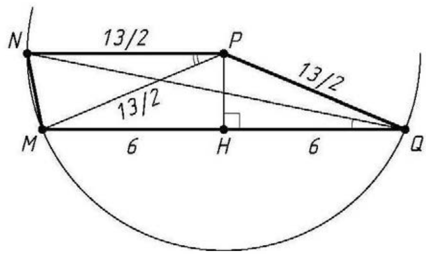
13.33. В трапеции $MNPQ$ ($MQ \parallel NP$) угол NQM в два раза меньше угла MPN. Известно, что $NP = MP = \frac{13}{2}$, $MQ = 12$. Найдите площадь трапеции.

Ответ: $\frac{185}{8}$.

Решение. Точки M и N лежат на окружности радиуса $\frac{13}{2}$ с центром в вершине P. Пусть прямая MQ вторично пересекает эту окружность в точке Q_1. Тогда вписанный угол MQ_1N равен половине соответствующего центрального угла MPN, т. е.

$$\angle MQ_1N = \frac{1}{2}MPN = \angle MQN,$$

значит, точка Q совпадает с точкой Q_1, а $PQ = PM = \frac{13}{2}$.



Пусть H — высота равнобедренного треугольника MPQ. Тогда H — середина основания MQ. По теореме Пифагора

$$PH = \sqrt{PQ^2 - QH^2} = \sqrt{\frac{169}{4} - 36} = \frac{5}{2}.$$

Следовательно,

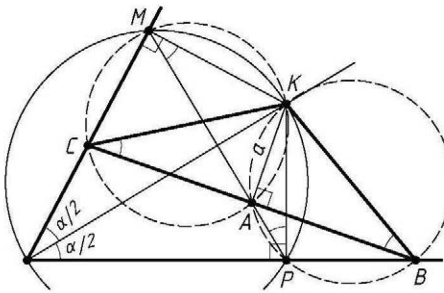
$$S_{MNPQ} = \frac{PN + MQ}{2} \cdot PH = \frac{\frac{13}{2} + 12}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{185}{8}.$$

13.34. Дан угол, равный α. На его биссектрисе взята точка K; P и M — проекции K на стороны угла. На отрезке PM взята точка A, причём $KA = a$. Прямая, проходящая через A перпендикулярно KA, пересекает стороны угла в точках B и C. Найдите площадь треугольника BKC.

Ответ: $a^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

Решение. Заметим, что

$$\angle PMK = \angle MPK = \frac{\alpha}{2}.$$



Поскольку отрезок CK виден из точек A и M под прямым углом, то точки C, A, K и M лежат на одной окружности. Поэтому

$$\angle ACK = \angle AMK = \frac{\alpha}{2}.$$

Аналогично

$$\angle ABK = \angle APK = \frac{\alpha}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника ACK находим, что

$$AC = AK \operatorname{ctg} \angle ACK = a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно,

$$BC = 2AC = 2a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \quad S_{\Delta BKC} = \frac{1}{2} BC \cdot AK = a^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

13.35. На биссектрисе угла с вершиной L взята точка A. Точки K и M — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на стороны угла. На отрезке KM взята точка P ($KP < PM$), и через неё перпендикулярно к отрезку AP проведена прямая, пересекающая прямую KL в точке Q (K лежит между Q и L), а прямую ML — в точке S. Известно, что $\angle KLM = \alpha$, $KM = a$, $QS = b$. Найдите QK.

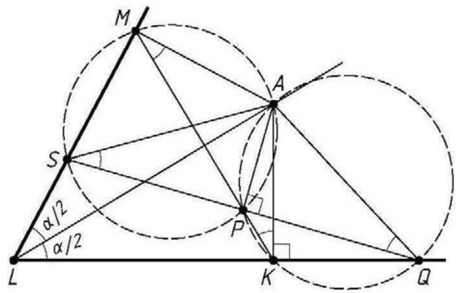
Ответ: $\dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$.

Решение. Поскольку $\angle AKQ = \angle APQ = 90^\circ$, то точки P, K, Q и A лежат на окружности с диаметром AQ. Следовательно,

$$\angle AQS = \angle AKM = \angle ALK = \frac{\alpha}{2}.$$

Аналогично $\angle ASQ = \frac{\alpha}{2}$. Поэтому треугольник QAS равнобедренный. Тогда

$$AQ = \frac{QP}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{b}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$



Из равнобедренного треугольника AKM находим, что

$$AK = \frac{\frac{1}{2}KM}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника AKQ находим, что

$$QK = \sqrt{AQ^2 - AK^2} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

13.36. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Известно, что $AD=2$, $\angle ABD=\angle ACD=90^\circ$, а расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD, равно $\sqrt{2}$. Найдите BC.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры указанных окружностей. Поскольку

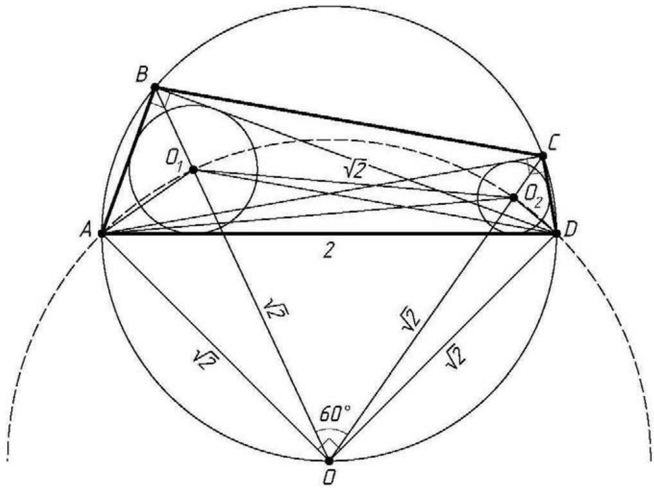
$$\angle AO_1D = \angle AO_2D = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ACD = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ,$$

точки A, O_1, O_2 и D лежат на одной окружности. Пусть O — центр этой окружности, R — её радиус. Тогда центральный угол AOD равен $360^\circ - 2\angle AO_1D = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$, значит, точка O (так же как и точки B и C) лежит на окружности с диаметром AD, т. е. на окружности, описанной около данного четырёхугольника.

Треугольник AOD прямоугольный и равнобедренный, поэтому

$$R = OA = OD = \frac{AD}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

Точка O — середина дуги AD, не содержащей точки B, значит, CO и BO — биссектрисы углов ACD и ABD, поэтому BO_1O — одна прямая и CO_2O — одна прямая.



Треугольник OO_1O_2 равносторонний ($OO_1 = OO_2 = R = \sqrt{2} = O_1O_2$), поэтому $\angle BOC = \angle O_1OO_2 = 60^\circ$. Следовательно, по теореме синусов

$$BC = AD\sin 60^\circ = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

13.37. В треугольнике ABC перпендикуляр, проходящий через середину стороны AB, пересекает прямую AC в точке M, а перпендикуляр, проходящий через середину стороны AC, пересекает прямую AB в точке N. Известно, что $MN = BC$ и прямая MN перпендикулярна прямой BC. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 15^\circ$, $\angle C = 105^\circ$ или $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 105^\circ$, $\angle C = 15^\circ$.

Решение. Пусть $BC = a$; D и E — середины AB и AC. Точки E, M, D и N лежат на окружности с диаметром MN (так как $\angle MEN = \angle MDN = 90^\circ$), $MN = a$, $ED = \frac{a}{2}$ (средняя линия треугольника ABC). Тогда по теореме синусов $DE = MN\sin\angle DME$. Следовательно,

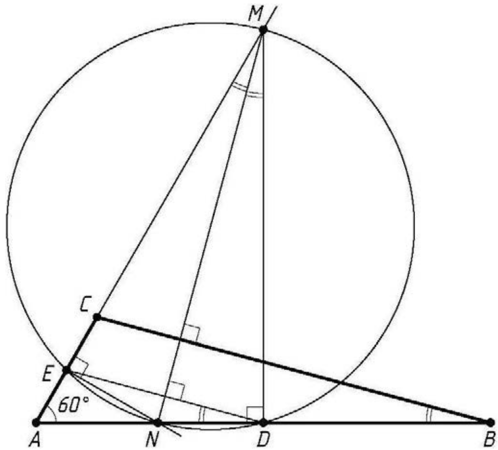
$$\sin\angle DME = \frac{DE}{MN} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}.$$

Тогда либо $\angle DME = 30^\circ$, либо $\angle DME = 150^\circ$.

Пусть $\angle DME = 30^\circ$. Тогда

$$\angle BAC = \angle MAD = 90^\circ - \angle EMD = 60^\circ.$$

Вписанные углы EDN и EMN опираются на одну и ту же дугу, $DE \parallel BC$ (как средняя линия), а $\angle ABC = \angle DMN$ (как углы с соответственно пер-



пендикулярными сторонами). Поэтому

$$\angle EMN = \angle EDN = \angle EDA = \angle ABC = \angle DMN.$$

Следовательно,

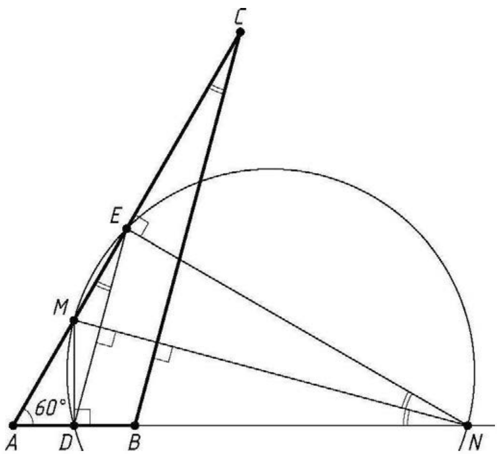
$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle EMD = 15^\circ.$$

Тогда

$$\angle ACB = 180^\circ - 60^\circ - 15^\circ = 105^\circ.$$

Если же $\angle DME = 150^\circ$, рассуждая аналогично, получим, что

$$\angle BAC = 60^\circ, \quad \angle ACB = 15^\circ, \quad \angle ABC = 105^\circ.$$



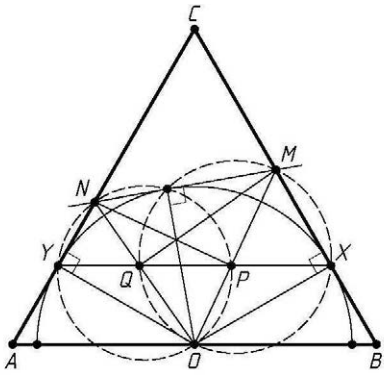
13.38. В равносторонний треугольник ABC вписана полуокружность с центром O на стороне AB. Некоторая касательная к полуокружности пересекает стороны BC и CA в точках M и N соответственно, а прямая, проходящая через точки касания сторон BC и AC с полуокружностью, пересекает отрезки OM и ON соответственно в точках P и Q. Найдите PQ, если $MN=2$.

Ответ: 1.

Пусть X и Y — точки касания полуокружности со сторонами BC и AC. Тогда

$$\angle NOM = \frac{1}{2}\angle XOY = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ, \quad \angle CXY = 60^\circ.$$

Поэтому точки M, X, O и Q лежат на одной окружности, причём MO — диаметр этой окружности. Следовательно, MQ — высота треугольника MON. Аналогично докажем, что NP — высота треугольника MON.



Поэтому треугольник POQ подобен треугольнику NOM с коэффициентом

$$\cos\angle NOM = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$PQ = MN\cos 60^\circ = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

Задачи на доказательство и вычисление

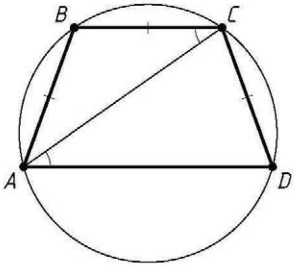
13.39.1. В окружность вписан четырёхугольник с тремя равными сторонами.

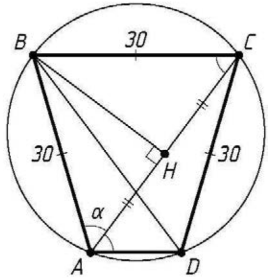
а) Докажите, что в этом четырёхугольнике есть параллельные стороны.

б) Найдите диагонали четырёхугольника, если радиус окружности равен 25, а каждая из трёх равных сторон четырёхугольника равна 30.

Ответ: 48.

Решение. а) Пусть четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём $AB=BC=CD$. Вписанные углы ACB и CAD опираются на равные хорды, поэтому $\angle ACB=\angle CAD$. Следовательно, $BC \parallel AD$.





б) Обозначим $\angle BAC=\alpha$. По теореме синусов

$$\sin\alpha = \frac{CB}{2\cdot 25} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5},$$

а так как $\alpha<90^\circ$ (как половина угла BAD треугольника BAD), то

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{4}{5}.$$

Пусть BH — высота равнобедренного треугольника ABC. Тогда

$$AC = 2AH = 2\cdot AB\cos\alpha = 2\cdot 30\cdot\frac{4}{5} = 48.$$

Аналогично $BD=48$.

13.40.1. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Известно, что

$$\cos\angle ABC = -\cos\angle ADC.$$

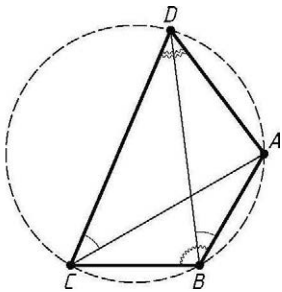
а) Докажите, что этот четырёхугольник вписанный.

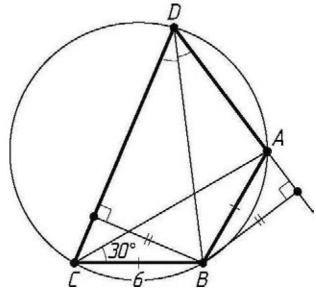
б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника, если $\angle ACB=30^\circ$, $BC=6$, а высоты треугольников ABD и CBD, проведённые из вершины B, равны.

Ответ: 6.

Решение. а) Из равенства $\cos\angle ABC=-\cos\angle ADC$ следует, что сумма противоположных углов ABC и ADC четырёхугольника $ABCD$ равна 180°. Значит, около него можно описать окружность.

б) Точка B лежит внутри угла ADC и равноудалена от его сторон DA и DC, значит, DB — биссектриса этого угла. Поэтому $AB=BC=6$.

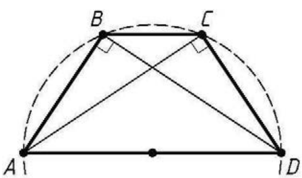


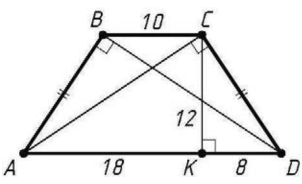


Пусть R — радиус окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$. По теореме синусов

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle ACB} = \frac{6}{2\sin 30^\circ} = 6.$$

13.41.1. Диагонали трапеции перпендикулярны боковым сторонам.
а) Докажите, что трапеция равнобедренная.
б) Найдите площадь трапеции, если её основания равны 10 и 26.





Ответ: 216.

Решение. а) Пусть AD и BC — основания трапеции $ABCD$. Поскольку $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$, точки A, B, C и D лежат на окружности с диаметром AD, т. е. около трапеции $ABCD$ можно описать окружность. Следовательно, трапеция равнобедренная.

б) Пусть $AD = 26$, $BC = 10$, CK — высота трапеции. Тогда

$$KD = \frac{AD - BC}{2} = 8, \quad AK = \frac{AD + BC}{2} = 18,$$

а так как CK — высота прямоугольного треугольника ACD, проведённая из вершины прямого угла, то $CK = \sqrt{AK \cdot KD} = \sqrt{18 \cdot 8} = 12$. Следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CK = 18 \cdot 12 = 216.$$

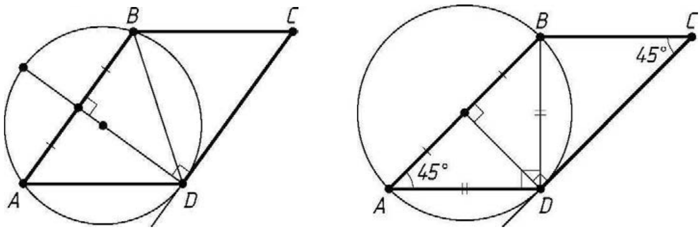
13.42.1. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая CD касается окружности, описанной около треугольника ABD.

а) Докажите, что диагональ BD равна одной из сторон параллелограмма.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $BD=2$ и $\angle BCD=$ $=45^\circ$.

Ответ: 4.

Решение. а) Проведём диаметр окружности через точку D. Поскольку CD — касательная к окружности, этот диаметр перпендикулярен CD, а значит, перпендикулярен и хорде AB, параллельной CD. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, значит, высота треугольника ADB, проведённая из вершины D, является медианой. Значит, треугольник ABD равнобедренный с основанием AB. Следовательно, $BD=AD$.



б) В равнобедренном треугольнике ABD угол при основании равен 45°, значит, $\angle ADB=90^\circ$. Следовательно,

$$S_{ABCD}=2S_{\triangle ABD}=2\cdot\frac{1}{2}AD\cdot BD=AD\cdot BD=2\cdot 2=4.$$

13.43.1. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D, лежащих по разные стороны от прямой AB. Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E.

а) Докажите, что четырёхугольник $ACED$ вписанный.

б) Найдите AE, если $AB=10$, $AC=16$, $AD=15$.

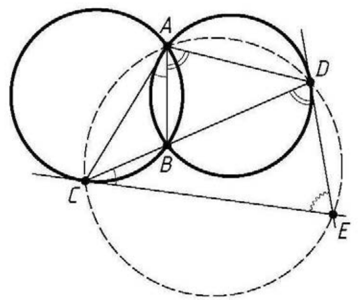
Ответ: 24.

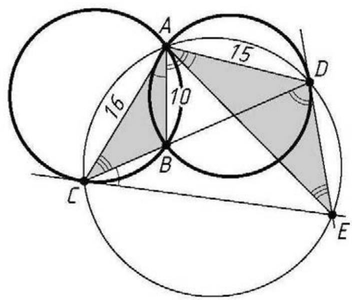
Решение. а) Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что $\angle BAC=\angle ECD$ и $\angle BAD=\angle EDC$. Поскольку луч AB лежит между сторонами угла CAD, то

$$\angle CAD=\angle BAC+\angle BAD=\angle ECD+\angle EDC=180^\circ-\angle CED.$$

Следовательно, около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность.

б) Докажем подобие треугольников ABC и ADE. Действительно, так как четырёхугольник $ABCD$ вписанный, то $\angle BAC=\angle ECD=\angle EAD$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). Аналогично $\angle ACB=$ $=\angle AED$. Следовательно, треугольники ABC и ADE подобны по двум





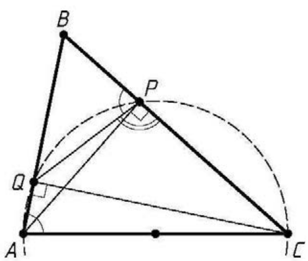
углам. Тогда $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$, откуда находим, что

$$AE=\frac{AD\cdot AC}{AB}=\frac{15\cdot 16}{10}=24.$$

13.44.1. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB.

а) Докажите, что $\angle BPQ=\angle BAC$.

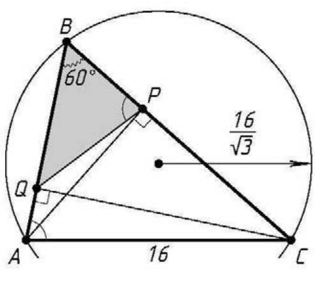
б) Известно, что площадь треугольника ABC равна 96, площадь четырёхугольника $AQPC$ равна 72, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $\frac{16}{\sqrt{3}}$. Найдите PQ.



Ответ: 8.

Решение. а) Из точек P и Q отрезок AC виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром AC. Тогда $ACPQ$ — вписанный четырёхугольник, поэтому

$$\angle BPQ=180^\circ-\angle CPQ=\angle QAC=\angle BAC.$$



б) Треугольник BPQ подобен треугольнику BAC по двум углам (угол при вершине B — общий), а так как

$$S_{\Delta BPQ}=S_{\Delta BAC}-S_{AQPC}=96-72=24,$$

то отношение площадей этих треугольников равно $\frac{24}{96}=\frac{1}{4}$. С одной стороны, коэффициент подобия равен квадратному корню из отношения площадей, т. е. $\frac{1}{2}$. Значит, $PQ=\frac{1}{2}AC$.

С другой стороны, коэффициент подобия равен $\frac{BP}{AB} = \cos\angle B$. Поэтому $\cos\angle B = \frac{1}{2}$. Тогда

$$\angle B = 60^\circ, \quad \sin\angle B = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пусть R — радиус описанной окружности треугольника ABC. По теореме синусов

$$AC = 2R\sin\angle B = 2\cdot\frac{16}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 16.$$

Следовательно, $PQ = \frac{1}{2}AC = 8$.

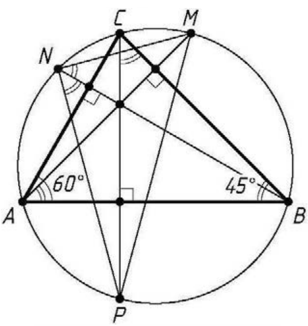
13.45.1. В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$. Продолжения высот треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках M, N, P.

а) Докажите, что треугольник MNP прямоугольный.

б) Найдите площадь треугольника MNP, если $BC = 12$.

Ответ: $24\sqrt{3}$.

Решение. а) Пусть продолжения высот треугольника ABC, проведённых из вершин A, B и C, пересекают описанную около него окружность в точках M, N и P соответственно. Тогда вписанные углы PNB и PCB опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle PNB = \angle PCB$. Аналогично $\angle MNB = \angle MAB$, значит,



$$\angle PNM = \angle PNB + \angle MNB = \\ = \angle PCB + \angle MAB = \\ = (90^\circ - \angle ABC) + (90^\circ - \angle ABC) = \\ = 90^\circ - 45^\circ + 90^\circ - 45^\circ = 90^\circ.$$

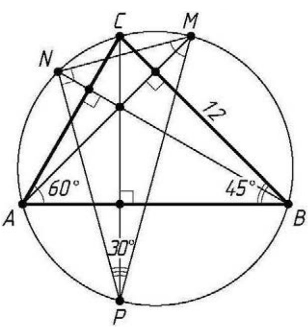
б) Аналогично получим, что $\angle NMP = 60^\circ$. Тогда $\angle MPN = 30^\circ$. Пусть R — радиус описанной окружности треугольника ABC. По теореме синусов

$$R = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{12}{2\sin 60^\circ} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

Тогда

$$MN = 2R\sin\angle MPN = 2R\sin 30^\circ = R = 4\sqrt{3},$$

$$NP = 2R\sin\angle NMP = 2R\sin 60^\circ = R\sqrt{3} = 12.$$



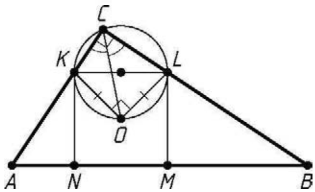
Следовательно,

$$S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2}MN\cdot NP = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot 12 = 24\sqrt{3}.$$

13.46.1. В прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на гипотенузе, а две другие — на катетах.

а) Докажите, что центр квадрата лежит на биссектрисе прямого угла треугольника.

б) Радиус окружности, описанной около треугольника, относится к стороне квадрата как 13 : 6. Найдите углы треугольника.



Ответ: $\operatorname{arctg} 3$, $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.

Решение. а) Пусть сторона MN квадрата $KLMN$ с центром O лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, а вершины K и L — на катетах AC и BC соответственно. Из точек C и O отрезок KL виден под прямым углом, значит, точки C и O лежат на окружности с диаметром KL. Вписанные в эту окружность углы OCK и OCL опираются на равные дуги, следовательно, CO — биссектриса угла ACB.

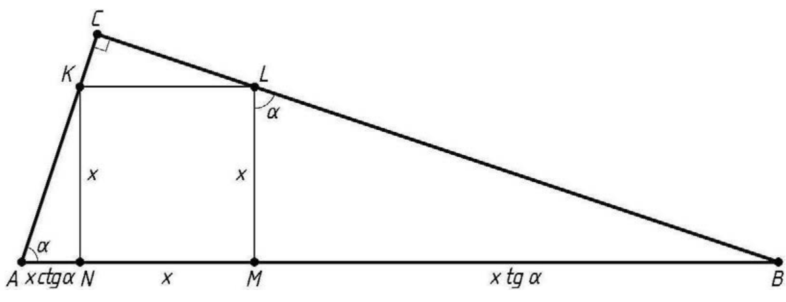
б) Обозначим $AB = c$, $MN = x$, $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle BLM = \alpha$. Из прямоугольных треугольников AKN и BLM находим, что

$$AN = KN \operatorname{ctg} \alpha = x \operatorname{ctg} \alpha, \quad BM = ML \operatorname{tg} \alpha = x \operatorname{tg} \alpha,$$

а так как $AN + MN + BM = AB$, то $x \operatorname{ctg} \alpha + x + x \operatorname{tg} \alpha = c$. Отсюда

$$\operatorname{ctg} \alpha + 1 + \operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{x} = 2 \cdot \frac{\frac{c}{2}}{x} = 2 \cdot \frac{13}{6} = \frac{13}{3}, \quad \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{10}{3}$$

(радиус описанной окружности прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, т. е. $\frac{c}{2}$). Следовательно, $\operatorname{tg} \alpha = 3$ или $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$.



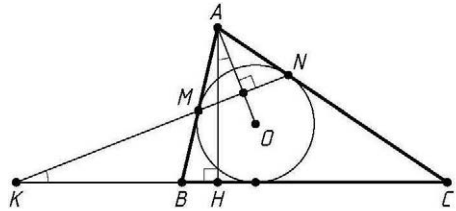
13.47.1. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и AC в точках M и N соответственно, AH — высота треугольника. Прямые MN и BC пересекаются в точке K.

а) Докажите, что $\angle MKB = \angle OAH$.

б) Найдите AK, если $\angle ABC = 77^\circ$, $\angle ACB = 17^\circ$, а отрезок, соединяющий точку H с серединой MN, равен 8.

Ответ: 16.

Решение. а) Поскольку $AH \perp BC$ и $AO \perp MN$, углы MKB и OAH равны как углы с соответственно перпендикулярными сторонами.

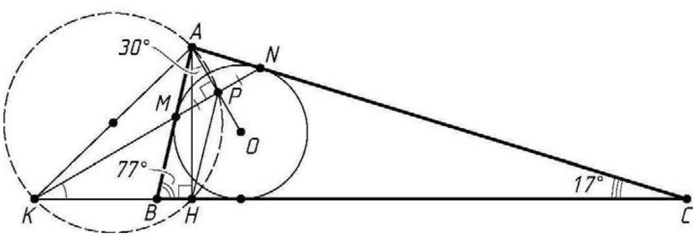


б) Пусть P — точка пересечения MN и AO. Тогда $\angle APK = \angle AHK = 90^\circ$. Из точек P и H отрезок AK виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром AK, а так как AO — биссектриса угла BAC, то

$$\angle PAH = \angle OAH = \angle OAB - \angle BAH = \frac{1}{2}\angle BAC - \angle BAH =$$
$$= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC - \angle ACB) - (90^\circ - \angle ABC) =$$
$$= \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB) = \frac{1}{2}(77^\circ - 17^\circ) = 30^\circ.$$

По теореме синусов

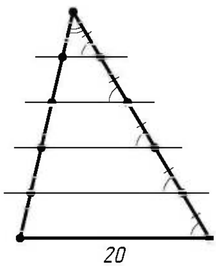
$$AK = \frac{PH}{\sin\angle PAH} = \frac{8}{\sin 30^\circ} = 16.$$



§ 14. Вспомогательные подобные треугольники

Подготовительные задачи

14.1. Боковая сторона треугольника разделена на пять равных частей; через точки деления проведены прямые, параллельные основанию. Найдите отрезки этих прямых, заключённые между боковыми сторонами, если основание равно 20.

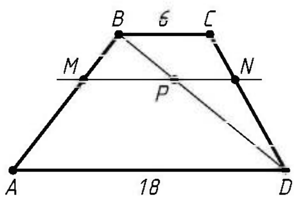


Ответ: 4, 8, 12, 16.

Решение. Каждая из четырёх указанных прямых отсекает от данного треугольника подобный ему треугольник (признак подобия треугольников по двум углам). Коэффициенты подобия равны $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$. Тогда соответствующие отрезки равны

$$\frac{1}{5}\cdot 20 = 4, \quad \frac{2}{5}\cdot 20 = 8, \quad \frac{3}{5}\cdot 20 = 12, \quad \frac{4}{5}\cdot 20 = 16.$$

14.2. Точка M расположена на боковой стороне AB трапеции $ABCD$, причём $AM : BM = 2 : 1$. Прямая, проходящая через точку M параллельно основаниям AD и BC, пересекает боковую сторону CD в точке N. Найдите MN, если $AD = 18$, $BC = 6$.



Ответ: 10.

Решение. Проведём диагональ BD. Пусть она пересекается с отрезком MN в точке P. По теореме о пропорциональных отрезках

$$\frac{BP}{PD} = \frac{CN}{ND} = \frac{BM}{AM} = \frac{1}{2}.$$

Треугольник BMP подобен треугольнику BAD с коэффициентом $\frac{BM}{BA} = \frac{1}{3}$, а треугольник DNP подобен треугольнику DCB с коэффициентом $\frac{DN}{DC} = \frac{2}{3}$, поэтому

$$MP = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3}\cdot 18 = 6, \quad NP = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3}\cdot 6 = 4,$$

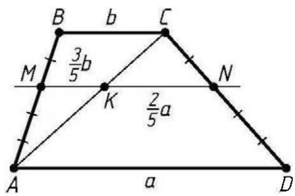
следовательно, $MN = MP + NP = 6 + 4 = 10$.

14.3. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC} = \frac{3}{2}$. Найдите MN, если $BC = a$ и $AD = b$.

Ответ: $\dfrac{2a+3b}{5}$.

Решение. Проведём через точку M прямую, параллельную основаниям. Пусть N_1 — точка её пересечения с CD. Из теоремы Фалеса следует, что $CN_1 = \frac{2}{5}CD = CN$. Поэтому точка N_1 совпадает с N. Следовательно, $MN \parallel AD$.

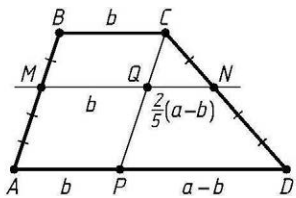
Первый способ. Проведём диагональ AC и обозначим через K точку её пересечения с MN. Из подобия треугольников AMK и ABC находим, что $MK = \frac{3}{5}b$, а из подобия треугольников CKN и CAD находим $KN = \frac{2}{5}a$. Следовательно,



$$MN = MK + KN = \frac{2a+3b}{5}.$$

Второй способ. Предположим, что $a > b$. Через вершину C проведём прямую, параллельную боковой стороне AB. Пусть P — точка её пересечения с основанием AD, а Q — с отрезком MN. Из подобия треугольников CQN и CPD находим, что

$$QN = \frac{2}{5}PD = \frac{2}{5}(a-b).$$



Тогда

$$MN = b + \frac{2}{5}(a-b) = \frac{2a+3b}{5}.$$

Аналогично для $a < b$.

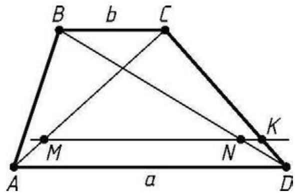
14.4. На диагоналях AC и BD трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC взяты соответственно точки M и N, причём $AM : MC = DN : NB = 1 : 4$. Найдите MN, если $AD = a$, $BC = b$ $(a > b)$.

Ответ: $\dfrac{4a-b}{5}$.

Решение. Проведём через точку M прямую, параллельную основаниям. Пусть K и N_1 — её точки пересечения со стороной CD и диагональю BD соответственно. Из теоремы Фалеса следует, что

$$DK : KC = AM : MC = 1 : 4,$$

$$DN_1 : N_1B = DK : KC = 1 : 4.$$



Поэтому точка N_1 совпадает с точкой N. Следовательно, $MN \parallel AD$.

Из подобия треугольников CKM и CDA находим, что

$$MK = \frac{4}{5}AD = \frac{4}{5}a,$$

а из подобия треугольников DKN и DCB — что

$$KN = \frac{1}{5}BC = \frac{1}{5}b.$$

Следовательно,

$$MN = MK - KN = \frac{4a-b}{5}.$$

14.5. В прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8 вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдите сторону квадрата.

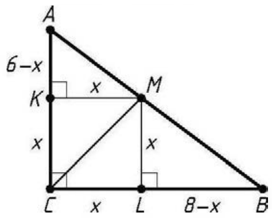
Ответ: $\frac{24}{7}$.

Решение. Пусть вершина M квадрата $CKML$ лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, а вершины K и L — на катетах AC и BC соответственно; $AC=6$, $BC=8$. Обозначим сторону квадрата через x.

Первый способ. Из подобия прямоугольных треугольников ABC и MBL следует, что

$$\frac{BL}{BC} = \frac{LM}{AC}, \quad \text{или} \quad \frac{8-x}{8} = \frac{x}{6},$$

откуда $x = \frac{24}{7}$.



Второй способ. Соединим C и M. Тогда

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AMC} + S_{\Delta BMC},$$

$$\frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}AC \cdot MK + \frac{1}{2}BC \cdot ML,$$

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = \frac{1}{2} \cdot 6x + \frac{1}{2} \cdot 8x,$$

откуда $x = \frac{24}{7}$.

14.6. В прямоугольном треугольнике ABC катет AB равен 21, а катет BC равен 28. Окружность, центр O которой лежит на гипотенузе AC, касается обоих катетов. Найдите радиус окружности.

Ответ: 12.

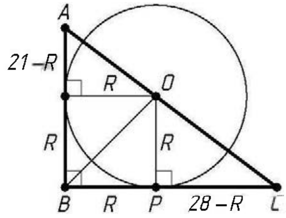
Решение. Первый способ. Пусть P — точка касания окружности с катетом BC. Обозначим через R радиус окружности. Из подобия треугольников CPO и CBA следует, что

$$\frac{28-R}{R} = \frac{28}{21}.$$

Отсюда находим, что $R = 12$.

Второй способ. Соединим B и O. Тогда

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot R = \frac{21R}{2}, \quad S_{\Delta COB} = \frac{1}{2}BC \cdot R = 14R.$$



Поскольку

$$S_{\Delta AOB} + S_{\Delta COB} = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 28,$$

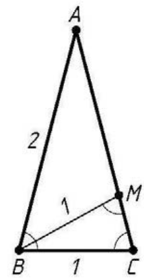
имеем уравнение

$$\frac{21R}{2} + 14R = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 28,$$

из которого находим, что $R = 12$.

14.7. Точка M лежит на боковой стороне AC равнобедренного треугольника ABC с основанием BC, причём $BM = BC$. Найдите MC, если $BC = 1$ и $AB = 2$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.



Решение. Треугольник MBC равнобедренный, поэтому

$$\angle BMC = \angle BCM = \angle BCA.$$

Равнобедренные треугольники BMC и ABC подобны по двум углам, значит, $\frac{MC}{BC} = \frac{BC}{AC}$. Следовательно,

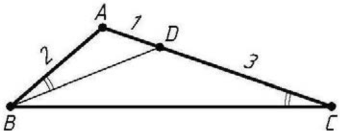
$$MC = BC \cdot \frac{BC}{AC} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

14.8. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC, причём $\angle ABD = \angle BCA$. Найдите отрезки AD и DC, если $AB = 2$ и $AC = 4$.

Ответ: 1 и 3.

Решение. Треугольники ABD и ACB подобны по двум углам ($\angle A$ общий, $\angle ABD = \angle BCA$ по условию). Поэтому $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$. Следовательно,

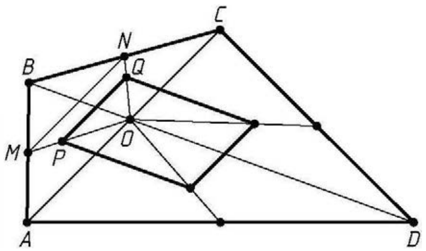
$$AD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{4}{4} = 1, \quad CD = AC - AD = 4 - 1 = 3.$$



14.9. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны 12 и 18 и пересекаются в точке O. Найдите стороны четырёхугольника с вершинами в точках пересечения медиан треугольников AOB, BOC, COD и AOD.

Ответ: 4, 6, 4, 6.

Решение. Пусть M и N — середины сторон AB и BC соответственно; P и Q — точки пересечения медиан треугольников AOB и BOC соответственно; $AC = 12$, $BD = 18$.



Поскольку $\frac{OP}{OM} = \frac{OQ}{ON} = \frac{2}{3}$, треугольники OPQ и OMN подобны с коэффициентом $\frac{2}{3}$, поэтому $PQ = \frac{2}{3}MN$, а так как MN — средняя линия треугольника ABC, то $MN = \frac{1}{2}AC$. Следовательно,

$$PQ = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}AC = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4.$$

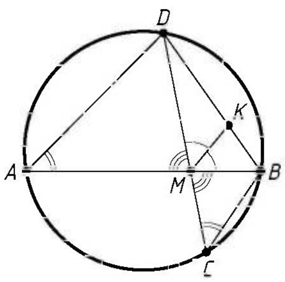
Аналогично найдём остальные отрезки.

Тренировочные задачи

14.10. В круге проведены две хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M; K — точка пересечения биссектрисы угла BMD с хордой BD. Найдите отрезки BK и KD, если $BD = 3$, а площади треугольников CMB и AMD относятся как $1:4$.

Ответ: 1 и 2.

Решение. Треугольники BMC и DMA подобны ($\angle MCB = \angle DCB = \angle DAB = \angle DAM$). Поскольку площади этих треугольников относятся



как $1:4$, то коэффициент подобия равен $\frac{1}{2}$. Поэтому $DM = 2BM$.

Поскольку MK — биссектриса треугольника BMD, то

$$\frac{KD}{KB} = \frac{DM}{BM} = 2.$$

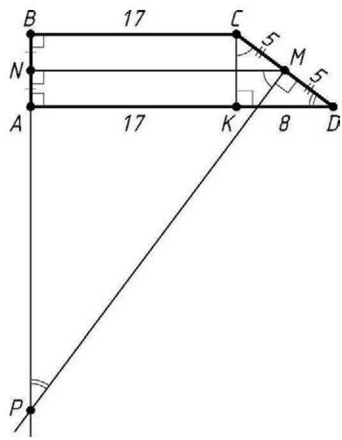
Следовательно,

$$KD = \frac{2}{3}BD = 2, \quad BK = \frac{1}{3}BD = 1.$$

14.11. В прямоугольной трапеции основания равны 17 и 25, а большая боковая сторона равна 10. Через середину M этой стороны проведён к ней перпендикуляр, пересекающий продолжение второй боковой стороны в точке P. Найдите MP.

Ответ: 35.

Решение. Пусть N — середина меньшей боковой стороны AB трапеции $ABCD$, K — проекция вершины C меньшего основания BC на большее основание AD. По теореме Пифагора



$$CK = \sqrt{CD^2 - KD^2} = \sqrt{CD^2 - (AD - AK)^2} =$$
$$= \sqrt{CD^2 - (AD - BC)^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6.$$

Из подобия треугольников NMP и KCD (по двум углам) находим, что $\frac{MN}{CK} = \frac{PM}{CD}$. Поэтому $PM = \frac{MN \cdot CD}{CK}$. Поскольку $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$ (средняя линия трапеции), то

$$PM = \frac{21 \cdot 10}{6} = 35.$$

14.12. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = 12$ и $BC = 8$. На продолжении стороны BC отложен отрезок $CM = 2{,}4$. В каком отношении прямая AM делит площадь трапеции $ABCD$?

Ответ: 1 : 1.

Решение. Пусть отрезки AM и CD пересекаются в точке K. Из подобия треугольников MKC и AKD находим, что

$$\frac{CK}{KD} = \frac{CM}{AD} = \frac{2{,}4}{12} = \frac{1}{5}.$$

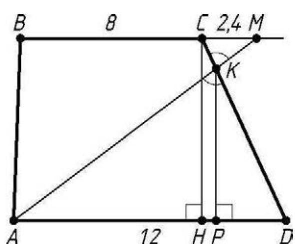
Опустим перпендикуляры KP и CH на AD. Из подобия прямоугольных треугольников KPD и CHD следует, что

$$\frac{KP}{CH} = \frac{KD}{CD} = \frac{5}{6},$$

поэтому $KP = \frac{5}{6}CH$. Значит,

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CH = \frac{8 + 12}{2} \cdot CH = 10CH,$$

$$S_{\Delta AKD} = \frac{1}{2}AD \cdot KP = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{5}{6}CH = 5CH.$$



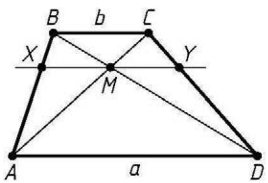
Следовательно,

$$\frac{S_{\Delta AKD}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{S_{\Delta AKD}}{S_{ABCK}} = 1.$$

14.13. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого внутри трапеции, если основания трапеции равны a и b.

Ответ: $\frac{2ab}{a+b}$.

Решение. Пусть M — точка пересечения диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$, X и Y — точки пересечения данной прямой с боковыми сторонами AB и CD. Из подобия треугольников BMC и DMA находим, что



$$\frac{AM}{MC} = \frac{AD}{BC} = \frac{a}{b}.$$

Поэтому $\frac{AM}{AC} = \frac{a}{a+b}$.

Из подобия треугольников AMX и ACB находим, что

$$\frac{MX}{BC} = \frac{AM}{AC} = \frac{a}{a+b}.$$

Поэтому

$$MX = \frac{a}{a+b} \cdot BC = \frac{ab}{a+b}.$$

Аналогично находим, что $MY = \frac{ab}{a+b}$. Следовательно,

$$XY = MX + MY = \frac{2ab}{a+b}.$$

14.14. В угол вписаны касающиеся внешним образом окружности радиусов r и R ($r < R$). Первая из них касается сторон угла в точках A и B. Найдите AB.

Ответ: $\frac{4r\sqrt{Rr}}{R+r}$.

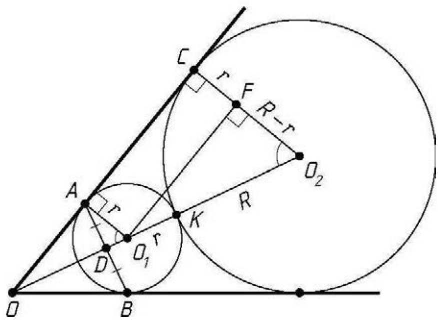
Решение. Пусть O_1 — центр меньшей окружности, а бо́льшая окружность с центром O_2 касается луча OA в точке C, а меньшей окружности — в точке K.

Линия центров двух касающихся окружностей проходит через их точку касания, поэтому

$$O_1O_2 = KO_1 + KO_2 = r + R.$$

Опустим перпендикуляр O_1F из центра меньшей окружности на радиус O_2C большей окружности. Тогда O_1ACF — прямоугольник, поэтому

$$O_2F = O_2C - FC = O_2C - O_1A = R - r.$$



Из прямоугольного треугольника O_1FO_2 находим, что

$$O_1F = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2F^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

Пусть луч OO_1 (биссектриса угла AOB) пересекает отрезок AB в точке D. Тогда $AB \perp OO_1$, D — середина AB и

$$\angle AO_1D = 90^\circ - \angle FO_1O_2 = \angle O_1O_2F,$$

поэтому прямоугольные треугольники AO_1D и O_1O_2F подобны, значит, $\frac{AD}{O_1F} = \frac{AO_1}{O_1O_2}$, или $\frac{AD}{2\sqrt{Rr}} = \frac{r}{R+r}$, откуда находим, что $AD = \frac{2r\sqrt{Rr}}{R+r}$. Следовательно, $AB = 2AD = \frac{4r\sqrt{Rr}}{R+r}$.

14.15. Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как $2:3$. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого внутри трапеции.

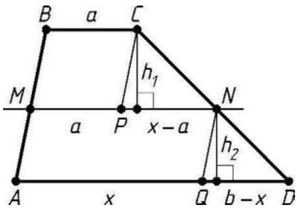
Ответ: $\sqrt{\frac{3a^2+2b^2}{5}}$ или $\sqrt{\frac{2a^2+3b^2}{5}}$.

Решение. Первый способ. Пусть M и N — точки на боковых сторонах соответственно AB и CD трапеции $ABCD$, и пусть $AD = b$ и $BC = a$ $(b > a)$, $MN \parallel AD$; P — точка пересечения с MN прямой, проходящей через точку C параллельно AB, Q — точка пересечения с AD прямой, проходящей через точку N параллельно AB. Обозначим $MN = x$; h_1 и h_2 — высоты подобных треугольников PCN и QND.

Пусть отношение площадей трапеций $BMNC$ и $MADN$ равно $2:3$, тогда

$$(x+a)h_1 = \frac{2}{3}\cdot(b+x)h_2,$$

откуда $\frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{b+x}{x+a}$.



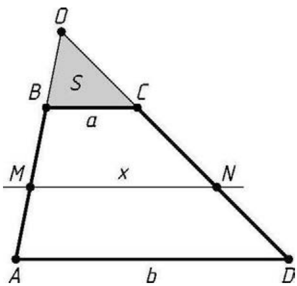
Из подобия треугольников CPN и NQD следует, что $\frac{h_1}{h_2}=\frac{x-a}{b-x}$. Поэтому

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{b+x}{x+a}=\frac{x-a}{b-x}.$$

Из этого уравнения находим, что $x=\sqrt{\frac{3a^2+2b^2}{5}}$.

Если же отношение площадей трапеций $BMNC$ и $MADN$ равно $3:2$, то аналогично найдём, что $MN=\sqrt{\frac{2a^2+3b^2}{5}}$.

Второй способ. Пусть O — точка пересечения продолжений боковых сторон AB и DC, S — площадь треугольника BOC, отношение площадей трапеций $BMNC$ и $MADN$ равно $2:3$, $MN=x$ — искомый отрезок. Тогда $S_{\Delta MNO}-S=\frac{2}{3}(S_{\Delta AOD}-S_{\Delta MNO})$, или



$$\frac{x^2}{a^2}\cdot S-S=\frac{2}{3}\left(\frac{b^2}{a^2}\cdot S-\frac{x^2}{a^2}\cdot S\right).$$

Отсюда находим, что $x^2=\frac{3a^2+2b^2}{2}$.

Если же отношение площадей трапеций $BMNC$ и $MADN$ равно $3:2$, то аналогично найдём, что $MN=\sqrt{\frac{2a^2+3b^2}{5}}$.

14.16. Около окружности описана равнобедренная трапеция. Боковая сторона трапеции равна 4, отрезок, соединяющий точки касания боковых сторон с окружностью, равен 1. Найдите диаметр окружности.

Ответ: 2.

Решение. Пусть вписанная окружность касается боковой стороны AB равнобедренной трапеции $ABCD$ в точке M, а боковой стороны CD — в точке N. Тогда $MN \parallel AD$. Центр O этой окружности расположен на средней линии PQ трапеции (точка Q — середина CD), а проекция K точки O на MN — середина MN.

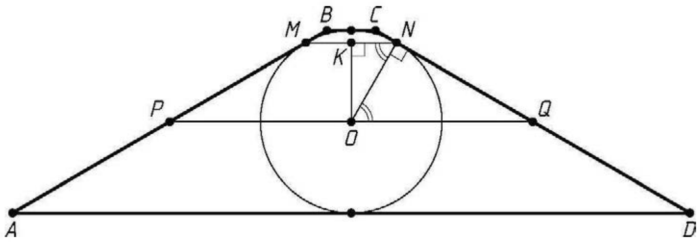
По свойству описанного четырёхугольника

$$PQ=\frac{AD+BC}{2}=\frac{AB+CD}{2}=\frac{4+4}{2}=4.$$

Тогда $OQ=\frac{1}{2}\cdot 4=2$.

Из подобия треугольников OKN и QNO следует, что

$$\frac{KN}{ON}=\frac{ON}{OQ},$$



откуда находим, что

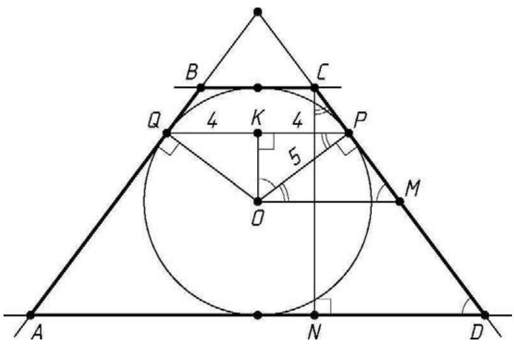
$$ON^2 = OQ \cdot KN = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Поскольку ON — радиус вписанной окружности, диаметр окружности равен 2.

14.17. В некоторый угол вписана окружность радиуса 5. Хорда, соединяющая точки касания, равна 8. К окружности проведены две касательные, параллельные хорде. Найдите стороны полученной трапеции.

Ответ: 5, 20, $\frac{25}{2}$, $\frac{25}{2}$.

Решение. Пусть O — центр окружности, P и Q — точки касания окружности с боковыми сторонами CD и AB полученной равнобедренной трапеции $ABCD$, K — середина PQ, M — середина CD.



Из подобия треугольников PKO и OPM находим, что $\frac{OP}{OM} = \frac{KP}{OP}$, поэтому $OM = \frac{OP^2}{KP} = \frac{25}{4}$. Поскольку средняя линия трапеции равна $\frac{25}{2}$,

$$CD = AB = \frac{25}{2}.$$

Пусть N — проекция вершины C на большее основание AD. Из подобия треугольников CND и PKO находим, что $\frac{ND}{KO} = \frac{CN}{KP}$, значит,

$ND = \frac{CN \cdot KO}{KP} = \frac{10 \cdot 3}{4} = \frac{15}{2}$, а так как отрезок AN равен средней линии трапеции, то $AN = \frac{25}{2}$. Следовательно,

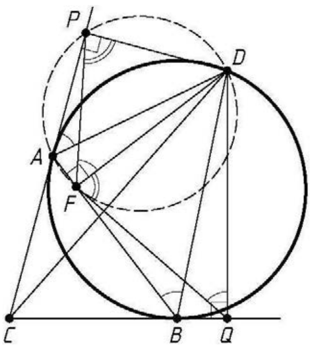
$$AD = AN + ND = \frac{25}{2} + \frac{15}{2} = 20, \quad BC = AD - 2ND = 20 - 15 = 5.$$

14.18. Расстояние от центра O окружности, описанной около треугольника ABC, до стороны BC равно 1. Найдите расстояние от точки пересечения высот до вершины A.

Ответ: 2.

Решение. См. [2], с. 155.

14.19. Через точку C проведены две прямые, касающиеся заданной окружности в точках A и B. На большей из дуг AB взята точка D, для которой $CD = 2$ и $\sin\angle ACD \cdot \sin\angle BCD = \frac{1}{3}$. Найдите расстояние от точки D до хорды AB.



Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Решение. Пусть P, F и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки D на прямые AC, AB и BC соответственно. Поскольку отрезок AD виден из точек P и F под прямым углом, то эти точки лежат на окружности с диаметром AD. Аналогично точки Q и F лежат на окружности с диаметром BD. Поэтому

$$\angle DFP = \angle DAP, \quad \angle ABD = \angle DQF.$$

Кроме того, $\angle DAP = \angle ABD$ по теореме об угле между касательной и хордой, следовательно, $\angle DFP = \angle DQF$. Аналогично $\angle DPF = \angle DFQ$. Значит, треугольники FPD и QFD подобны по двум углам. Следовательно,

$$\frac{DP}{DF} = \frac{DF}{DQ},$$

$$DF^2 = DP \cdot DQ = (CD\sin\angle ACD) \cdot (CD\sin\angle BCD) = \frac{1}{3}CD^2 = \frac{4}{3}.$$

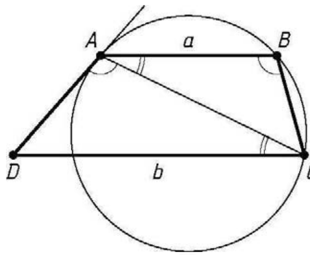
Таким образом,

$$DF = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

14.20. В трапеции $ABCD$ даны основания $AB = a$ и $CD = b$ $(a < b)$. Окружность, проходящая через вершины A, B и C, касается стороны AD. Найдите диагональ AC.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

Решение. Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что $\angle DAC = \angle ABC$.



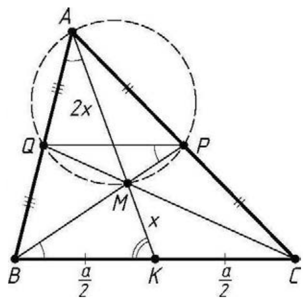
Поскольку прямые AB и CD параллельны, $\angle DCA = \angle BAC$. Следовательно, треугольники ADC и BCA подобны, поэтому $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CD}$. Отсюда находим, что

$$AC^2 = AB \cdot CD = ab.$$

14.21. Точка пересечения медиан треугольника ABC, вершина A и середины сторон AB и AC лежат на одной окружности. Найдите медиану, проведённую из вершины A, если $BC = a$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Пусть K, P и Q — середины сторон BC, AC и AB соответственно, M — точка пересечения медиан треугольника ABC.



Обозначим $MK = x$. Медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины, поэтому $AM = 2x$.

Отрезок PQ — средняя линия треугольника ABC, поэтому $PQ \parallel BC$, значит,

$$\angle BPQ = \angle CBP = \angle KBM.$$

Точки A, P, M и Q лежат на окружности, поэтому

$$\angle KAB = \angle MAQ = \angle MPQ = \angle BPQ = \angle KBM.$$

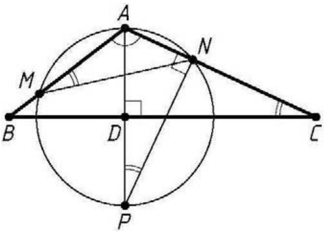
Треугольники KAB и KBM подобны по двум углам (угол при вершине K общий), значит, $\frac{BK}{KM} = \frac{AK}{BK}$, откуда $KM \cdot AK = BK^2$, или $x \cdot 3x = \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Отсюда находим, что $x = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Следовательно,

$$AK = 3x = 3 \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

14.22. Из вершины тупого угла A треугольника ABC опущена высота AD. Проведена окружность с центром в точке D и радиусом, равным AD. Она пересекает стороны треугольника AB и AC в точках M и N соответственно. Найдите сторону AC, если известно, что $AB = c$, $AM = m$ и $AN = n$.

Ответ: $\frac{mc}{n}$.

Решение. Продолжим AD до пересечения с указанной окружностью в точке P. Тогда $\angle AMN = \angle APN$, а так как $\angle ANP = 90^\circ$, то $\angle APN = \angle ACB$. Поэтому треугольники AMN и ACB подобны. Следовательно,



$$\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}.$$

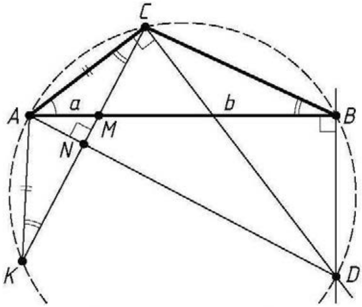
Отсюда находим, что

$$AC = \frac{AB \cdot AM}{AN} = \frac{mc}{n}.$$

14.23. В треугольнике ABC угол C тупой, D — точка пересечения прямой DB, перпендикулярной к AB, и прямой DC, перпендикулярной к AC. Высота треугольника ADC, проведённая из вершины C, пересекает AB в точке M. Известно, что $AM = a$, $MB = b$. Найдите AC.

Ответ: $\sqrt{a(a+b)}$.

Решение. Поскольку $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$, точки A, C, B и D лежат на окружности с диаметром AD.



Пусть CN — высота треугольника ADC. Продолжим CN до пересечения с окружностью в точке K. Отрезок AD — диаметр, перпендикулярный хорде CK, поэтому $CN = NK$ и $AC = AK$. Следовательно,

$$\angle ACK = \angle AKC = \angle ABC.$$

Поэтому треугольники CAM и BAC подобны по двум углам. Тогда $\frac{AC}{AB} = \frac{AM}{AC}$. Отсюда находим, что

$$AC^2 = AM \cdot AB = a(a+b), \quad AC = \sqrt{a(a+b)}.$$

14.24. Через центр окружности, описанной около треугольника ABC, проведены прямые, перпендикулярные сторонам AC и BC. Эти прямые пересекают высоту CH треугольника или её продолжение в точках P и Q. Известно, что $CP = p$, $CQ = q$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Ответ: $\sqrt{pq}$.

Решение. Первый способ. Пусть R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Из равнобедренных треугольников APC и BQC находим, что

$$AC = 2p\sin\alpha, \quad BC = 2q\sin\beta.$$

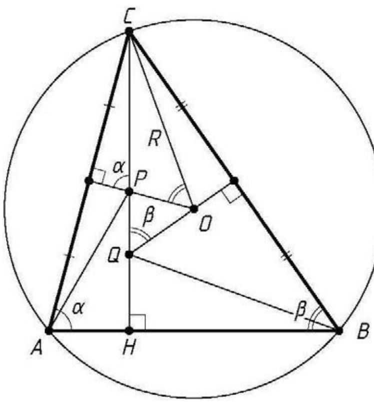
Поскольку

$$AC = 2R\sin\beta, \quad BC = 2R\sin\alpha,$$

то

$$2p\sin\alpha = 2R\sin\beta, \quad 2q\sin\beta = 2R\sin\alpha.$$

Перемножив почленно эти равенства, получим, что $R^2 = pq$.

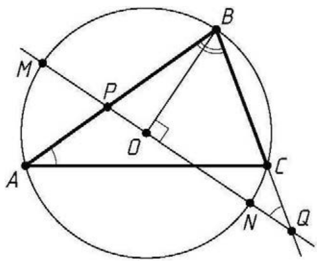


Второй способ. Предположим, что ABC — остроугольный треугольник. Тогда $\angle COP = \angle ABC$, а $\angle OQP = \angle ABC$ как углы с соответственно перпендикулярными сторонами, значит, $\angle COP = \angle OQP$.

Треугольники OQC и POC подобны по двум углам, следовательно, $\frac{OC}{CP} = \frac{CQ}{OC}$, откуда $R^2 = OC^2 = CP \cdot CQ = pq$.

Аналогично для тупоугольного треугольника.

14.25. Через центр O окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, проведена прямая, перпендикулярная BO и пересекающая отрезок AB в точке P и продолжение отрезка BC за точку C в точке Q. Найдите BP, если известно, что $AB = c$, $BC = a$ и $BQ = p$.



Ответ: $\frac{ap}{c}$.

Решение. Пусть прямая PQ пересекает описанную окружность в точках M и N (N лежит между P и Q). Тогда

$$\smile MB = \smile NB,$$

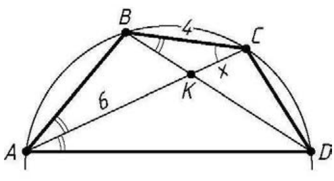
$$\angle BAC = \frac{1}{2}\smile BC = \frac{1}{2}(\smile NB - \smile NC) =$$

$$= \frac{1}{2}(\smile MB - \smile NC) = \angle MQB.$$

Следовательно, треугольники ABC и QBP подобны по двум углам. Поэтому $\frac{BC}{BP} = \frac{AB}{BQ}$. Отсюда находим, что

$$BP = \frac{BC \cdot BQ}{AB} = \frac{ap}{c}.$$

14.26. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найдите KC, если $BC = 4$, а $AK = 6$.



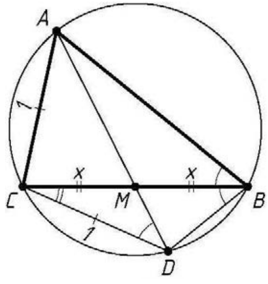
Ответ: 2.

Решение. Обозначим $KC = x$. Тогда $AC = KC + AK = x + 6$. Треугольник KBC подобен треугольнику BAC (по двум углам), так как

$$\angle KBC = \angle DBC = \angle DAC = \angle BAC,$$

поэтому $\frac{KC}{BC} = \frac{BC}{AC}$, или $\frac{x}{4} = \frac{4}{x+6}$. Из этого уравнения находим, что $x = 2$.

14.27. Продолжение медианы треугольника ABC, проведённой из вершины A, пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке D. Найдите BC, если $AC = DC = 1$.



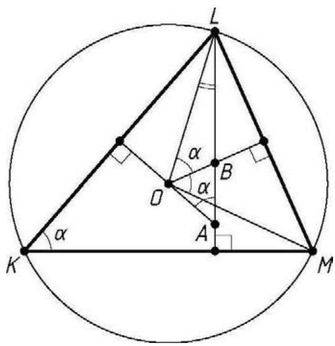
Ответ: $\sqrt{2}$.

Решение. Пусть M — середина BC. Поскольку $\angle ADC = \angle ABC = \angle CBD$, треугольник DCM подобен треугольнику BCD по двум углам. Следовательно, $\frac{DC}{BC} = \frac{CM}{DC}$.

Обозначим $BM = CM = x$. Тогда $\frac{1}{2x} = \frac{x}{1}$. Отсюда находим, что $x^2 = \frac{1}{2}$. Следовательно, $BC = 2x = \sqrt{2}$.

14.28. Радиус окружности, описанной около треугольника KLM, равен R. Через вершину L проведена прямая, перпендикулярная стороне KM. Эту прямую пересекают в точках A и B серединные перпендикуляры к сторонам KL и LM соответственно. Известно, что $AL = a$. Найдите BL.

Ответ: $\frac{R^2}{a}$.



Решение. Рассмотрим случай, когда треугольник KLM остроугольный. Пусть O — центр его описанной окружности. Обозначим $\angle LKM = \alpha$. Тогда $\angle MOL = 2\alpha$ как центральный угол, соответствующий вписанному углу LKM, а $\angle LOB = \frac{1}{2}\angle MOL = \alpha$.

С другой стороны,

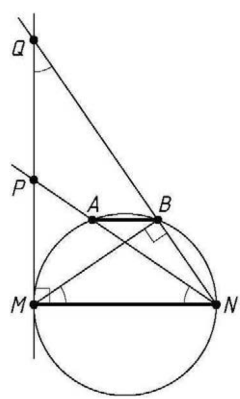
$\angle OAL = 90^\circ - \angle ALK = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$,

поэтому треугольники OAL и BOL подобны по двум углам, значит, $\frac{BL}{OL} = \frac{OL}{AL}$, следовательно, $BL = \frac{OL^2}{AL} = \frac{R^2}{a}$.

Аналогично для тупоугольного треугольника.

14.29. В окружности проведены диаметр MN и хорда AB, параллельная диаметру MN. Касательная к окружности в точке M пересекает прямые NA и NB соответственно в точках P и Q. Известно, что $MP = p$, $MQ = q$. Найдите MN.

Ответ: $\sqrt{pq}$.



Решение. Дуги, заключённые между параллельными хордами, равны, поэтому равны опирающиеся на них вписанные углы. Кроме того, $\angle MBN = 90^\circ$, поэтому углы BMN и MQN равны (каждый из них составляет 90° в сумме с углом MNQ). Значит,

$$\angle PNM = \angle ANM = \angle BMN = \angle MQN.$$

Поэтому прямоугольные треугольники MQN и MNP подобны по двум углам. Следовательно, $\frac{MP}{MN} = \frac{MN}{MQ}$, откуда

$$MN^2 = MP \cdot MQ = pq.$$

14.30. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Около треугольника ECB описана окружность, а касательная к этой окружности, проведённая в точке E, пересекает прямую AD в точке F таким образом, что точки A, D и F лежат последовательно на этой прямой. Известно, что $AF = a$, $AD = b$. Найдите EF.

Ответ: $\sqrt{a(a-b)}$.

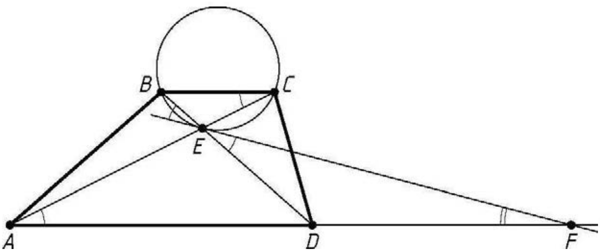
Решение. Угол, вертикальный с углом DEF, равен половине дуги BE, не содержащей точки C (как угол между касательной и хордой), поэтому

$$\angle CAD = \angle BCE = \angle DEF.$$

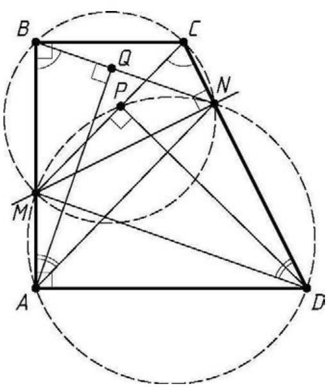
Значит, треугольники DEF и EAF подобны по двум углам (угол при вершине F общий). Поэтому $\frac{DF}{EF} = \frac{EF}{AF}$, откуда находим, что

$$EF^2 = DF \cdot AF = a(a-b).$$

Следовательно, $EF = \sqrt{a(a-b)}$.



14.31. Боковая сторона AB трапеции $ABCD$ перпендикулярна основаниям AD и BC. Прямая, перпендикулярная стороне CD, пересекает сторону AB в точке M, а сторону CD — в точке N. Известно также, что $MC = a$, $BN = b$, а расстояние от точки D до прямой MC равно c. Найдите расстояние от точки A до прямой BN.



Ответ: $\frac{bc}{a}$.

Решение. Из точек B и N отрезок MC виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром MC. Вписанные в эту окружность углы MBN и MCN опираются на одну и ту же дугу. Следовательно,

$$\angle ABN = \angle MBN = \angle MCN = \angle MCD.$$

Из точек A и N отрезок MD виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром MD.

Вписанные в эту окружность углы MDN и MAN опираются на одну и ту же дугу. Следовательно,

$$\angle BAN = \angle MAN = \angle MDN = \angle MDC.$$

Из доказанного следует, что треугольники ANB и DMC подобны по двум углам. Значит, отношение их соответствующих высот AQ и DP равно отношению оснований, т. е.

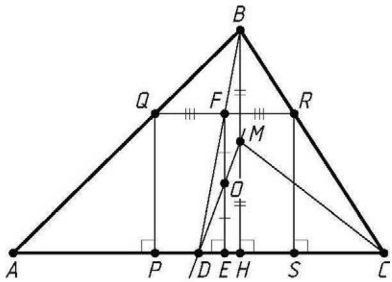
$$\frac{AQ}{DP} = \frac{BN}{MC}, \quad \text{или} \quad \frac{AQ}{c} = \frac{b}{a}.$$

Следовательно, $AQ = \frac{bc}{a}$.

14.32. В треугольник ABC со сторонами $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 7$ вписан квадрат, две вершины которого лежат на стороне AC, одна на стороне AB и одна на стороне BC. Через середину D стороны AC и центр квадрата проведена прямая, которая пересекается с высотой BH треугольника ABC в точке M. Найдите площадь треугольника DMC.

Ответ: $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Решение. Пусть вершины P и S квадрата $PQRS$ лежат на стороне AC (P лежит между A и S), O — центр квадрата, F — точка пересечения BD и QR. Треугольник BFR подобен треугольнику BDC, а треугольник BQF — треугольнику BAD, поэтому $\frac{FR}{DC} = \frac{BF}{BD} = \frac{QF}{AD}$, а так как $DC = AD$, то $FR = FQ$, т. е. F — середина QR.



Пусть прямая FO пересекает AC в точке E. Тогда $FE \parallel QP \parallel BH$, а так как O — середина FE, то, рассуждая аналогично, получаем, что M — середина высоты BH.

Высота MH треугольника DMC вдвое меньше высоты BH треугольника ABC, основание DC — вдвое меньше основания AC, поэтому площадь треугольника DMC в 4 раза меньше площади треугольника ABC.

По формуле Герона находим

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{9(9-7)(9-6)(9-5)} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6\sqrt{6}.$$

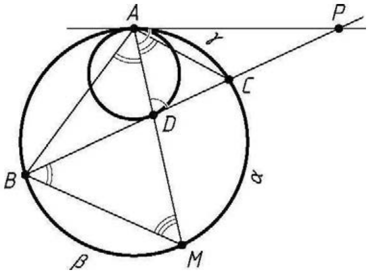
Следовательно,

$$S_{\triangle DMC} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

14.33. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке A. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке D. Прямая AD вторично пересекает бо́льшую окружность в точке M. Найдите MB, если $MA = a$, $MD = b$.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

Решение. Докажем сначала, что точка M — середина дуги BC, не содержащей точки A. Пусть общая касательная к данным окружностям, проведённая через точку A, пересекает прямую BC в точке P. Тогда $\angle MAP = \angle ADP$ как углы при основании равнобедренного треугольника ADP.



Пусть α, β и γ — угловые величины дуг CM (не содержащей точки A), BM (не содержащей точки A) и AC (не содержащей точки B) соответственно. Тогда из равенства углов MAP и ADP следует, что

$$\frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{\gamma + \beta}{2},$$

откуда получаем, что $\alpha = \beta$. Значит,

$$\angle DBM = \angle CBM = \angle CAM = \angle BAM$$

и треугольники BDM и ABM подобны по двум углам. Следовательно,

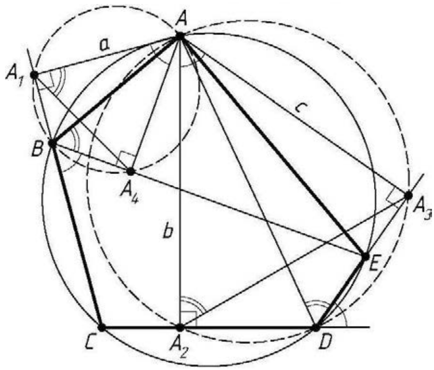
$$\frac{BM}{DM} = \frac{AM}{BM},$$

откуда находим, что $BM^2 = AM \cdot DM = ab$.

14.34. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от точки A до прямых BC, DC и DE равны соответственно a, b и c. Найдите расстояние от вершины A до прямой BE.

Ответ: $\frac{ac}{b}$.

Решение. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые BC, DC, DE и BE соответственно. Докажем, что треугольник AA_1A_4 подобен треугольнику AA_2A_3.



Действительно,

$$\angle A_1AA_4 = 180^\circ - \angle A_1BA_4 = \angle CBE = 180^\circ - \angle CDE = \angle A_2AA_3.$$

Точки A_1 и A_4 лежат на окружности с диаметром AB, а точки A_2 и A_3 — на окружности с диаметром AD. Поэтому

$$\angle AA_1A_4 = \angle ABE = \angle ADE = \angle AA_2A_3.$$

Из доказанного следует, что $\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{AA_4}{AA_3}$. Отсюда находим, что

$$AA_4 = AA_1 \cdot \frac{AA_3}{AA_2} = \frac{ac}{b}.$$

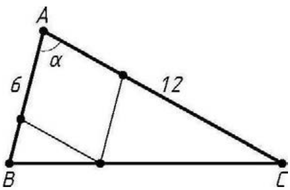
Задачи на доказательство и вычисление

14.35.1. Две стороны треугольника равны 6 и 12, косинус угла между ними равен $\frac{1}{4}$. В треугольник вписан ромб, имеющий с треугольником общий угол, заключённый между данными сторонами (вершина ромба, противоположная вершине этого угла, лежит на третьей стороне треугольника).

а) Докажите, что данный треугольник равнобедренный.

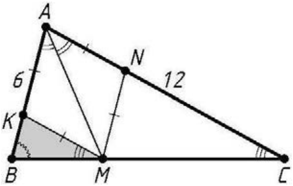
б) Найдите сторону ромба.

Ответ: 4.



Решение. а) Пусть ABC — треугольник со сторонами $AB = 6$, $AC = 12$ и углом α между ними. По теореме косинусов находим, что

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos\alpha} = \sqrt{36 + 144 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \frac{1}{4}} = 12.$$



Значит, $BC = AC$. Следовательно, треугольник ABC равнобедренный.

б) Пусть вершины K, M и N ромба $AKMN$ расположены на сторонах соответственно AB, BC и AC треугольника ABC. По свойству ромба его диагональ AM — биссектриса угла BAC. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$, значит, $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{3}$.

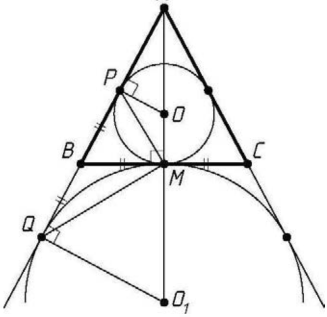
Треугольник KBM подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{1}{3}$, следовательно, $KM = \frac{1}{3}AC = 4$.

14.36.1. Первая окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается боковой стороны AB в точке P, а основания BC — в точке M. Вторая окружность, касающаяся основания BC и продолжений боковых сторон, касается прямой AB в точке Q.

а) Докажите, что треугольник PMQ прямоугольный.

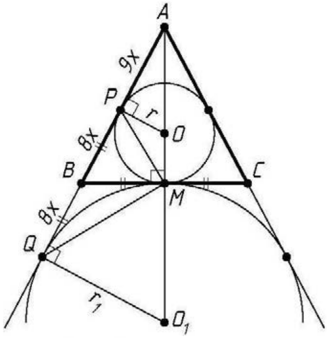
б) Найдите радиус второй окружности, если высота треугольника, проведённая из вершины A, равна 45, а точка P делит боковую сторону AB в отношении $9 : 8$, считая от вершины A.

Ответ: 40.



Решение. а) Треугольник ABC равнобедренный, поэтому обе окружности касаются основания BC в одной и той же точке — середине M основания BC. Из точки B проведены касательные BM и BP к вписанной окружности треугольника ABC, поэтому $BM = BP$. Аналогично $BM = BQ$, значит, MB — медиана треугольника PMQ. Она равна половине стороны PQ, следовательно, треугольник PMQ прямоугольный с прямым углом при вершине M.

б) Положим $AP = 9x$ и $BP = 8x$. Тогда $AB = 17x$, $BM = BP = 8x$. По теореме Пифагора $AM^2 + BM^2 = AB^2$, или $45^2 + 64x^2 = 289x^2$. Отсюда находим, что $x = 3$. Поэтому $BC = 16x = 48$.



Пусть p — полупериметр треугольника ABC, $OP = r$ — радиус его вписанной окружности, $O_1Q = r_a$ — радиус второй окружности. Тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 45 = 24 \cdot 45,$$

$$p = AB + BM = 17x + 8x = 25x = 75,$$

$$r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{24 \cdot 45}{75} = \frac{72}{5}.$$

Прямоугольный треугольник AO_1Q подобен прямоугольному треугольнику AOP с коэффициентом $\frac{AQ}{AP} = \frac{25x}{9x} = \frac{25}{9}$. Следовательно,

$$r_a = O_1Q = \frac{25}{9} \cdot OP = \frac{25}{9} \cdot \frac{72}{5} = 40.$$

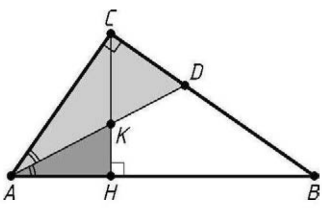
14.37.1. Высота CH, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника ABC, пересекает биссектрису AD в точке K.

а) Докажите, что $\frac{AH}{KH} = \frac{AC}{CD}$.

б) Найдите острые углы треугольника ABC, если $\frac{AK}{KD} = 1 + \sqrt{2}$.

Ответ: 45°, 45°.

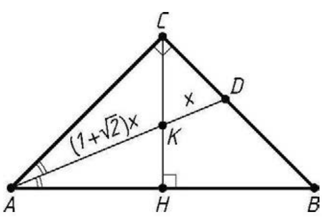
Решение. а) Прямоугольные треугольники AHK и ACD подобны, так как равны их острые углы HAK и CAD. Следовательно, $\frac{AH}{KH} = \frac{AC}{CD}$.



б) По условию задачи $\frac{AK}{KD} = 1 + \sqrt{2}$, поэтому

$$\cos\angle CAB = \cos\angle CAH = \frac{AH}{AC} = \frac{AK}{AD} =$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})+1} = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



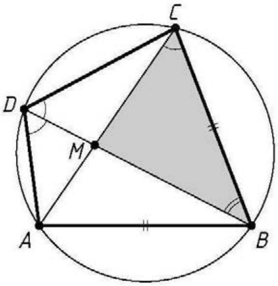
Следовательно,

$$\angle CAB = \angle CBA = 45^\circ.$$

14.38.1. Диагонали вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а $AB = BC$.

а) Докажите, что треугольник BMC подобен треугольнику BCD.

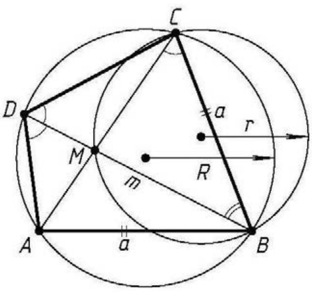
б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCM, если радиус исходной окружности равен R, $AB = BC = a$, $BD = m$.



Ответ: $\frac{aR}{m}$.

Решение. а) Вписанные углы ADB и CDB опираются на равные хорды, поэтому $\angle ADB = \angle CDB$. Вписанные углы ACB и ADB опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle ACB = \angle ADB$. Значит,

$$\angle MCB = \angle ACB = \angle CDB.$$



Следовательно, треугольники BMC и BCD подобны по двум углам (угол при вершине B общий).

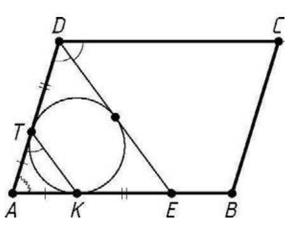
б) Пусть r — радиус окружности, описанной около треугольника BCM. Из подобия треугольников BMC и BCD следует, что $\frac{r}{R} = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{m}$. Отсюда находим, что $r = \frac{aR}{m}$.

14.39.1. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T.

а) Докажите, что $KT \parallel DE$.

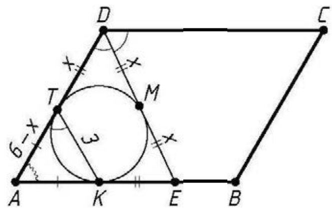
б) Найдите угол BAD, если сторона $AD = 6$ и $KT = 3$.

Ответ: 60°.



Решение. а) Прямые AE и CD параллельны, а DE — биссектриса угла ADC, поэтому $\angle AED = \angle CDE = \angle ADE$. Значит, треугольник ADE равнобедренный, $AD = AE$. Отрезки AK и AT касательных, проведённых к окружности из точки A, равны, значит, треугольник ATK также равнобедренный, причём угол при вершине A у этих треугольников общий. Поэтому $\angle ATK = \angle ADE$. Следовательно, $KT \parallel DE$.

б) Пусть окружность касается основания DE равнобедренного треугольника ADE в точке M. Тогда M — середина DE. Обозначим



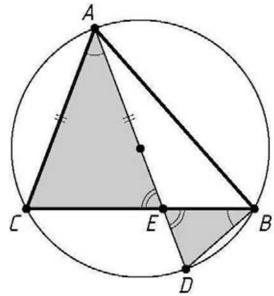
$DM = x$. Тогда $DT = DM = x$, $AT = AD - DT = 6 - x$. Треугольник ATK подобен треугольнику ADE, поэтому $\frac{AT}{AD} = \frac{TK}{DE}$, или $\frac{6-x}{6} = \frac{3}{2x}$. Отсюда находим, что $x = 3$. Тогда $DE = 2x = 6$, значит, треугольник ADE равносторонний. Следовательно, $\angle BAD = \angle EAD = 60^\circ$.

14.40.1. Около треугольника ABC описана окружность. Диаметр AD пересекает сторону BC в точке E, при этом $AE = AC$.

а) Докажите, что $BD = BE$.

б) Найдите отношение $DE : AE$, если известно, что $BE : CE = 2 : 3$.

Ответ: $1 : 3$.

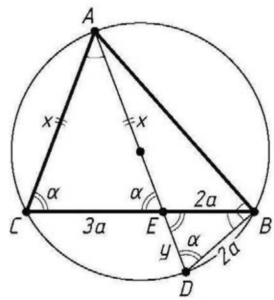


Решение. а) Вписанные углы CBD и CAD опираются на одну и ту же дугу, поэтому

$$\angle DBE = \angle DBC = \angle CAD = \angle CAE.$$

Треугольник DBE подобен равнобедренному треугольнику CAE по двум углам, значит, треугольник DBE также равнобедренный. Следовательно, $BD = BE$.

б) Обозначим $\angle ADB = \angle ACE = \alpha$, $AC = AE = x$, $DE = y$ и положим $BD = BE = 2a$, $CE = 3a$.



Точка B лежит на окружности с диаметром AD, поэтому $\angle ABD = 90^\circ$. Из равнобедренного треугольника ACE и прямоугольного треугольника ABD находим, что

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}CE}{AE} = \frac{3a}{2x}, \quad \cos\alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{2a}{x+y}.$$

Тогда $\frac{3a}{2x} = \frac{2a}{x+y}$, или $\frac{3}{2x} = \frac{2}{x+y}$. Отсюда находим, что $x = 3y$. Следовательно, $\frac{DE}{AE} = \frac{y}{x} = \frac{1}{3}$.

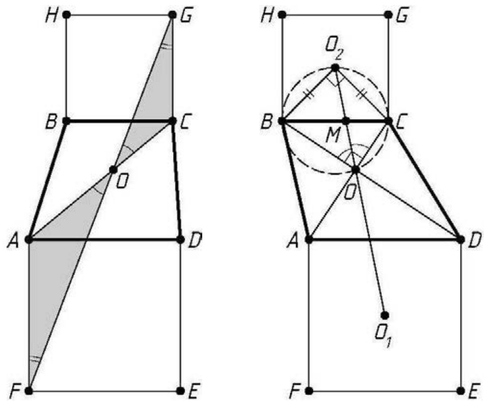
14.41.1. На основаниях AD и BC трапеции $ABCD$ построены квадраты $ADEF$ и $BCGH$, расположенные вне трапеции.

а) Докажите, что прямая FG проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

б) Прямая, проходящая через центры квадратов, пересекает основание BC в точке M. Найдите BM, если известно, что $BC = 20$, $AC \perp BD$ и $BD : AC = 3 : 2$.

Ответ: 12.

Решение. а) Пусть отрезок FG пересекает диагональ AC трапеции в точке O. Из подобия треугольников AOF и COG получаем, что $\frac{AO}{OC}=\frac{AF}{CG}=\frac{AD}{BC}$. Но точка пересечения диагоналей делит диагональ AC в том же отношении. Следовательно, O — точка пересечения диагоналей трапеции.



б) Пусть O_1 и O_2 — центры квадратов $ADEF$ и $BCGH$ соответственно. Аналогично предыдущему докажем, что отрезок O_1O_2 проходит через точку O пересечения диагоналей трапеции.

Из точек O_2 и O отрезок BC виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром BC. Вписанные в эту окружность углы BOO_2 и COO_2 опираются на равные хорды, значит, OO_2 — биссектриса угла BOC, а OM — биссектриса треугольника BOC. По теореме о биссектрисе треугольника $\frac{BM}{MC}=\frac{OB}{OC}$, а так как отрезки OB и OC составляют одну и ту же часть соответственно от BD и AC, то $\frac{OB}{OC}=\frac{BD}{AC}$. Значит, $\frac{BM}{MC}=\frac{BD}{AC}=\frac{3}{2}$. Следовательно, $BM=$ $=\frac{3}{5}BC=\frac{3}{5}\cdot 20=12$.

14.42.1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Точка X лежит на его стороне AD, причём $BX \parallel CD$ и $CX \parallel BA$.

а) Докажите, что прямые BX и CX разбивают четырёхугольник $ABCD$ на три подобных треугольника.

б) Найдите BC, если $AX=\frac{3}{2}$ и $DX=6$.

Ответ: 3.

Решение. а) Обозначим углы при вершинах A, B и X треугольника ABX через α, β и γ соответственно. Поскольку $CX \parallel BA$ и $BX \parallel CD$,

то

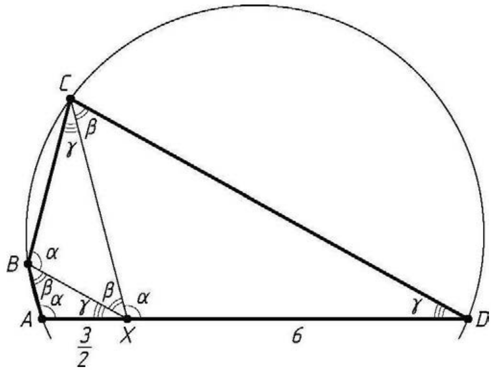
$$\angle DCX = \angle BXC = \angle ABX = \beta, \quad \angle CDX = \angle BXA = \gamma, \quad \angle CXD = \angle BAX = \alpha.$$

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, поэтому суммы его противоположных углов равны по 180°, значит,

$$\angle CBA = 180^\circ - \angle CDA = 180^\circ - \gamma = \alpha + \beta,$$

а так как $\angle ABX = \beta$, то $\angle CBX = \alpha$.

Следовательно, треугольники ABX, BXC и XCD подобны.



б) Перемножив почленно равенства

$$\frac{BC}{AX} = \frac{CX}{BX}, \quad \frac{BC}{DX} = \frac{BX}{CX},$$

находим, что

$$BC^2 = AX \cdot DX = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9.$$

Следовательно, $BC = 3$.

14.43.1. Окружность, вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$, касается боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Отрезок AN пересекает окружность в точке K, а луч MK пересекает основание AD в точке L.

а) Докажите, что треугольник AKL подобен треугольнику MAL.

б) Найдите отношение $AL : LD$.

Ответ: $1 : 3$.

Решение. а) Пусть $BC = 2b$, $AD = 2a$, а окружность касается оснований BC и AD в точках P и Q соответственно. Поскольку трапеция равнобедренная, точки P и Q — середины оснований, поэтому

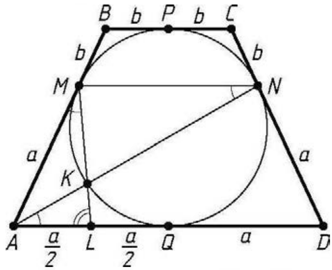
$$BM = BP = b, \quad CN = CP = b, \quad AM = AQ = a, \quad DN = DQ = a.$$

Тогда $\frac{BM}{AM}=\frac{b}{a}=\frac{CN}{DN}$, значит, прямая MN параллельна основаниям трапеции.

Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что

$$\angle AML = \angle MNK = \angle KAL.$$

Следовательно, треугольник AKL подобен треугольнику MAL по двум углам (угол при вершине L общий).



б) Из этого подобия получаем, что $\frac{AL}{ML}=\frac{KL}{AL}$, значит, $AL^2=KL\cdot ML$. По теореме о касательной и секущей $LQ^2=KL\cdot ML$, поэтому $AL=LQ=$ $=\frac{1}{2}AQ=\frac{a}{2}$. Следовательно, $\frac{AL}{LD}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{3a}{2}}=\frac{1}{3}$.

14.44.1. На стороне AB и диагонали AC квадрата $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM:MB=1:4$ и $AN:NC=3:2$.

а) Докажите, что точки A, M, N и D лежат на одной окружности.

б) Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей четырёхугольника $AMND$ до прямой MN, если сторона квадрата равна 30.

Ответ: $\sqrt{13}$.

Решение. а) Пусть E и F — проекции точки N на стороны AB и AD соответственно. Тогда

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{3}{5},\quad \frac{DF}{AD}=\frac{CN}{AC}=\frac{2}{5},$$

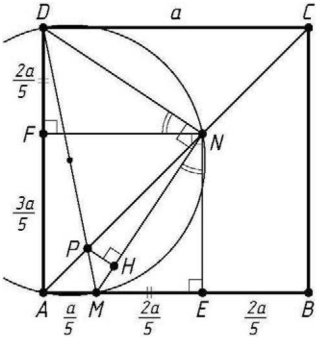
$$ME = AE - AM = \frac{3}{5}AB - \frac{1}{5}AB = \frac{2}{5}AB,$$

$$DF = \frac{2}{5}AD = \frac{2}{5}AB = ME.$$

Кроме того, $NE=NF$, так как точка N лежит на диагонали квадрата. Прямоугольные треугольники MEN и DFN равны по двум катетам, значит, $\angle MNE=\angle DNF$, а так как $\angle ENF=90^\circ$, то

$$\angle MND = \angle MNF + \angle DNF = \angle MNF + \angle MNE = 90^\circ.$$

Из точек A и N отрезок DM виден под прямым углом, следовательно, эти точки лежат на окружности с диаметром DM.



б) Обозначим через a сторону квадрата. Пусть P — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $AMND$. Треугольник APM подобен треугольнику CPD с коэффициентом $\frac{AM}{CD} = \frac{\frac{1}{5}a}{a} = \frac{1}{5}$, значит, $\frac{MP}{PD} = \frac{1}{5}$, поэтому $\frac{MP}{MD} = \frac{1}{6}$.

Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки P на MN. Тогда $PH \parallel DN$, так как $DN \perp MN$. Треугольник MPH подобен треугольнику MDN, причём коэффициент подобия равен $\frac{MP}{MD} = \frac{1}{6}$. Следовательно,

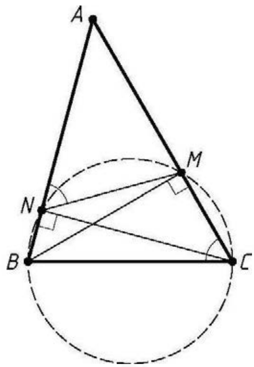
$$PH = \frac{1}{6}DN = \frac{1}{6}\sqrt{DF^2 + NF^2} = \frac{1}{6}\sqrt{\left(\frac{2}{5}a\right)^2 + \left(\frac{3}{5}a\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{5} = \frac{a\sqrt{13}}{30} = \frac{30\sqrt{13}}{30} = \sqrt{13}.$$

§ 15. Некоторые свойства высот и точки их пересечения

Подготовительные задачи

15.1. Сторона треугольника равна $\sqrt{2}$, углы, прилежащие к ней, равны 75° и 60°. Найдите отрезок, соединяющий основания высот, проведённых из вершин этих углов.



Ответ: 1.

Решение. Пусть BM и CN — высоты треугольника ABC, $BC=\sqrt{2}$, $\angle ABC=75^\circ$, $\angle ACB=60^\circ$. Тогда

$$\angle BAC = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ.$$

Из точек M и N сторона BC видна под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром BC. Четырёхугольник $BCMN$ вписанный, поэтому

$$\angle ACB = \angle MCB = 180^\circ - \angle BNM = \angle ANM,$$

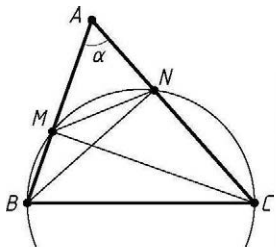
значит, треугольник AMN подобен треугольнику ABC по двум углам (угол при вершине A общий), причём коэффициент подобия равен

$$\frac{AM}{AB} = \cos\angle BAM = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$MN = BC\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 1.$$

15.2. На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Найдите площадь треугольника AMN, если площадь треугольника ABC равна S, а угол BAC равен α.



Ответ: $S\cos^2\alpha$.

Решение. Отрезки CM и BN — высоты треугольника ABC. Треугольник MAN подобен треугольнику CAB с коэффициентом $\dfrac{AN}{AB}=\cos\alpha$. Поэтому

$$S_{\Delta AMN} = \left(\frac{AN}{AB}\right)^2\cdot S_{\Delta ABC} = S\cos^2\alpha.$$

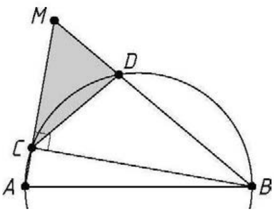
15.3. Точка M, лежащая вне круга с диаметром AB, соединена с точками A и B. Отрезки MA и MB пересекают окружность в точках C и D соответственно. Площадь круга, вписанного в треугольник AMB, в четыре раза больше, чем площадь круга, вписанного в треугольник CMD. Найдите углы треугольника AMB, если известно, что один из них в два раза больше другого.

Ответ: 60°, 40°, 80°.

Решение. Поскольку

$$\angle MCD = 180^\circ - \angle ACD = \angle ABD,$$

треугольник MCD подобен треугольнику MBA по двум углам. Площадь круга, вписанного в треугольник MCD, в четыре раза меньше площади круга, вписанного в треугольник MBA, поэтому радиус первого круга вдвое меньше радиуса второго. Следовательно, коэффициент подобия треугольников MCD и MBA равен $\frac{1}{2}$, значит,



$$\cos\angle CMB = \frac{MC}{MB} = \frac{1}{2},$$

а так как угол CMB острый (точка M расположена вне данного круга), то

$$\angle AMB = \angle CMB = 60^\circ.$$

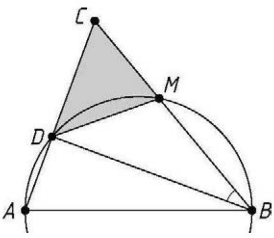
Угол при вершине M треугольника AMB не может быть вдвое меньше угла A или B, так как в противном случае один из углов A или B равен $120^\circ > 90^\circ$, что невозможно. Если же угол M вдвое больше угла A, то угол B равен 90°, что также невозможно (в этом случае прямая MB касается данной окружности). Аналогично докажем, что угол M не может быть вдвое меньше угла B.

Таким образом, либо угол A вдвое больше угла B, либо наоборот. В каждом из этих случаев один из углов равен 40°, а второй 80°.

15.4. Отрезок AB — диаметр окружности, а точка C лежит вне окружности. Отрезки AC и BC пересекаются с окружностью в точках D и M соответственно. Найдите угол CBD, если площади треугольников DCM и ABC относятся как $1:4$.

Ответ: 30°.

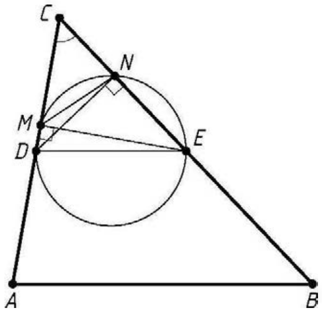
Решение. Треугольники DCM и BCA подобны с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Поэтому $BC = 2CD$. Следовательно,



$$\sin\angle CBD = \frac{CD}{BC} = \frac{1}{2},$$

а так как угол CBD острый, то $\angle CBD = 30^\circ$.

15.5. В треугольнике ABC на средней линии DE, параллельной AB, как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N. Найдите MN, если $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.



Ответ: $\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{4ab}$.

Решение. Точки M и N лежат на окружности с диаметром DE, поэтому DN и EM — высоты треугольника CED, значит, треугольники CMN и CED подобны с коэффициентом $\cos\angle ACB$. Следовательно,

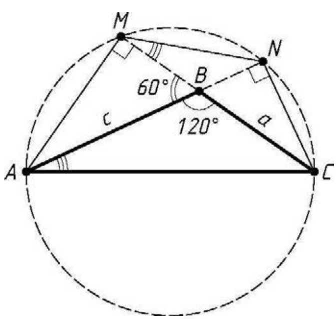
$$MN = DE\cos\angle ACB = \frac{c}{2}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{4ab}.$$

15.6. В треугольнике ABC известно, что $AB=c$, $BC=a$, $\angle ABC=120^\circ$. Найдите расстояние между основаниями высот, проведённых из вершин A и C.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2+ac}$.

Решение. Пусть AM и CN — высоты треугольника ABC. Поскольку угол ABC тупой, точки M и N лежат на продолжениях сторон BC и AB.

Из точек M и N сторона AC видна под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром AC. Вписанные в эту окружность углы CMN и CAN опираются на одну и ту же дугу, поэтому



$$\angle BMN = \angle CMN = \angle CAN = \angle CAB,$$

значит, треугольник MBN подобен треугольнику ABC по двум углам (угол при вершине B общий), причём коэффициент подобия равен

$$\frac{BM}{AB} = \cos\angle ABM = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$MN = AC\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2+AB^2-2BC\cdot AB\cos 120^\circ} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2+ac}.$$

15.7. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE. Найдите AC, если $BC=a$, $AB=b$, $\frac{DE}{AC}=k$.

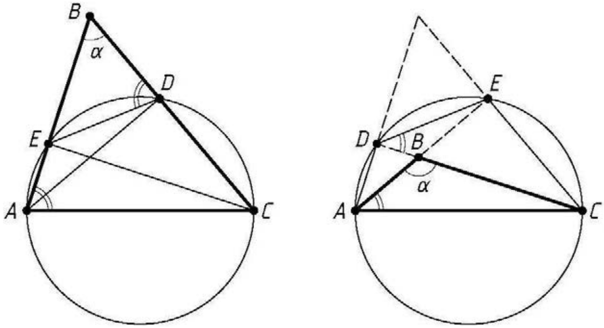
Ответ: $\sqrt{a^2+b^2\pm 2abk}$.

Решение. Обозначим $\angle ABC = \alpha$. Если $\alpha < 90^\circ$ (см. рисунок слева), то треугольники EDB и CAB подобны с коэффициентом $\cos\alpha$, т. е. $\cos\alpha = \frac{DE}{AC} = k$. Тогда по теореме косинусов

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cdot \cos\alpha = b^2 + a^2 - 2abk.$$

Если $\alpha > 90^\circ$ (см. рисунок справа), то треугольники EDB и CAB подобны с коэффициентом $k = \frac{DE}{AC} = \frac{DB}{AB} = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$. Тогда

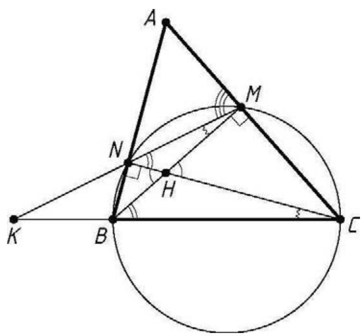
$$AC^2 = a^2 + b^2 + 2abk.$$



15.8. Высоты BM и CN остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке H. Сторону BC продолжили до пересечения с прямой MN в точке K. Сколько пар подобных треугольников при этом получилось?

Ответ: 10.

Решение. Прямоугольные треугольники ABM и ACN подобны по двум углам (угол A общий). Прямоугольные треугольники BNH и CMH подобны по двум углам (углы BHN и CHM вертикальные). Прямоугольные треугольники BNH и BMA подобны по двум углам



(угол B общий). Прямоугольные треугольники CMH и CNA подобны по двум углам (угол C общий). Следовательно, подобны прямоугольные треугольники BNH и CNA, а также прямоугольные треугольники CMH и BMA.

Из точек M и N отрезок BC виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром BC. Тогда $\angle CNM = \angle CBM$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу. Значит, треугольники NHM и BHC подобны по двум углам.

Поскольку сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна 180°, то

$$\angle NBC = 180^\circ - \angle CMN = \angle AMN,$$

значит, треугольники AMN и ABC подобны по двум углам (угол A общий).

Аналогично треугольники KCM и KNB подобны по двум углам (угол K общий).

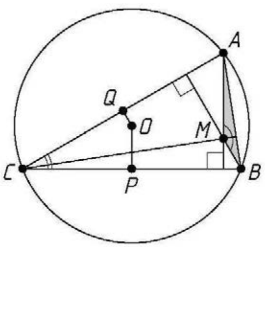
Наконец, из равенства $\angle BCN = \angle BMN$ следует, что подобны треугольники KCN и KMB.

Тренировочные задачи

15.9. В остроугольном треугольнике ABC с углом C, равным 30°, высоты пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника AMB, если расстояния от центра окружности, описанной около треугольника ABC, до сторон BC и AC соответственно равны $\sqrt{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Решение. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, P и Q — проекции точки O на стороны BC и AC. Известно, что расстояние от точки пересечения высот треугольника до его вершины вдвое больше расстояния от центра описанной окружности до противоположной стороны треугольника (см. [2], с. 155). Поэтому



$$BM = 2OQ = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad AM = 2OP = 2\sqrt{2}.$$

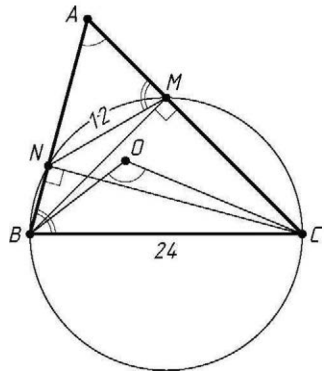
Поскольку $\angle AMB = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$, то

$$S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2} AM \cdot MB \sin 150^\circ = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

15.10. В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O — центр вписанной окружности. Известно, что $BC = 24$, $MN = 12$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.

Ответ: $8\sqrt{3}$ или 24.

Решение. Из точек M и N сторона BC видна под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром BC.



Пусть угол BAC острый. Четырёхугольник $BNMC$ вписанный, поэтому

$$\angle NBC = 180^\circ - \angle NMC = \angle AMN.$$

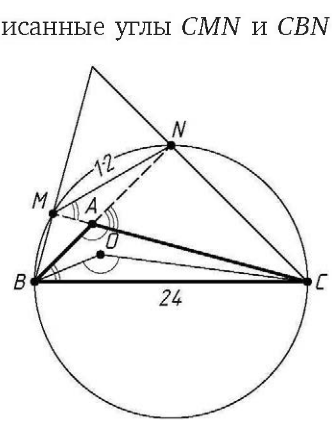
Треугольник AMN подобен треугольнику ABC по двум углам (угол A общий), причём коэффициент подобия равен $\frac{AN}{AC} = \cos\angle BAC$. В то же время коэффициент подобия равен $\frac{MN}{BC} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$, поэтому $\cos\angle BAC = \frac{1}{2}$. Тогда $\angle BAC = 60^\circ$.

Центр O окружности, вписанной в треугольник ABC, — точка пересечения биссектрис треугольника. Сумма углов при вершинах B и C треугольника ABC равна 120°, а сумма их половин (т. е. сумма углов при вершинах B и C треугольника BOC) равна 60°, значит, $\angle BOC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Пусть R — радиус окружности, описанной около треугольника BOC. По теореме синусов

$$R = \frac{BC}{2\sin\angle BOC} = \frac{24}{2\sin 120^\circ} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}.$$

Пусть теперь угол BAC тупой. Тогда вписанные углы CMN и CBN опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle AMN = \angle CMN = \angle CBN = \angle ABC$, значит, треугольник AMN подобен треугольнику ABC, причём коэффициент подобия равен $\frac{AN}{AC} = \cos\angle CAN$. В то же время коэффициент подобия равен $\frac{MN}{BC} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$, поэтому $\cos\angle CAN = \frac{1}{2}$. Значит, $\angle CAN = 60^\circ$. Следовательно,



$$\angle BAC = 180^\circ - \angle CAN = 120^\circ,$$

$$\angle BOC = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 150^\circ.$$

Пусть R — радиус окружности, описанной около треугольника BOC. По теореме синусов

$$R = \frac{BC}{2\sin\angle BOC} = \frac{24}{2\sin 150^\circ} = \frac{12}{\frac{1}{2}} = 24.$$

15.11. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что отрезок CH равен радиусу окружности, описанной около треугольника ABC. Найдите угол ACB.

Ответ: 60° или 120°.

Решение. Пусть C_1 — середина AB, O — центр описанной окружности, R — её радиус. Поскольку $CH = 2OC_1$, то

$$OC_1 = \frac{1}{2}CH = \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}OB.$$

Следовательно,

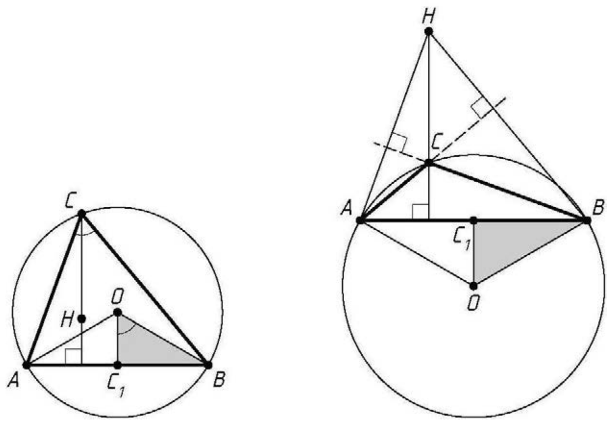
$$\angle BOC_1 = 60^\circ, \quad \angle AOB = 2\angle BOC_1 = 120^\circ.$$

Если точки C и O лежат по одну сторону от прямой AB (см. рисунок слева), то

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\cdot 120^\circ = 60^\circ.$$

Если же точки C и O лежат по разные стороны от прямой AB (см. рисунок справа), то

$$\angle ACB = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle AOB) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$



15.12. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $CH = AB$. Найдите угол ACB.

Ответ: 45° или 135°.

Решение. Пусть C_1 — середина стороны AB, O — центр описанной окружности. Поскольку $CH = 2OC_1$, то

$$OC_1 = \frac{1}{2}CH = \frac{1}{2}AB = C_1B.$$

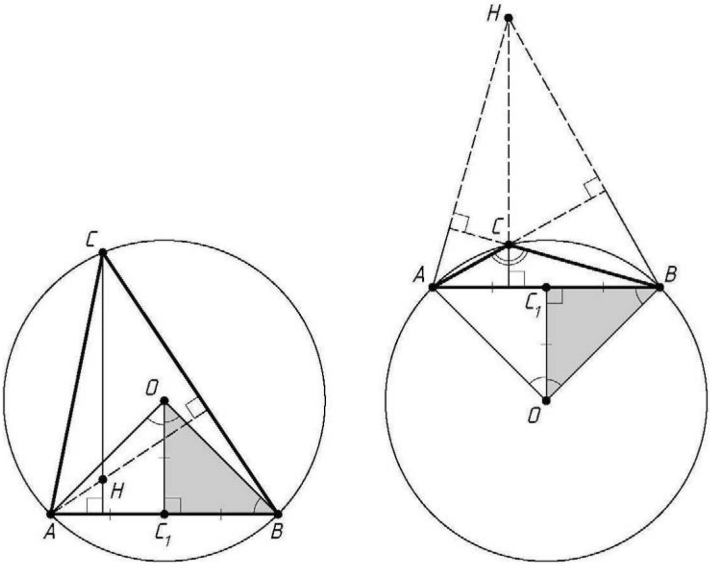
Поэтому треугольник OC_1B прямоугольный и равнобедренный. Следовательно, $\angle C_1OB = 45^\circ$.

Если точки C и O лежат по одну сторону от прямой AB (см. рисунок слева), то

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle C_1OB = 45^\circ.$$

Если же точки C и O лежат по разные стороны от прямой AB (см. рисунок справа), то

$$\angle ACB = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle AOB) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

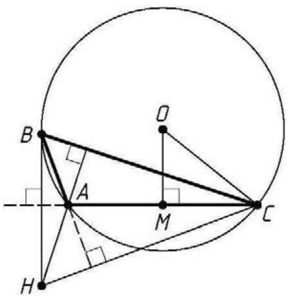


15.13. В треугольнике ABC известно, что $AB = 2$, $AC = 5$, $BC = 6$. Найдите расстояние от вершины B до точки пересечения высот.

Ответ: $\dfrac{25}{\sqrt{39}}$.

Решение. По теореме косинусов находим, что

$$\cos\angle B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{4+36-25}{2\cdot 2\cdot 6} = \frac{5}{8}.$$



Тогда

$$\sin\angle B = \sqrt{1-\cos^2\angle B} = \sqrt{1-\left(\frac{5}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{39}}{8}.$$

Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, R — её радиус, M — проекция центра на сторону AC, H — точка пересечения высот. Тогда $BH=2OM$. По теореме синусов

$$AO = R = \frac{AC}{2\sin\angle B} = \frac{5}{2\cdot\frac{\sqrt{39}}{8}} = \frac{20}{\sqrt{39}}.$$

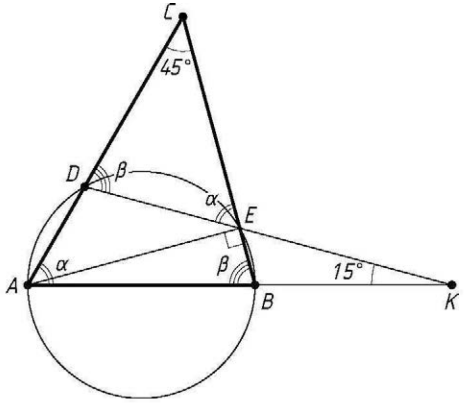
Следовательно,

$$BH = 2OM = 2\sqrt{AO^2-AM^2} = 2\sqrt{AO^2-\frac{AC^2}{4}} = 2\sqrt{\frac{400}{39}-\frac{25}{4}} = \frac{25}{\sqrt{39}}.$$

15.14. На стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая DE делит площадь треугольника ABC пополам и образует с прямой AB угол 15°. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: 60°, 75°, 45°.

Решение. Обозначим углы при вершинах A, B и C треугольника ABC через α, β и γ соответственно. Поскольку точка C лежит вне окружности с диаметром AB, то угол при вершине C острый, т. е. $\gamma<90^\circ$.



Точки A, D, E и B лежат на одной окружности, поэтому

$$\angle CDE = 180^\circ - \angle ADE = \angle ABC = \beta.$$

Аналогично $\angle CED=\alpha$.

Треугольник CDE подобен треугольнику CBA, причём коэффициент подобия равен квадратному корню из отношения площадей этих треугольников, т. е. $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$. С другой стороны, так как

$$\angle AEC = \angle AEB = 90^\circ,$$

то

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = k = \frac{CE}{AC} = \cos\angle ACE = \cos\gamma.$$

Поэтому $\gamma = 45^\circ$.

Пусть прямая DE пересекается с прямой AB в точке K. По условию $\angle AKD = 15^\circ$. В то же время ABC — внешний угол треугольника BEK, поэтому

$$\angle ABC = \angle AKD + \angle BEK = \angle AKD + \angle CED, \quad \text{или} \quad \beta = 15^\circ + \alpha.$$

Подставив β в равенство

$$\alpha + \beta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ,$$

найдём, что $\alpha = 60^\circ$. Следовательно, $\beta = 75^\circ$.

15.15. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CM и AN. Известно, что $AC = 2$, а площадь круга, описанного около треугольника MBN, равна $\frac{\pi}{3}$. Найдите угол между высотой CM и стороной BC.

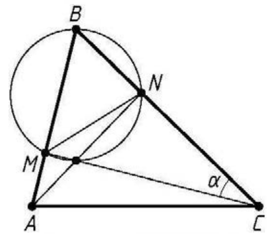
Ответ: 30°.

Решение. Обозначим $\angle BCM = \alpha$. Треугольник MBN подобен треугольнику CBA с коэффициентом

$$\frac{BM}{BC} = \cos\angle B = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha,$$

поэтому

$$MN = AC\sin\alpha = 2\sin\alpha.$$



Пусть R — радиус окружности, описанной около треугольника MBN. Тогда

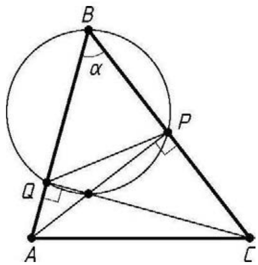
$$R = \frac{MN}{2\sin\angle B} = \frac{2\sin\alpha}{2\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{2\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

По условию задачи $\pi R^2 = \frac{\pi}{3}$, поэтому $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$, значит, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $\alpha = 30^\circ$.

15.16. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C на стороны BC и AB опущены высоты AP и CQ. Найдите сторону AC, если известно, что периметр треугольника ABC равен 15, периметр треугольника BPQ равен 9, а радиус окружности, описанной около треугольника BPQ, равен $\frac{9}{5}$.

Ответ: $\frac{24}{5}$.

Решение. Обозначим $\angle ABC = \alpha$. Треугольник PBQ подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{BP}{AB} = \cos\alpha$, а так как отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия, то



$\cos\alpha = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Тогда если r и R — радиусы описанных окружностей подобных треугольников PBQ и ABC, то

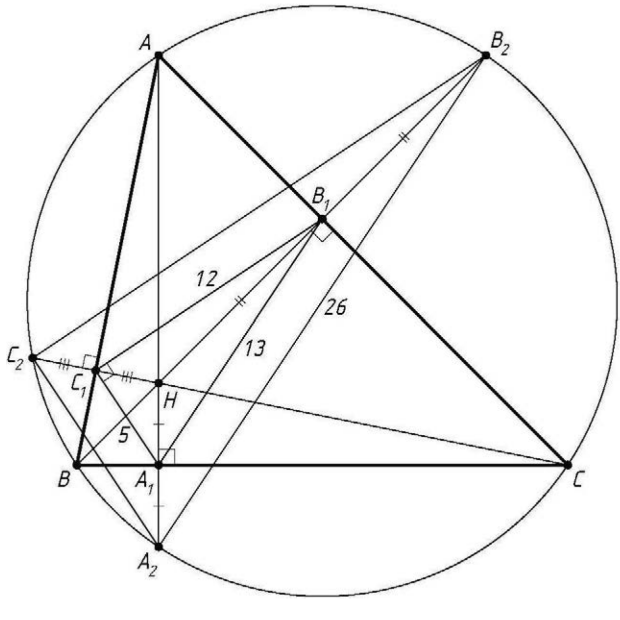
$$R = \frac{5}{3}r = \frac{5}{3} \cdot \frac{9}{5} = 3,$$

следовательно,

$$AC = 2R\sin\alpha = 2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{5}.$$

15.17. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

Ответ: 13.

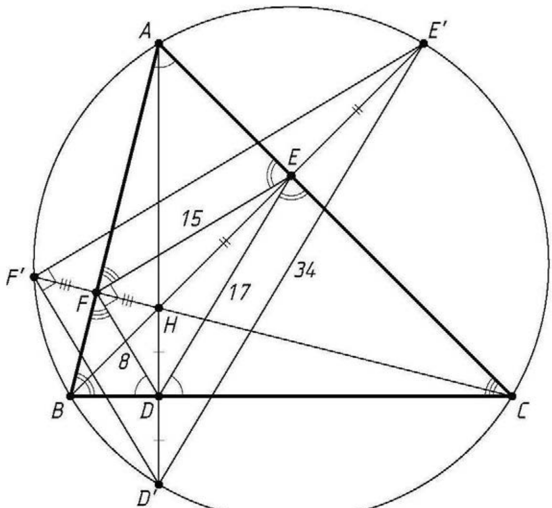


Решение. Пусть продолжения высот AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно, $A_1B_1 = 13$, $B_1C_1 = 12$, $A_1C_1 = 5$, а H — точка пересечения высот. Тогда A_1, B_1 и C_1 — середины отрезков HA_2, HB_2 и HC_2 (см. [2], с. 154), поэтому A_1B_1, A_1C_1 и B_1C_1 — средние линии треугольников A_2HB_2, A_2HC_2 и B_2HC_2. Значит, треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ с коэффициентом 2, а так как треугольник $A_1B_1C_1$ прямоугольный ($5^2 + 12^2 = 13^2$), то треугольник $A_2B_2C_2$ также прямоугольный, причём его угол, лежащий против наибольшей стороны A_2B_2, равен 90°. Следовательно, диаметр описанной окружности треугольника $A_2B_2C_2$, а значит, и треугольника ABC, равен гипотенузе треугольника $A_2B_2C_2$, т. е. 26, а искомый радиус равен 13.

15.18. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 340.

Решение. Пусть AD, BE и CF — высоты остроугольного треугольника ABC; $DF = 8$, $EF = 15$, $DE = 17$. Поскольку $8^2 + 15^2 = 17^2$, то треугольник DEF прямоугольный, $\angle DFE = 90°$.



Обозначим через α, β и γ углы при вершинах соответственно A, B и C треугольника ABC. Поскольку сторона AC видна из точек F и D под прямым углом, эти точки лежат на окружности с диаметром AC, значит,

$$\angle BDF = 180° - \angle CDF = \angle CAF = \alpha.$$

Аналогично докажем, что

$$\angle CDE = \alpha, \quad \angle CED = \beta, \quad \angle AEF = \beta, \quad \angle AFE = \gamma, \quad \angle BFD = \gamma.$$

Пусть R — радиус описанной окружности треугольника ABC. Тогда

$$S_{\triangle ABC} = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

(см. п. 22ж приложения 2).

Для того чтобы найти R, продолжим высоты AD, BE и CF до пересечения с описанной окружностью в точках D', E' и F' соответственно. Если H — точка пересечения высот треугольника ABC, то точки D, E и F — середины отрезков HD', HE' и HF'. Поэтому EF, DE и DF — средние линии треугольников $E'HF'$, $D'HE'$ и $D'HF'$. Значит, треугольник $D'E'F'$ подобен треугольнику DEF с коэффициентом 2. Следовательно, треугольник $D'E'F'$ прямоугольный, а радиус R его (и треугольника ABC) описанной окружности равен половине гипотенузы $E'D'$, т. е. 17.

Поскольку

$$\angle EDF = 180^\circ - \angle BDF - \angle CDE = 180^\circ - 2\alpha \quad \text{и} \quad \cos\angle EDF = \frac{DF}{DE} = \frac{8}{17},$$

то

$$\frac{8}{17} = \cos\angle EDF = \cos(180^\circ - 2\alpha) = -\cos 2\alpha,$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{8}{17}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{34}}.$$

Аналогично находим, что

$$\sin\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}, \quad \sin\gamma = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

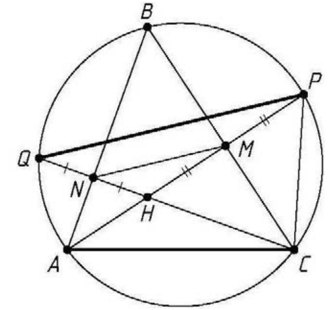
$$S_{\triangle ABC} = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = 2\cdot 17^2 \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 340.$$

15.19. Продолжения высот AM и CN остроугольного треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках P и Q. Найдите радиус описанной окружности, если $AC = a$, $PQ = \frac{6a}{5}$.

Ответ: $\frac{5a}{8}$.

Решение. Пусть H — точка пересечения высот. Известно, что точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно стороны, лежит на описанной окружности треугольника. Поэтому $HM = MP$

и $HN = NQ$. Значит, MN — средняя линия треугольника HQP. Следовательно,



$$MN = \frac{1}{2}PQ = \frac{3a}{5}.$$

Треугольник BMN подобен треугольнику BAC, причём коэффициент подобия равен $\cos\angle ABC$, значит,

$$\cos\angle ABC = \frac{MN}{AC} = \frac{\frac{3}{5}a}{a} = \frac{3}{5}, \quad \sin\angle ABC = \frac{4}{5}.$$

Если R — искомый радиус, то

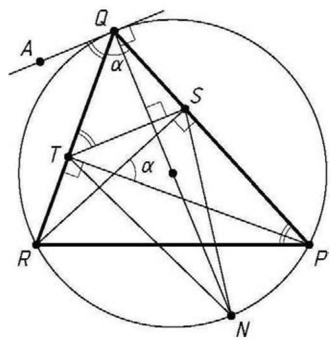
$$R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{a}{2\cdot\frac{4}{5}} = \frac{5a}{8}.$$

15.20. В остроугольном треугольнике PQR ($PQ > QR$) проведены высоты PT и RS; QN — диаметр окружности, описанной около треугольника PQR. Известно, что острый угол между высотами PT и RS равен α, $PR = a$. Найдите площадь четырёхугольника $NSQT$.

Ответ: $\frac{1}{2}a^2\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. Треугольник PQR остроугольный, поэтому его угол при вершине Q равен острому углу между высотами PT и RS, т. е. α.

Через вершину Q проведём касательную к описанной окружности треугольника PQR и отметим на ней точку A, лежащую с точкой P по разные стороны от прямой QR. Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что $\angle AQR = \angle RPQ = \angle QTS$, значит, $ST \parallel AQ$, а так как $QN \perp AQ$, то $ST \perp QN$. Таким образом, диагонали четырёхугольника $NSQT$ перпендикулярны. Тогда если s — его площадь, то $s = \frac{1}{2}ST\cdot QN$.



Треугольник TQS подобен треугольнику PQR, причём коэффициент подобия равен $\frac{QT}{QP} = \cos\alpha$, значит, $ST = PR\cos\alpha = a\cos\alpha$.

Пусть r — радиус описанной окружности треугольника PQR. Тогда $r = \frac{PR}{2\sin\alpha} = \frac{a}{2\sin\alpha}$. Следовательно,

$$s = \frac{1}{2}ST\cdot QN = \frac{1}{2}a\cos\alpha\cdot 2r = \frac{1}{2}a\cos\alpha\cdot\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}a^2\operatorname{ctg}\alpha.$$

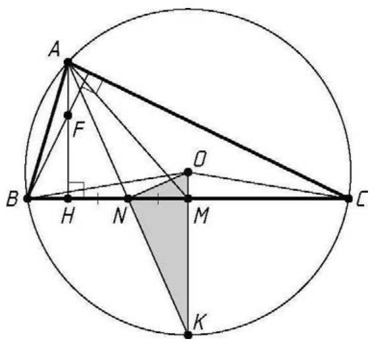
15.21. В треугольнике ABC проведены высота AH, равная h, медиана AM, равная m, и биссектриса AN. Точка N — середина отрезка MH. Найдите расстояние от вершины A до точки пересечения высот треугольника ABC.

Ответ: $\frac{m^2-h^2}{2h}$.

Решение. Из прямоугольных треугольников AHM и AHN находим, что

$$HM^2 = AM^2 - AH^2 = m^2 - h^2, \quad HN = \frac{1}{2}HM = \frac{\sqrt{m^2-h^2}}{2},$$
$$AN^2 = AH^2 + HN^2 = h^2 + \frac{m^2-h^2}{4} = \frac{m^2+3h^2}{4}.$$

Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, K — отличная от A точка пересечения прямой AN с описанной окружностью. Поскольку AK — биссектриса угла BAC, то $\smile BK = \smile KC$. Поэтому OK — биссектриса угла BOC равнобедренного треугольника BOC. Следовательно, точка M лежит на OK. Поэтому $KM \perp BC$, а так как $NH = NM$, то из равенства прямоугольных треугольников AHN и KMN следует, что $AN = NK$. Поэтому $ON \perp AK$.



В прямоугольном треугольнике ONK известно, что $NK = AN$, $KM = AH = h$. Тогда

$$NK^2 = OK \cdot KM, \quad \text{или} \quad \frac{m^2+3h^2}{4} = (h+OM)h.$$

Отсюда находим, что

$$OM = \frac{m^2-h^2}{4h}.$$

Пусть F — точка пересечения высот треугольника ABC. Тогда

$$AF = 2OM = \frac{m^2-h^2}{2h}.$$

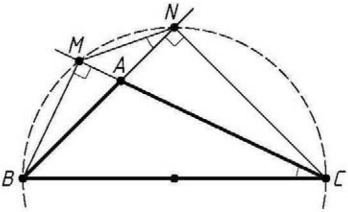
Задачи на доказательство и вычисление

15.22.1. В треугольнике ABC с тупым углом при вершине A проведены высоты BM и CN.

а) Докажите, что $\angle ANM = \angle ACB$.

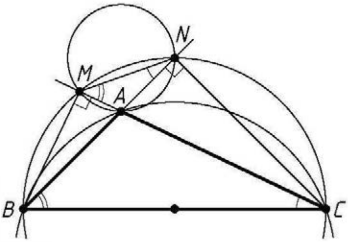
б) Найдите радиусы окружностей, описанных около треугольников BNC и AMN, если $\cos\angle BAC = -\frac{1}{3}$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 6.

Ответ: $4\sqrt{2}$, 2.



Решение. а) Из точек M и N отрезок BC виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром BC. Вписанные в эту окружность углы MNB и MCB опираются на одну и ту же дугу, следовательно,

$$\angle ANM = \angle BNM = \angle MCB = \angle ACB.$$



б) Треугольник MAN подобен треугольнику BAC по двум углам, причём коэффициент подобия равен

$$\frac{AM}{AB} = \cos\angle BAM = \cos(180^\circ - \angle BAC) = = -\cos\angle BAC = \frac{1}{3}.$$

Пусть $R = 6$ — радиус описанной окружности треугольника ABC. Поскольку

$$\sin\angle BAC = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

то по теореме синусов $BC = 2R\sin\angle BAC = 12 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 8\sqrt{2}$. Центр описанной окружности прямоугольного треугольника BNC — середина его гипотенузы BC, следовательно, радиус этой окружности равен половине BC, т. е. $4\sqrt{2}$.

Треугольник AMN подобен треугольнику BAC с коэффициентом $\frac{1}{3}$, следовательно, радиус описанной окружности треугольника AMN равен $\frac{1}{3}R = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$.

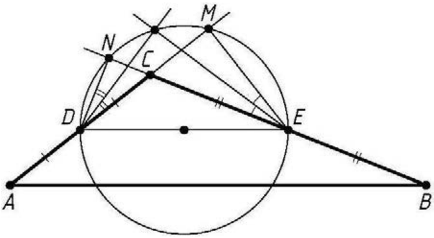
15.23.1. Точки D и E — середины сторон соответственно AC и BC треугольника ABC. На отрезке DE как на диаметре построена окружность, пересекающая продолжения сторон AC и BC в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что биссектрисы углов MEN и NDM пересекаются на этой окружности.

б) Найдите MN, если известно, что $AB = 14$, $BC = 10$, $AC = 6$.

Ответ: 3,5.

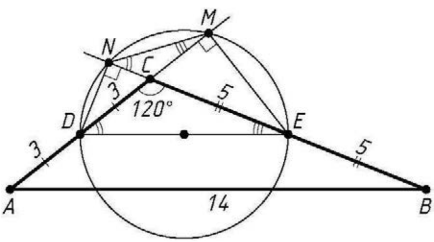
Решение. а) Биссектриса вписанного угла проходит через середину дуги, на которую этот угол опирается. Значит, биссектрисы вписанных углов MEN и NDM проходят через середину дуги MN, не содержащей точки D.



б) По теореме косинусов находим, что

$$\cos\angle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{36 + 100 - 196}{2 \cdot 6 \cdot 10} = -\frac{1}{2}.$$

Значит, $\angle ACB = 120^\circ$.



Отрезок DE — средняя линия треугольника ABC, поэтому $DE = \frac{1}{2}AB$. Треугольники CMN и CED подобны по двум углам, причём коэффициент подобия равен $\frac{CM}{CE} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ (см. [2], с. 154—155). Следовательно, $MN = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{4}AB = 3{,}5$.

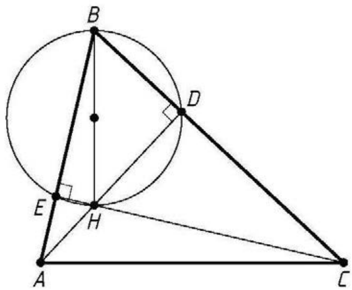
15.24.1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE, H — точка пересечения высот.

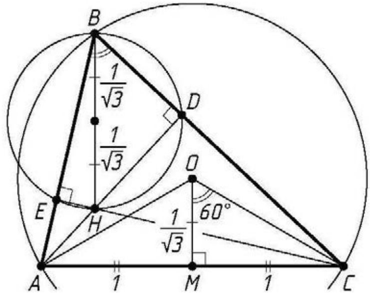
а) Докажите, что точки B, D, H и E лежат на одной окружности.

б) Известно, что радиус этой окружности равен $\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $AC = 2$. Найдите угол между высотой CE и стороной BC.

Ответ: 30°.

Решение. а) Из точек D и E отрезок BH виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром BH.





б) Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, M — середина стороны AC. Расстояние от точки O до стороны AC вдвое меньше расстояния от точки H пересечения высот до вершины B (см. [2], с. 155), а так как $BH = \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $OM = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Из прямоугольного треугольника OMC находим, что $\operatorname{tg}\angle MOC = \frac{MC}{OM} = \sqrt{3}$, значит, $\angle MOC = 60°$.

По теореме о вписанном угле

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle MOC = 60°.$$

Следовательно,

$$\angle BCE = 90° - \angle CBE = 90° - \angle ABC = 90° - 60° = 30°.$$

15.25.1. Высота AA_1 остроугольного треугольника ABC продолжена до пересечения с описанной окружностью в точке P, H — точка пересечения высот, O — центр описанной окружности.

а) Докажите, что A_1 — середина отрезка HP.

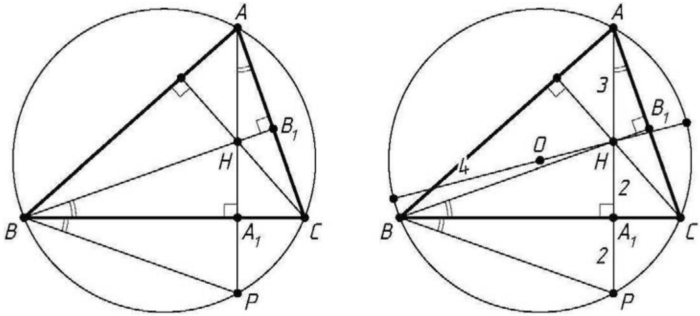
б) Найдите OH, если $AH = 3$, $A_1H = 2$, а радиус описанной окружности равен 4.

Ответ: 2.

Решение. а) Пусть BB_1 — также высота треугольника ABC. Тогда $\angle CBB_1 = \angle CAA_1$. Вписанные углы CAP и CBP опираются на одну и ту же дугу, поэтому

$$\angle A_1BH = \angle CBB_1 = \angle CAA_1 = \angle CAP = \angle A_1BP.$$

Значит, высота BA_1 треугольника PBH является его биссектрисой, поэтому треугольник PHB равнобедренный с основанием HP. Следовательно, BA_1 — медиана этого треугольника, а A_1 — середина основания HP.



б) По доказанному $HP = 2HA_1 = 4$. Пусть $R = 4$ — радиус окружности. По теореме о произведении отрезков пересекающихся хорд

$$AH \cdot HP = (R - OH)(R + OH), \quad 3 \cdot 4 = R^2 - OH^2, \quad 12 = 16 - OH^2,$$

откуда $OH^2 = 4$. Следовательно, $OH = 2$.

15.26.1. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC с углом 45° при вершине C.

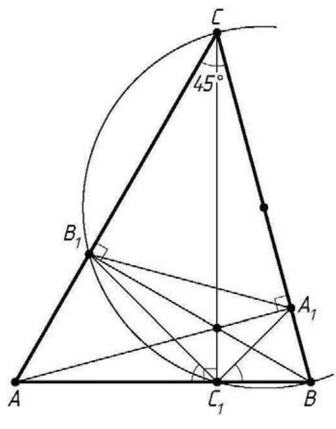
а) Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ прямоугольный.

б) Найдите отношение, в котором высота AA_1 делит отрезок B_1C_1, если известно, что $BC = 2B_1C_1$.

Ответ: $2:1$, считая от точки B_1.

Решение. а) Из точек B_1 и C_1 отрезок BC виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром BC. Поэтому

$$\angle AC_1B_1 = 180^\circ - \angle BC_1B_1 = \angle BCB_1 = 45^\circ.$$



Аналогично $\angle BC_1A_1 = 45^\circ$. Следовательно,

$$\angle B_1C_1A_1 = 180^\circ - \angle AC_1B_1 - \angle BC_1A_1 = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ.$$

б) Поскольку $\angle AC_1B_1 = \angle ACB$, треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC по двум углам, причём коэффициент подобия k равен $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{1}{2}$. Значит,

$$\cos\angle BAC = \cos\angle BAB_1 = \frac{AB_1}{AB} = k = \frac{1}{2}.$$

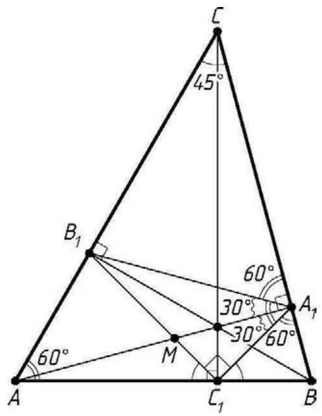
Следовательно, $\angle BAC = 60^\circ$. Тогда $\angle CA_1B_1 = 60^\circ$ и $\angle BA_1C_1 = 60^\circ$. Значит,

$$\angle B_1A_1C_1 = 180^\circ - 2\cdot 60^\circ = 60^\circ, \quad \angle AA_1B_1 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

поэтому A_1A — биссектриса угла $B_1A_1C_1$.

Пусть M — точка пересечения высоты AA_1 с отрезком B_1C_1. Тогда A_1M — биссектриса прямоугольного треугольника $A_1B_1C_1$, а так как острый угол $A_1B_1C_1$ этого треугольника равен 30°, то $A_1B_1 = 2A_1C_1$. Следовательно, по свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{B_1M}{MC_1} = \frac{A_1B_1}{A_1C_1} = 2.$$



15.27.1. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC, O — центр его описанной окружности.

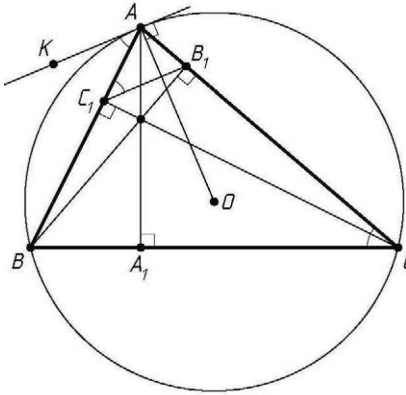
а) Докажите, что $OA \perp B_1C_1$.

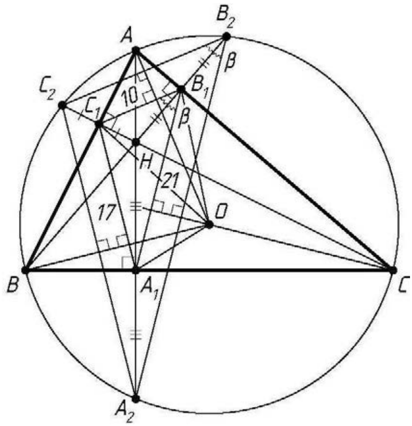
б) Найдите площадь треугольника ABC, если $A_1B_1 = 21$, $A_1C_1 = 17$, $B_1C_1 = 10$.

Ответ: 510.

Решение. а) Пусть KA — касательная к описанной окружности треугольника ABC, причём точки K и C лежат по разные стороны от прямой AB. Поскольку BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC, то

$\angle AC_1B_1 = \angle ACB$. Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что $\angle KAB = \angle ACB$, значит, $\angle AC_1B_1 = \angle KAB$. Поэтому $B_1C_1 \parallel AK$, а так как $OA \perp AK$, то $OA \perp B_1C_1$.





б) Аналогично $OB \perp A_1C_1$ и $OC \perp A_1B_1$. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC. Продолжим высоты AA_1, BB_1 и CC_1 до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC в точках A_2, B_2 и C_2. Тогда A_1, B_1, C_1 — середины отрезков HA_2, HB_2 и HC_2 (см. [2], с. 156), значит, B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1 — средние линии треугольников B_2HC_2, A_2HC_2 и A_2HB_2. Поэтому треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ с коэффициентом 2.

Обозначим $\angle A_2B_2C_2 = \angle A_1B_1C_1 = \beta$. По теореме косинусов находим, что

$$\cos\beta = \frac{10^2 + 21^2 - 17^2}{2\cdot 10\cdot 21} = \frac{3}{5}.$$

Тогда $\sin\beta = \frac{4}{5}$.

Пусть R — радиус описанной окружности треугольника ABC. По теореме синусов

$$R = \frac{A_2C_2}{2\sin\beta} = \frac{34}{2\cdot\frac{4}{5}} = \frac{85}{4}.$$

Площадь треугольника ABC равна сумме площадей четырёхугольников AB_1OC_1, BA_1OC_1 и CB_1OA_1, диагонали каждого из которых перпендикулярны. Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}OA\cdot B_1C_1 + \frac{1}{2}OB\cdot A_1C_1 + \frac{1}{2}OC\cdot A_1B_1 =$$
$$= \frac{1}{2}R\cdot 10 + \frac{1}{2}R\cdot 17 + \frac{1}{2}R\cdot 21 = \frac{1}{2}R(10+17+21) = \frac{1}{2}\cdot\frac{85}{4}\cdot 48 = 510.$$

15.28.1. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.

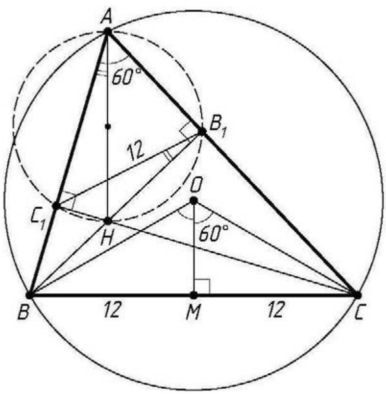
а) Докажите, что $\angle BB_1C_1 = \angle BAH$.

б) Найдите расстояние от центра описанной окружности треугольника ABC до стороны BC, если $B_1C_1 = 12$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Решение. а) Из точек B_1 и C_1 отрезок AH виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром AH. Вписанные в эту окружность углы HAC_1 и HB_1C_1 опираются на одну и ту же дугу, следовательно,

$$\angle BB_1C_1 = \angle HB_1C_1 = \angle HAC_1 = \angle BAH.$$



б) Треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\cos\angle BAC = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ (см. п. 17а приложения 2). Следовательно, $BC = 2B_1C_1 = 24$.

Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, M — середина стороны BC. Тогда расстояние от точки O до стороны BC равно длине отрезка OM, а так как вписанный угол BAC вдвое меньше центрального угла BOC, то

$$\angle MOC = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BAC = 60^\circ.$$

Из прямоугольного треугольника COM находим, что

$$OM = CM \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}BC \operatorname{ctg} 60^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}.$$

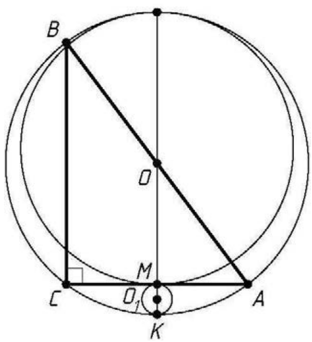
Диагностические работы

Диагностическая работа 1

1. Около треугольника со сторонами 6, 8 и 10 описана окружность S. Найдите радиус окружности, касающейся меньшей стороны треугольника в её середине и окружности S.

Ответ: $\frac{1}{2}$ или $\frac{9}{2}$.

Решение. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC со сторонами $AC=6$, $BC=8$ и $AB=10$. Треугольник ABC прямоугольный ($AC^2+BC^2=36+64=100=AB^2$), поэтому O — середина его гипотенузы AB, а радиус окружности равен 5.



Пусть O_1 — центр окружности радиуса r, касающейся катета AC в его середине M и касающейся в точке K внутренним образом описанной окружности треугольника ABC, причём точки O и O_1 расположены по разные стороны от прямой BC. Линия центров касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому $OK=OM+MK=OM+2O_1K$, а так как OM — средняя линия треугольника ABC, $OM=\frac{1}{2}BC=4$, $OK=5$ — радиус описанной окружности треугольника ABC и MK — диаметр искомой окружности, то $5=4+2r$. Следовательно, $r=\frac{1}{2}$.

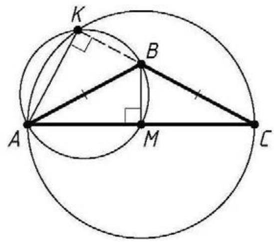
Если же точки O и O_1 расположены по одну сторону от прямой BC, то аналогично находим, что $r=\frac{9}{2}$.

2. Дан треугольник со сторонами $AB=BC=17$, $AC=30$. Найдите общую хорду окружностей с диаметрами AB и AC.

Ответ: $\frac{240}{17}$.

Решение. Пусть окружность с диаметром AB вторично пересекает прямую AC в точке M. Тогда BM — высота, а значит, медиана треугольника ABC. По теореме Пифагора $BM=\sqrt{17^2-15^2}=8<15$, поэтому в прямоугольном треугольнике ABM угол при вершине B больше 45°. Следовательно, $\angle ABC>90^\circ$.

Пусть окружность с диаметром AC вторично пересекает прямую BC в точке K. Тогда AK — высота тупоугольного треугольника ABC, поэтому точка K лежит на продолжении боковой стороны BC за точку B.



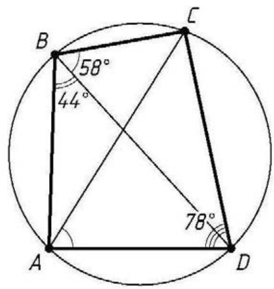
Из точки K отрезок AB виден под прямым углом, значит, эта точка лежит на окружности с диаметром AB. Таким образом, K — вторая точка пересечения окружностей, о которых говорится в условии задачи, а AK — общая хорда этих окружностей.

Из равенства $BC\cdot AK = AC\cdot BM$ находим, что

$$AK = \frac{AC\cdot BM}{BC} = \frac{30\cdot 8}{17} = \frac{240}{17}.$$

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle CBD = 58^\circ$, $\angle ABD = 44^\circ$, $\angle ADC = 78^\circ$. Найдите угол CAD.

Ответ: 58°.



Решение. Луч BD проходит между сторонами угла ABC, поэтому

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 44^\circ + 58^\circ = 102^\circ,$$

значит,

$$\angle ABC + \angle ADC = 102^\circ + 78^\circ = 180^\circ.$$

Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ вписанный. Поэтому

$$\angle CAD = \angle DBC = 58^\circ.$$

4. Окружность касается сторон AB и AD прямоугольника $ABCD$ и пересекает сторону DC в единственной точке F, а сторону BC — в единственной точке E. Найдите площадь трапеции $AFCB$, если $AB = 32$, $AD = 40$ и $BE = 1$.

Ответ: 1180.

Решение. Пусть окружность радиуса R с центром O касается сторон AB и AD прямоугольника $ABCD$ в точках M и N соответственно. В прямоугольной трапеции $OMBE$ известно, что

$$OM = OE = R, \quad BM = AB - AM = AB - ON = 32 - R, \quad BE = 1.$$

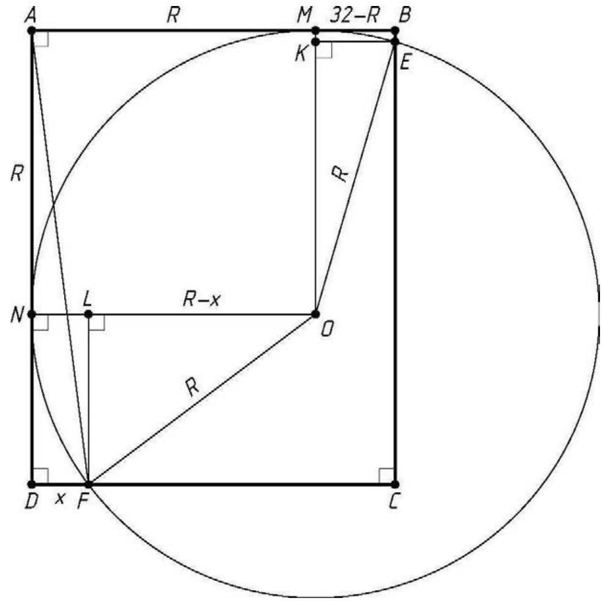
Из точки E опустим перпендикуляр EK на OM. Тогда

$$OK = OM - MK = OM - BE = R - 1, \quad KE = BM = 32 - R.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник OKE. По теореме Пифагора $OE^2 = OK^2 + KE^2$, или

$$R^2 = (R-1)^2 + (32-R)^2, \quad R^2 - 66R + 1025 = 0.$$

Условию задачи удовлетворяет $R = 25$.



В прямоугольной трапеции $DFON$ известно, что

$$OF = ON = R = 25, \quad DN = AD - AN = 40 - R = 15.$$

Обозначим $DF = x$. Из точки F опустим перпендикуляр FL на ON. Тогда

$$OL = ON - LN = ON - DF = R - x = 25 - x, \quad FL = DN = 15.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник OLF. По теореме Пифагора $OF^2 = OL^2 + FL^2$, или

$$25^2 = (25 - x)^2 + 15^2, \quad x^2 - 50x + 225 = 0.$$

Условию задачи удовлетворяет $x = 5$. Тогда $CF = CD - x = 32 - 5 = 27$.

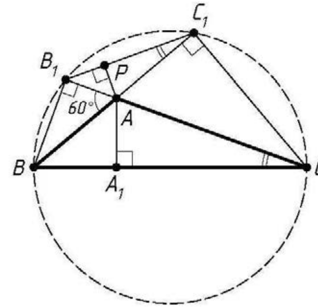
Следовательно,

$$S_{AFCB} = \frac{CF + AB}{2} \cdot BC = \frac{27 + 32}{2} \cdot 40 = 1180.$$

5. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Известно, что $\angle BAC = 120^\circ$ и $AA_1 = 6$. Найдите высоту AP треугольника AB_1C_1.

Ответ: 3.

Решение. Из точек B_1 и C_1 отрезок BC виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром BC. Вписанные



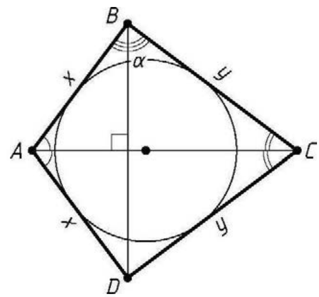
в эту окружность углы BC_1B_1 и BCB_1 опираются на одну и ту же дугу, поэтому они равны.

Треугольник B_1AC_1 подобен треугольнику BAC по двум углам, причём коэффициент подобия равен

$$\frac{AB_1}{AB} = \cos\angle BAB_1 = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

При этом подобии высота AP треугольника B_1AC_1 соответствует высоте AA_1 треугольника BAC, следовательно, $AP = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3$.

6. Центр окружности, вписанной в четырёхугольник, лежит на его диагонали, равной 5. Известно, что периметр четырёхугольника равен 14, а площадь равна 12. Найдите вторую диагональ и стороны четырёхугольника.



Ответ: $\frac{24}{5}$, 3, 4, 3, 4.

Решение. Пусть $AC = 5$ — диагональ данного четырёхугольника $ABCD$. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому треугольники ABC и ADC равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Обозначим $AB = AD = x$, $BC = CD = y$, $\angle ABC = \alpha$. Тогда

$$x + y = 7, \quad \frac{1}{2}xy\sin\alpha = 6, \quad xy = \frac{12}{\sin\alpha}, \quad x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha = 25,$$

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha = (x+y)^2 - 2xy - 2xy\cos\alpha = 49 - 2xy(1+\cos\alpha) = 25,$$

$$xy = \frac{12}{1+\cos\alpha}.$$

Из равенства $\frac{12}{1+\cos\alpha} = \frac{12}{\sin\alpha}$ следует, что $1+\cos\alpha = \sin\alpha$. После возведения обеих частей этого уравнения в квадрат и очевидных упрощений получим уравнение $\cos\alpha(1+\cos\alpha) = 0$, а так как $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, то $\alpha = 90^\circ$.

Таким образом,

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12. \end{cases}$$

Из этой системы находим, что $x = 3$, $y = 4$ или $x = 4$, $y = 3$.

Точки A и C равноудалены от концов отрезка BD, значит, AC — серединный перпендикуляр к отрезку BD. Из равенства $\frac{1}{2}AC \cdot BD = 12$ (площадь четырёхугольника $ABCD$) находим, что

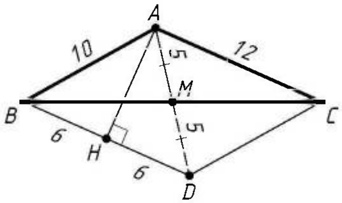
$$BD = \frac{2 \cdot 12}{AC} = \frac{2 \cdot 12}{5} = \frac{24}{5}.$$

Диагностическая работа 2

1. Две стороны треугольника равны 10 и 12, а медиана, проведённая к третьей, равна 5. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 48.

Решение. Пусть AM — медиана треугольника ABC, причём $AM = 5$, $AB = 10$, $AC = 12$. На продолжении медианы AM за точку M отложим отрезок MD, равный AM. Тогда $ABDC$ — параллелограмм с диагоналями BC и AD, а площадь треугольника ABC равна площади равнобедренного треугольника ABD, в котором $AB = AD = 10$, $BD = 12$. Высоту AH треугольника ABD находим по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABH:



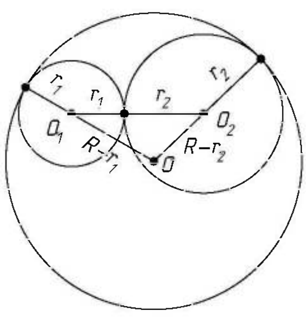
$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{100 - 36} = 8.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48.$$

2. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом. Кроме того, обе эти окружности касаются внутренним образом окружности радиуса R с центром O. Найдите периметр треугольника OO_1O_2.

Ответ: $2R$.



Решение. Пусть r_1 и r_2 — радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 соответственно. Линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку касания, поэтому

$$OO_1 = R - r_1, \quad OO_2 = R - r_2, \quad O_1O_2 = r_1 + r_2.$$

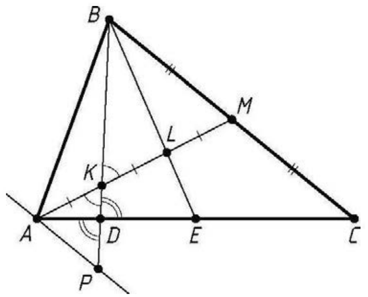
Следовательно,

$$OO_1 + OO_2 + O_1O_2 = R - r_1 + R - r_2 + r_1 + r_2 = 2R.$$

3. Точки D и E расположены на стороне AC треугольника ABC. Прямые BD и BE разбивают медиану AM треугольника ABC на три равных отрезка. Найдите площадь треугольника BDE, если площадь треугольника ABC равна 1.

Ответ: 0,3.

Решение. Пусть прямые BD и BE пересекают медиану AM в точках K и L соответственно, причём точка K лежит между A и L, $AK = KL = LM$. Точка L лежит на медиане треугольника и делит её в отношении $AL : LM = 2 : 1$, значит, L — точка пересечения медиан треугольника, поэтому BE — также медиана. Следовательно, E — середина стороны AC.



Через вершину A проведём прямую, параллельную стороне BC. Пусть эта прямая пересекается с продолжением отрезка BD в точке P. Треугольник AKP подобен треугольнику MKB с коэффициентом $\frac{AK}{KM} = \frac{1}{2}$, поэтому $AP = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{4}BC$. Треугольник ADP подобен треугольнику CDB, значит,

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AP}{BC} = \frac{\frac{1}{4}BC}{BC} = \frac{1}{4},$$

поэтому

$$AD = \frac{1}{5}AC, \quad DE = AE - AD = \frac{1}{2}AC - \frac{1}{5}AC = \frac{3}{10}AC.$$

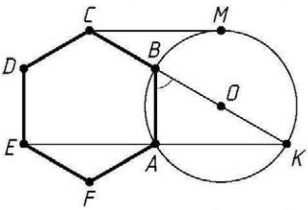
Следовательно,

$$S_{\Delta BDE} = \frac{DE}{AC} \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{3}{10} \cdot 1 = \frac{3}{10}.$$

4. Сторона AB правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна $\sqrt{3}$ и является хордой некоторой окружности, причём остальные стороны шестиугольника лежат вне этой окружности. Прямая, проходящая через вершину C, касается окружности в точке M. Известно, что $CM = 3$. Найдите диаметр окружности.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Решение. Пусть M — точка касания, K — вторая точка пересечения прямой BC с данной окружностью. Тогда $CK \cdot CB = CM^2$. Отсюда находим, что $CK = 3\sqrt{3}$, $BK = CK - BK = 2\sqrt{3}$. В треугольнике ABK имеем



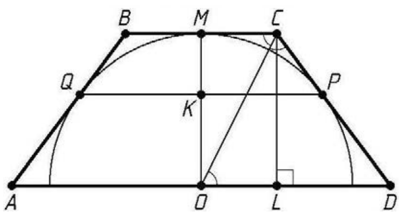
$$AB = \sqrt{3}, \quad BK = 2\sqrt{3} = 2AB,$$
$$\angle ABK = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Значит, треугольник ABK прямоугольный, BK — его гипотенуза. Следовательно, $BK = 2\sqrt{3}$ — искомый диаметр.

5. Центр окружности радиуса 6, касающейся сторон AB, BC и CD равнобедренной трапеции $ABCD$, лежит на её большем основании AD. Основание BC равно 4. Найдите расстояние между точками, в которых окружность касается боковых сторон AB и CD этой трапеции.

Ответ: $\frac{36}{5}$.

Решение. Пусть O — центр окружности; Q, M и P — точки её касания со сторонами соответственно AB, BC и CD трапеции $ABCD$; L — проекция вершины C на основание AD; K — точка пересечения отрезков PQ и MO. Заметим, что $PQ \parallel AD$ $(BQ = BM = CM = CP)$.



Поскольку CO — биссектриса угла BCD, то $\angle COD = \angle OCB = \angle OCD$, поэтому треугольник OCD равнобедренный, $CD = OD$.

Обозначим $CD = OD = x$. Тогда $LD = OD - OL = OD - MC = x - 2$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника CLD находим, что

$$CD^2 = CL^2 + LD^2, \quad \text{или} \quad x^2 = 36 + (x-2)^2.$$

Отсюда следует, что $x = 10$.

Из подобия треугольников OKP и DLC находим, что $\frac{KP}{CL} = \frac{OP}{CD}$. Поэтому

$$KP = \frac{OP \cdot CL}{CD} = 6 \cdot \frac{6}{10} = \frac{18}{5}.$$

Следовательно, $PQ = 2KP = \frac{36}{5}$.

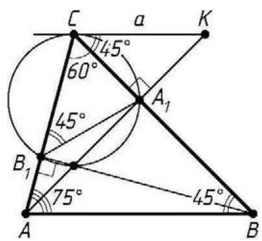
6. Углы при вершинах A и B треугольника ABC равны 75° и 45° соответственно, AA_1 и BB_1 — высоты треугольника. Касательная в точке C к окружности, описанной около треугольника A_1B_1C, пересекается с прямой AA_1 в точке K. Известно, что $CK=a$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Ответ: a.

Решение. Треугольник A_1B_1C подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\cos\angle ACB=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, значит, радиус R описанной окружности треугольника ABC вдвое больше радиуса r описанной окружности треугольника A_1B_1C.

Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что

$$\angle KCA_1=\angle CB_1A_1=\angle ABC=45^\circ.$$



Из прямоугольного треугольника KA_1C находим, что $CA_1=CK\cos 45^\circ=\frac{a}{\sqrt{2}}$. По теореме синусов

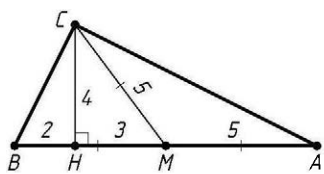
$$r=\frac{CA_1}{2\sin\angle CB_1A_1}=\frac{CA_1}{2\sin 45^\circ}=\frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{2}}}=\frac{a}{2}.$$

Следовательно, $R=2r=a$.

Диагностическая работа 3

1. Медиана и высота прямоугольного треугольника, проведённые из вершины прямого угла, равны 5 и 4. Найдите катеты.

Ответ: $2\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$.



Решение. Пусть $CM=5$ и $CH=4$ — медиана и высота прямоугольного треугольника ABC, проведённые из вершины прямого угла. По теореме Пифагора

$$MH=\sqrt{CM^2-CH^2}=\sqrt{25-16}=3.$$

Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, поэтому $BM=CM=AM=5$.

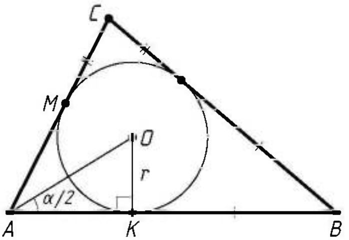
Предположим, что $AC>BC$. Тогда точка H лежит между точками B и M, поэтому

$$BH=BM-MH=5-3=2,\quad AH=AM+MH=5+3=8.$$

Следовательно,

$$BC = \sqrt{BH \cdot AB} = \sqrt{2 \cdot 10} = 2\sqrt{5}, \quad AC = \sqrt{AH \cdot AB} = \sqrt{8 \cdot 10} = 4\sqrt{5}.$$

2. Найдите периметр треугольника, один из углов которого равен α, а радиусы вписанной и описанной окружностей равны r и R соответственно.



Ответ: $2(r \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + 2R\sin\alpha)$.

Решение. Пусть угол при вершине A треугольника ABC равен α, O — центр вписанной окружности, K — точка касания вписанной окружности со стороной AB, M — со стороной AC. Тогда

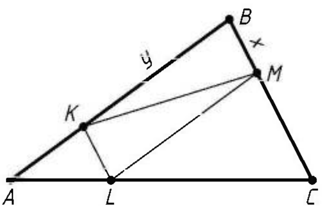
$$BC = 2R\sin\alpha, \quad AK = OK\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Поскольку $AM = AK$ и $BK + CM = BC$, то

$$AB + AC + BC = 2AK + 2BC = 2r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + 4R\sin\alpha.$$

3. В треугольник ABC со сторонами $AB = 18$ и $BC = 12$ вписан параллелограмм $BKLM$, причём точки K, L и M лежат на сторонах AB, AC и BC соответственно. Известно, что площадь параллелограмма составляет $\frac{4}{9}$ площади треугольника ABC. Найдите стороны параллелограмма.

Ответ: 8, 6 или 4, 12.



Решение. Обозначим $BM = KL = x$, $BK = LM = y$, $S_{\triangle ABC} = S$. Тогда

$$S_{BKLM} = \frac{4}{9}S, \quad S_{\triangle BKM} = \frac{1}{2}S_{BKLM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}S = \frac{2}{9}S,$$

а так как

$$\frac{2}{9}S = S_{\triangle BKM} = \frac{BM}{BC}\cdot\frac{BK}{AB}\cdot S_{\triangle ABC} = \frac{x}{12}\cdot\frac{y}{18}\cdot S,$$

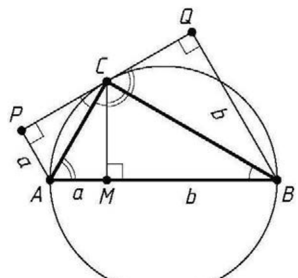
то $xy = 48$.

Треугольник AKL подобен треугольнику ABC, поэтому $\frac{KL}{BC} = \frac{AK}{AB}$, или $\frac{x}{12} = \frac{18-y}{18}$, откуда $3x + 2y = 36$. Из системы $\begin{cases} xy = 48, \\ 3x + 2y = 36 \end{cases}$ находим, что $x = 8$, $y = 6$ или $x = 4$, $y = 12$.

4. Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность. Расстояния от концов A и B гипотенузы AB до прямой, касающейся окружности в точке C, равны a и b соответственно. Найдите катеты AC и BC.

Ответ: $\sqrt{a(a+b)}$, $\sqrt{b(a+b)}$.

Решение. Пусть P и Q — проекции точек A и B на указанную касательную, CM — высота треугольника ABC.



Треугольник AMC равен треугольнику APC, так как

$$\angle PCA = \angle ABC = 90^\circ - \angle CAB = \angle ACM$$

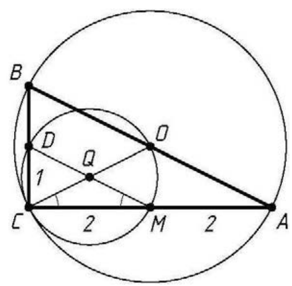
(по теореме об угле между касательной и хордой). Следовательно, $AM = AP = a$. Аналогично $BM = BQ = b$, поэтому

$$AC^2 = AM \cdot AB = a(a+b),$$

$$BC^2 = BM \cdot AB = b(a+b).$$

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине C сторона CA равна 4. На катете BC взята точка D, причём $CD = 1$. Окружность радиуса $\frac{\sqrt{5}}{2}$ проходит через точки C и D и касается в точке C окружности, описанной около треугольника ABC. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: 4.



Решение. Поскольку точка D лежит внутри окружности, описанной около треугольника ABC, то данные окружности касаются внутренним образом. Если M — отличная от C точка пересечения первой окружности с катетом AC, то MD — диаметр этой окружности,

$$MC = \sqrt{MD^2 - CD^2} = \sqrt{5-1} = 2.$$

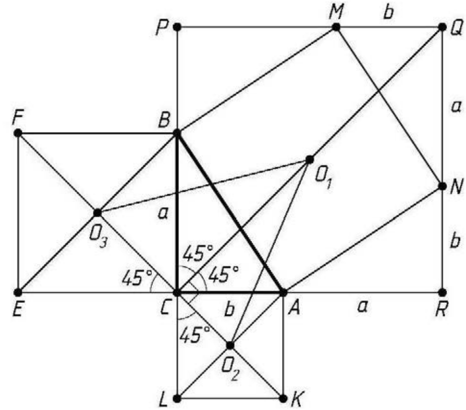
Пусть Q и O — середины диаметров MD и AB данных окружностей. Тогда точки O, Q и C лежат на одной прямой, треугольники MQC и AOC равнобедренные, $\angle CMD = \angle ACO = \angle BAC$, поэтому треугольники MCD и ACB подобны с коэффициентом $\frac{MC}{CA} = \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$BC = 2CD = 2, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = 4.$$

6. На сторонах прямоугольного треугольника с катетами a и b построены квадраты, лежащие вне треугольника. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах квадратов.

Ответ: $\frac{(a+b)^2}{4}$.

Решение. Пусть ABC — данный прямоугольный треугольник с катетами $BC = a$, $AC = b$ и гипотенузой AB, O_1, O_2 и O_3 — центры квадратов $ABMN$, $AKLC$ и $BCEF$, построенных внешним образом на гипотенузе и катетах AC и BC соответственно.



Заметим, что CO_2 и CO_3 — биссектрисы вертикальных углов, поэтому точки O_2, C и O_3 лежат на одной прямой и

$$O_2O_3 = CO_3 + CO_2 = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Пусть P — проекция точки M на прямую BC, R — проекция точки N на прямую AC, а Q — точка пересечения прямых MP и NR. Тогда $CPQR$ — квадрат со стороной $a+b$, его центр совпадает с центром O_1 квадрата $ABMN$ (см. [2], с. 26, пример 3), CO_1 — половина диагонали квадрата $CPQR$, $CO_1 = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$, а так как CO_1 — биссектриса прямого угла ACP, то

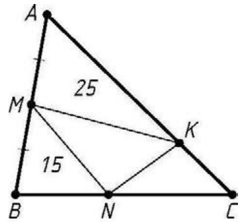
$$\angle O_1CO_2 = \angle O_1CA + \angle O_2CA = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ,$$

т. е. O_1C — высота треугольника $O_1O_2O_3$. Следовательно,

$$S_{\Delta O_1O_2O_3} = \frac{1}{2}O_2O_3 \cdot O_1C = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a+b}{\sqrt{2}} = \frac{(a+b)^2}{4}.$$

Диагностическая работа 4

1. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC, площадь которого равна 75, расположены точки M, N и K соответственно. Известно, что M — середина AB, площадь треугольника BMN равна 15, а площадь треугольника AMK равна 25. Найдите площадь треугольника CNK.



Ответ: 15.

Решение. Обозначим $S_{\Delta ABC} = S$. Тогда

$$\frac{S_{\Delta AMK}}{S} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AK}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AK}{AC},$$

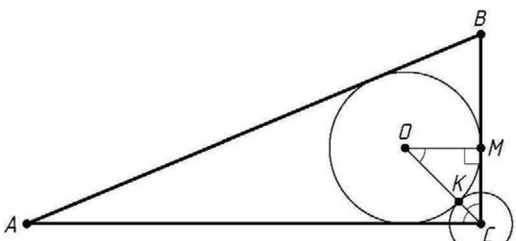
а так как по условию задачи $\frac{S_{\Delta AMK}}{S} = \frac{25}{75} = \frac{1}{3}$, то $\frac{1}{2} \cdot \frac{AK}{AC} = \frac{1}{3}$, откуда находим, что $\frac{AK}{AC} = \frac{2}{3}$, а $\frac{CK}{AC} = \frac{1}{3}$. Аналогично находим, что $\frac{CN}{BC} = \frac{3}{5}$. Следовательно,

$$S_{\Delta CNK} = \frac{CK}{AC} \cdot \frac{CN}{BC} \cdot S = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot 75 = 15.$$

2. Окружность S с центром в вершине прямого угла прямоугольного треугольника касается окружности, вписанной в этот треугольник. Найдите радиус окружности S, если известно, что катеты треугольника равны 5 и 12.

Ответ: $2(\sqrt{2} \pm 1)$.

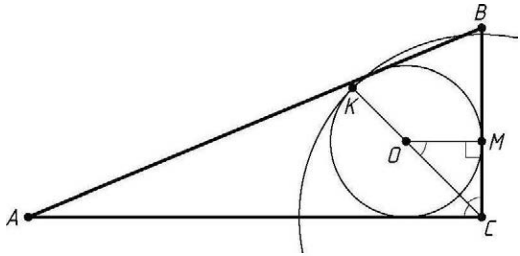
Решение. Пусть окружность S с центром в вершине C прямого угла прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = 12$, $BC = 5$ и гипотенузой $AB = 13$ в точке K касается внешним образом вписанной окружности этого треугольника.



Пусть O — центр вписанной окружности данного треугольника, M — точка касания вписанной окружности треугольника с катетом BC. Тогда

$$OM = \frac{1}{2}(AC + BC - AB) = \frac{1}{2}(12 + 5 - 13) = 2.$$

Линия центров касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому $OC = CK + OK$, $\angle OCM = 45^\circ$, так как CO — биссектриса угла ACB. Из прямоугольного треугольника OCM находим, что $OC = \sqrt{2}OM = 2\sqrt{2}$, а так как $OK = OM$, то $2\sqrt{2} = 2 + CK$. Следовательно, $CK = 2\sqrt{2} - 2$, т. е. радиус окружности S равен $2\sqrt{2} - 2$.



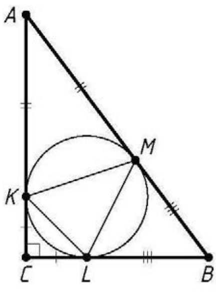
Если окружность S касается вписанной окружности данного треугольника внутренним образом, то аналогично найдём, что радиус окружности S равен $2\sqrt{2}+2$.

3. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами треугольника.

Ответ: $\frac{6}{5}$.

Решение. Пусть окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается катетов $AC=4$ и $BC=3$ в точках K и L соответственно, а гипотенузы AB — в точке M; $S_{\Delta ABC}=6$. Тогда

$$AB=5, \quad CK=CL=\frac{1}{2}(AC+BC-AB)=\frac{1}{2}(4+3-5)=1,$$



$AM=AK=AC-CK=4-1=3$ и $BM=BL=BC-CL=$ $=3-1=2$, поэтому

$$S_{\Delta KCL}=\frac{CL}{CB}\cdot\frac{CK}{CA}\cdot S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot 6=\frac{1}{2},$$

$$S_{\Delta MBL}=\frac{BM}{BA}\cdot\frac{BL}{BC}\cdot S_{\Delta ABC}=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 6=\frac{8}{5},$$

$$S_{\Delta AMK}=\frac{AM}{AB}\cdot\frac{AK}{AC}\cdot S_{\Delta ABC}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot 6=\frac{27}{10}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta KLM}=S_{\Delta ABC}-S_{\Delta KCL}-S_{\Delta MBL}-S_{\Delta AMK}=6-\frac{1}{2}-\frac{8}{5}-\frac{27}{10}=\frac{6}{5}.$$

4. Через середину боковой стороны равнобедренного треугольника со сторонами 12, 18, 18 проведена прямая, разбивающая треугольник на части, площади которых относятся как $1:2$. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого внутри треугольника.

Ответ: $\sqrt{97}$ или $\sqrt{57}$.

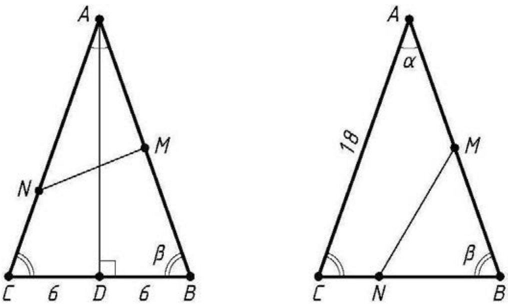
Решение. Пусть $AB=AC=18$ — боковые стороны равнобедренного треугольника ABC с основанием $BC=12$, M — середина AB. Обозначим $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. По теореме косинусов

$$\cos\alpha = \frac{18^2 + 18^2 - 12^2}{2 \cdot 18 \cdot 18} = \frac{7}{9}.$$

Если D — середина основания BC, то

$$\cos\beta = \frac{BD}{AB} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

Либо прямая, о которой говорится в условии задачи, отсекает от данного треугольника либо треугольник MAN, площадь которого равна третьей части площади треугольника ABC, при этом точка N лежит на боковой стороне AC (см. рисунок слева); либо прямая отсекает треугольник MBN, при этом точка N лежит на основании BC (см. рисунок справа).



В первом из этих случаев

$$\frac{S_{\Delta MAN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} = \frac{1}{3},$$

значит,

$$\frac{AN}{AC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB}{AM} = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3},$$

поэтому $AN = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3} \cdot 18 = 12$. По теореме косинусов

$$MN = \sqrt{AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN\cos\alpha} = \sqrt{9^2 + 12^2 - 2 \cdot 9 \cdot 12 \cdot \frac{7}{9}} = \sqrt{57}.$$

Во втором случае

$$\frac{S_{\Delta MBN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC} = \frac{1}{3},$$

значит,

$$\frac{BN}{BC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{BA}{BM} = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3},$$

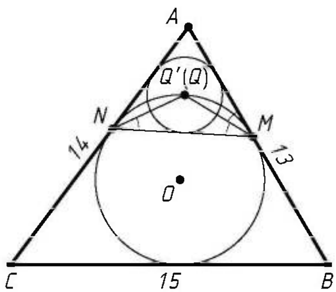
поэтому $BN=\frac{2}{3}BC=\frac{2}{3}\cdot 12=8$. По теореме косинусов

$$MN=\sqrt{BM^2+BN^2-2BM\cdot BN\cos\beta}=\sqrt{9^2+8^2-2\cdot 9\cdot 8\cdot \frac{1}{3}}=\sqrt{97}.$$

5. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB и AC в точках M и N. Окружность с центром Q вписана в треугольник AMN. Найдите OQ, если $AB=13$, $BC=15$ и $AC=14$.

Ответ: 4.

Решение. Пусть r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, p — полупериметр треугольника ABC. Тогда



$$p=\frac{AB+BC+AC}{2}=\frac{13+14+15}{2}=21.$$

По формуле Герона

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}=$$
$$=\sqrt{21\cdot 8\cdot 6\cdot 7}=84,$$

значит,

$$r=\frac{S_{\Delta ABC}}{p}=\frac{84}{21}=4.$$

Докажем, что центр Q окружности, вписанной в треугольник AMN, лежит на вписанной окружности треугольника ABC. Действительно, пусть Q' — середина меньшей дуги MN вписанной окружности треугольника ABC. Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что

$$\angle AMQ'=\angle MNQ'=\angle NMQ',$$

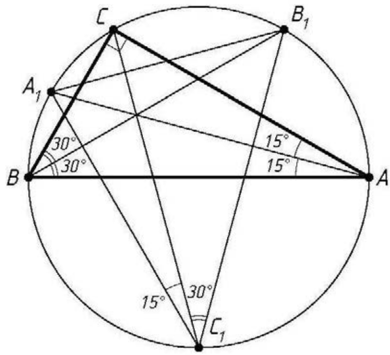
поэтому MQ' — биссектриса угла AMN. Аналогично NQ' — биссектриса угла ANM, значит, Q' — точка пересечения биссектрис треугольника AMN, т. е. центр вписанной окружности этого треугольника. Таким образом, точка Q' совпадает с точкой Q.

Следовательно, $OQ=r=4$.

6. Биссектрисы внутренних углов треугольника продолжены до пересечения с описанной около треугольника окружностью. В результате попарного соединения этих точек получился новый треугольник. Известно, что углы исходного треугольника равны 30°, 60° и 90°, а его площадь равна 2. Найдите площадь нового треугольника.

Ответ: $1+\sqrt{3}$.

Решение. Пусть биссектрисы углов при вершинах A, B и C треугольника ABC пересекают описанную около треугольника окружность



радиуса R в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно, причём $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$ и $\angle B = 60^\circ$.

Тогда

$$\angle C_1 = \angle CC_1B_1 + \angle CC_1A_1 = \angle CAA_1 + \angle CBB_1 = 15^\circ + 30^\circ = 45^\circ.$$

Аналогично находим, что

$$\angle A_1 = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ, \quad \angle B_1 = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ.$$

По условию задачи $S_{\Delta ABC} = 2$, или $2R^2 \sin A \sin B \sin C = 2$ (см. п. 22ж приложения 2), откуда находим, что

$$R^2 = \frac{2}{2\sin A \sin B \sin C} = \frac{1}{\sin 30^\circ \sin 60^\circ \sin 90^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

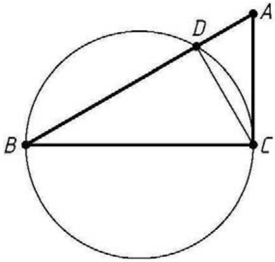
Следовательно,

$$S_{\Delta A_1B_1C_1} = 2R^2 \sin A_1 \sin B_1 \sin C_1 = 2R^2 \sin 75^\circ \sin 60^\circ \sin 45^\circ =$$
$$= \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} + 1.$$

Диагностическая работа 5

1. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу в точке D, причём $AD : BD = 1 : 3$. Высота, опущенная из вершины C прямого угла на гипотенузу, равна 3. Найдите катет BC.

Ответ: 6.



Решение. Поскольку угол BDC вписан в указанную окружность и опирается на её диаметр BC, то $\angle BDC = 90^\circ$. Поэтому CD — высота треугольника ABC.

Положим $AD = x$, $BD = 3x$. Поскольку $CD^2 = AD \cdot DB$, то $3x^2 = 9$. Отсюда находим, что $x^2 = 3$. Следовательно,

$$BC^2 = CD^2 + BD^2 = 9 + 9x^2 = 9 + 27 = 36,$$

а $BC = 6$.

2. Диагональ равнобедренной трапеции делит её тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 3, периметр равен 42. Найдите площадь трапеции.

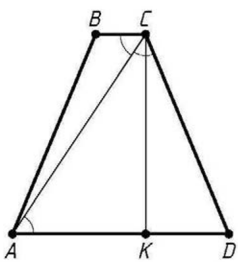
Ответ: 96.

Решение. Пусть BC и AD — основания трапеции $ABCD$, $BC = 3$, CA — биссектриса угла BCD. Поскольку

$$\angle CAD = \angle BCA = \angle DCA,$$

треугольник ACD равнобедренный, поэтому

$$AD = CD = AB = \frac{42-3}{3} = 13.$$



Из вершины C опустим перпендикуляр CK на основание AD. Тогда

$$DK = \frac{AD - BC}{2} = \frac{13-3}{2} = 5,$$

$$CK = \sqrt{CD^2 - KD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$$

Следовательно,

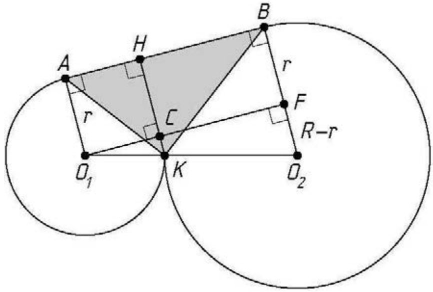
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)CK = 96.$$

3. Окружности радиусов r и R касаются внешним образом в точке K. Прямая касается этих окружностей в различных точках A и B. Найдите площадь треугольника AKB.

Ответ: $\dfrac{2Rr\sqrt{rR}}{r+R}$.

Решение. Пусть прямая AB касается окружности радиуса r с центром O_1 в точке A, окружности радиуса R с центром O_2 — в точке B, KH — высота треугольника ABK, F — проекция точки O_1 на O_2B, C — точка пересечения KH и O_1F.

Линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому точки O_1, K и O_2 лежат на одной прямой. Прямые O_1A, KH и O_2B параллельны, так как они перпендикулярны



одной и той же прямой AB. Треугольник KO_1C подобен треугольнику O_2O_1F с коэффициентом $\frac{O_1K}{O_1O_2} = \frac{r}{R+r}$, поэтому

$$CK = O_2F \cdot \frac{r}{R+r} = (R-r) \cdot \frac{r}{R+r} = \frac{r(R-r)}{R+r},$$

значит,

$$KH = CK + CH = CK + O_1A = \frac{r(R-r)}{R+r} + r = \frac{2rR}{R+r}.$$

Из прямоугольного треугольника O_1O_2F находим, что

$$O_1F = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2F^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{rR},$$

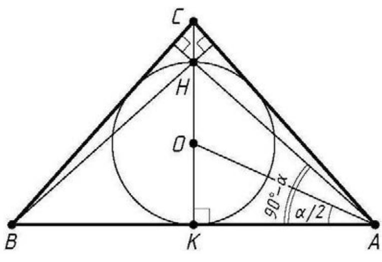
значит, $AB = O_1F = 2\sqrt{rR}$. Следовательно,

$$S_{\Delta AKB} = \frac{1}{2} AB \cdot KH = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{rR} \cdot \frac{2rR}{R+r} = \frac{2Rr\sqrt{rR}}{r+R}.$$

4. Найдите косинус угла при основании равнобедренного треугольника, если точка пересечения его высот лежит на вписанной в треугольник окружности.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Решение. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC $(AC = BC)$, H — точка пересечения высот, $\angle CAB = \angle CBA = \alpha$,



K — середина AB. Тогда

$$OK = AK \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad HK = AK \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = AK \operatorname{ctg}\alpha.$$

Поскольку $HK = 2OK$, то $2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{ctg}\alpha$.

Пусть $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t$. Тогда полученное уравнение имеет вид

$$2t = \frac{1-t^2}{2t}.$$

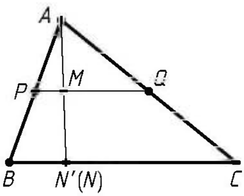
Отсюда находим, что $t^2 = \frac{1}{5}$. Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2}{3}.$$

5. Точка M делит среднюю линию треугольника ABC, параллельную стороне BC, на отрезки, один из которых в три раза длиннее другого. Точка N также делит сторону BC на отрезки, один из которых в три раза длиннее другого. В каком отношении прямая MN делит площадь треугольника ABC?

Ответ: $\frac{1}{3}$ или $\frac{9}{11}$.

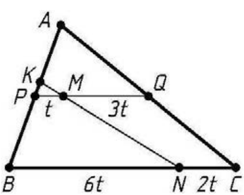
Решение. Пусть P и Q — середины сторон AB и AC соответственно, точка M лежит на средней линии PQ, причём $PM : MQ = 1 : 3$, а прямая AM пересекает сторону BC в точке N'.



Треугольник APM подобен треугольнику ABN' с коэффициентом $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{2}$, а треугольник APQ подобен треугольнику ABC с тем же коэффициентом, поэтому $\frac{PM}{BN'} = \frac{PQ}{BC}$. Значит, $\frac{BN'}{BC} = \frac{PM}{PQ} = \frac{1}{4}$ и $\frac{BN'}{N'C} = \frac{1}{3}$. Следовательно, в этом случае точка N' совпадает с точкой N, о которой говорится в условии задачи. Тогда

$$\frac{S_{\Delta ABN}}{S_{\Delta ACN}} = \frac{BN}{NC} = \frac{1}{3}.$$

Пусть теперь $\frac{CN}{NB} = \frac{1}{3}$. В этом случае прямая MN пересекает сторону AB в некоторой точке K. Обозначим $PM = t$. Тогда $PQ = 4t$, $BC = 8t$, $BN = 6t$. Треугольник KPM подобен треугольнику KBN с коэффициентом $\frac{PM}{BN} = \frac{t}{6t} = \frac{1}{6}$, значит,



$$BK = 6KP, \quad AP = BP = 5KP,$$

$$AK = AP - KP = 5KP - KP = 4KP,$$

$$\frac{BK}{AK} = \frac{6KP}{4KP} = \frac{3}{2}, \quad \frac{BK}{AB} = \frac{3}{5}.$$

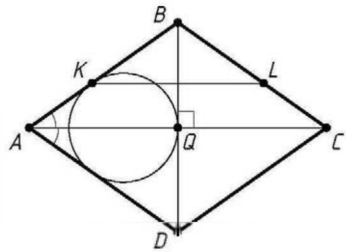
Следовательно,

$$\frac{S_{\Delta BKN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{BN}{BC} \cdot \frac{BK}{AB} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}, \quad \frac{S_{\Delta BKN}}{S_{ACNK}} = \frac{9}{11}.$$

6. Площадь ромба $ABCD$ равна 2. В треугольник ABD вписана окружность, которая касается стороны AB в точке K. Через точку K проведена прямая KL, параллельная диагонали AC ромба (точка L лежит на стороне BC). Известно, что площадь треугольника KLB равна $\frac{1}{3}$. Найдите косинус угла BAD.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Решение. Треугольник KBL подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{\sqrt{S_{\Delta KBL}}}{\sqrt{S_{\Delta ABC}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, поэтому если Q — точка пересечения диагоналей ромба, то



$$BQ = BK,$$

$$\sin\angle BAC = \sin\angle BAQ = \frac{BQ}{AB} = \frac{BK}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

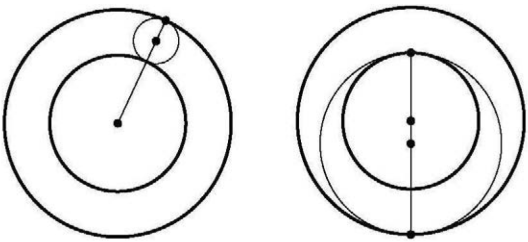
$$\cos\angle BAD = 1 - 2\sin^2\left(\frac{1}{2}\angle BAD\right) = 1 - 2\sin^2\angle BAC = 1 - 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Диагностическая работа 6

1. Найдите радиус окружности, касающейся двух концентрических (имеющих один и тот же центр) окружностей радиусов 3 и 5.

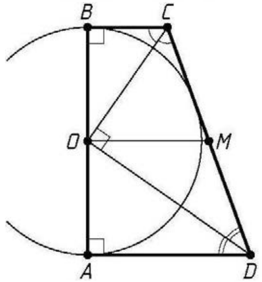
Ответ: 1 или 4.

Решение. Возможны два случая: а) искомая окружность касается меньшей из данных внешним образом, а большей — внутренним (см. рисунок слева); б) искомая окружность касается обеих данных окружностей внутренним образом (см. рисунок справа).



В первом случае радиус искомой окружности равен $\frac{5-3}{2}=1$. Во втором — $\frac{5+3}{2}=4$.

2. Окружность, построенная как на диаметре на меньшей боковой стороне прямоугольной трапеции, касается большей боковой стороны, равной a. Найдите среднюю линию трапеции.



Ответ: $\frac{a}{2}$.

Решение. Пусть центр O окружности лежит на меньшей боковой стороне AB прямоугольной трапеции $ABCD$, M — середина большей боковой стороны CD.

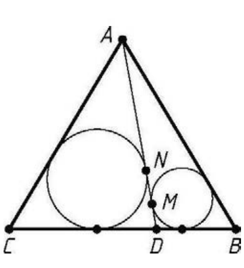
Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому CO и DO — биссектрисы углов BCD и ADC, сумма которых равна 180°, значит,

$$\angle COD = 180^\circ - (\angle OCD + \angle ODC) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BCD + \angle ADC) = \\ = 180^\circ - \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Средняя линия OM трапеции $ABCD$ — медиана прямоугольного треугольника COD, проведённая из вершины прямого угла, следовательно,

$$OM = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}a.$$

3. Точка D делит основание BC равнобедренного треугольника ABC на два отрезка, один из которых на 4 больше другого. Найдите расстояние между точками, в которых вписанные окружности треугольников ABD и ACD касаются отрезка AD.



Ответ: 2.

Решение. Пусть окружности, вписанные в треугольники ABD и ACD, касаются отрезка AC в точках M и N соответственно. Поскольку $AC = AB$, а

$$AM = \frac{AB+AD-BD}{2}, \quad AN = \frac{AC+AD-CD}{2}$$

(см. п. 9а приложения 2), то

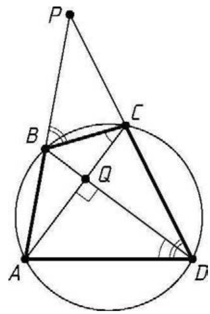
$$MN = |AM-AN| = \left|\frac{AB+AD-BD}{2} - \frac{AC+AD-CD}{2}\right| = \frac{|CD-BD|}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

4. Диагонали AC и BD вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке Q под прямым углом. Прямые AB и CD пересекаются в точке P. Известно, что $BC = 5$, $AD = 10$, $BQ = 3$. Найдите AP.

Ответ: $\dfrac{20\sqrt{5}}{3}$.

Решение. Из прямоугольного треугольника BQC находим, что

$$CQ = \sqrt{BC^2 - BQ^2} = \sqrt{25 - 9} = 4.$$



Прямоугольные треугольники AQD и BQC подобны по двум углам с коэффициентом $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{10}{5} = 2$, поэтому

$$AQ = 2BQ = 2 \cdot 3 = 6, \quad DQ = 2CQ = 2 \cdot 4 = 8.$$

По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{BQ^2 + AQ^2} = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5},$$

$$CD = \sqrt{CQ^2 + DQ^2} = \sqrt{16 + 64} = 4\sqrt{5}.$$

Треугольник BPC подобен треугольнику DPA по двум углам, так как

$$\angle PBC = 180^\circ - \angle ABC = \angle ADC = \angle ADP,$$

причём коэффициент подобия равен $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$, значит,

$$CP = \frac{1}{2}AP, \quad BP = \frac{1}{2}PD = \frac{1}{2}(PC + CD) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AP + 4\sqrt{5}\right),$$

а так как $BP = AP - AB = AP - 3\sqrt{5}$, то

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AP + 4\sqrt{5}\right) = AP - 3\sqrt{5},$$

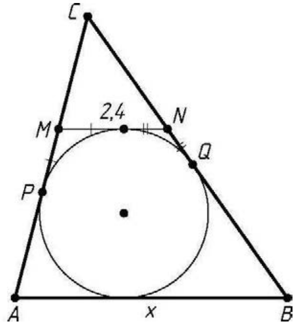
откуда находим, что $AP = \dfrac{20\sqrt{5}}{3}$.

5. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, касается его вписанной окружности. Отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 2,4. Найдите сторону AB, если известно, что периметр треугольника ABC равен 20.

Ответ: 6 или 4.

Решение. Обозначим точки пересечения касательной со сторонами AC и CB через M и N соответственно, а точки касания этих сторон с вписанной окружностью — соответственно через P и Q.

Пусть $AB = x$, p_1 и p — полупериметры подобных треугольников CMN и CAB соответственно. Тогда $CP = p_1$ и $CP = p - AB = p - x = 10 - x$ (см. п. 9б, 9в приложения 2). Отношение полупериметров подобных



треугольников равно коэффициенту подобия, поэтому $\frac{p_1}{p} = \frac{MN}{AB}$, или $\frac{10-x}{10} = \frac{2,4}{x}$. Из этого уравнения находим, что $x = 6$ или $x = 4$.

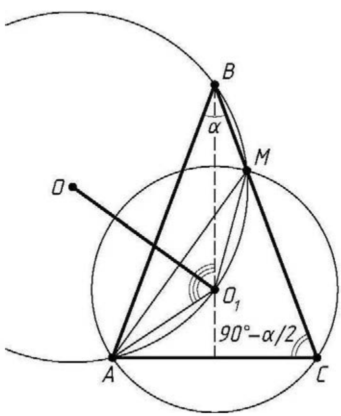
6. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Окружность радиуса R с центром в точке O проходит через точки A и B и пересекает прямую BC в точке M, отличной от B и C. Найдите расстояние от точки O до центра окружности, описанной около треугольника ACM.

Ответ: R.

Решение. Пусть $\angle ABC = \alpha$, O_1 — центр второй окружности. Тогда, так как угол BCA острый, то

$$\angle AO_1M = 2\angle ACB = 2\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 180^\circ - \alpha,$$

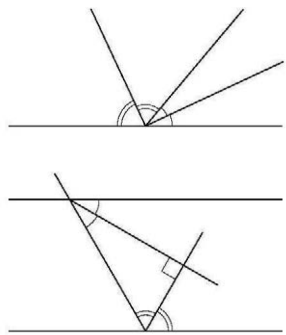
следовательно, точки A, B, M и O_1 лежат на одной окружности. Поэтому точка O_1 принадлежит окружности, описанной около треугольника ABM, т. е. $OO_1 = R$.



Приложение 2. Список полезных фактов

1. а) Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

б) Биссектрисы внутренних односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей перпендикулярны.



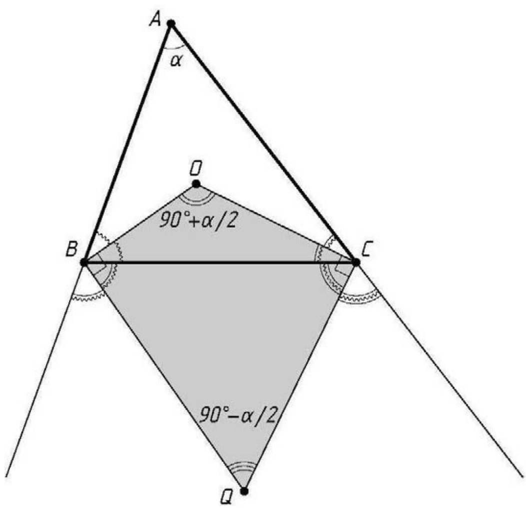
Доказательство. а) Сумма смежных углов равна 180°, значит, сумма половин этих углов равна 90°.

б) Сумма внутренних односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей равна 180°, значит, сумма половин углов равна 90°. Следовательно, биссектрисы этих углов пересекаются под прямым углом.

2. а) Если биссектрисы, проведённые из вершин B и C треугольника ABC, пересекаются в точке O, то $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$.

б) Если биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекаются в точке Q, то $\angle BQC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$.

Доказательство. а) Сумма внутренних углов при вершинах B и C треугольника ABC равна $180^\circ - \angle A$, сумма их половин равна



$\frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$. Следовательно,

$$\angle BOC = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle A\right) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A.$$

б) В четырёхугольнике $BOCQ$ углы при вершинах B и C прямые (биссектрисы смежных углов перпендикулярны), значит,

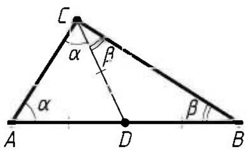
$$\angle BQC + \angle BOC = 360^\circ - (\angle OBQ + \angle OCQ) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ.$$

Следовательно,

$$\angle BQC = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{1}{2}\angle A\right) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A.$$

3. а) Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

б) Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.



Доказательство. а) Пусть CD — медиана треугольника ABC. Обозначим $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Поскольку $AD = CD$ и $CD = BD$, то $\angle ACD = \alpha$, $\angle DCB = \beta$, а так как сумма углов треугольника ABC равна 180°, то $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$. Следовательно, $\angle C = \alpha + \beta = 90^\circ$.

б) См. [2], с. 7.

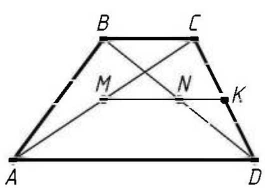
4. а) Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

б) Если сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90°, то отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.

Доказательство. а) Пусть M и N — середины диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = b$, $a > b$.

Соединим точку M с серединой K боковой стороны CD. По теореме о средней линии треугольника $MK \parallel AD \parallel BC$. Аналогично докажем, что $NK \parallel BC$.

Поскольку через точку, не лежащую на прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной, то точки M, N и K лежат на одной прямой. Эта прямая параллельна основаниям трапеции.



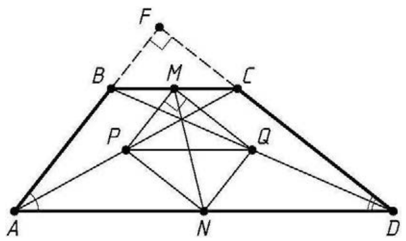
Таким образом,

$$MN = MK - KN = \frac{1}{2}AD - \frac{1}{2}BC = \frac{a-b}{2}.$$

б) Пусть M и N — середины оснований соответственно BC и AD трапеции $ABCD$, P и Q — середины диагоналей AC и BD соответственно, а прямые AB и CD пересекаются в точке F. По условию $\angle A + \angle D = 90^\circ$, поэтому

$$\angle AFD = 180^\circ - (\angle A + \angle D) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

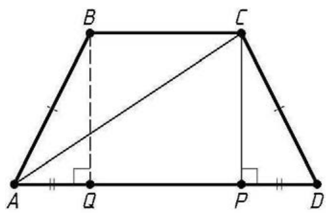
Следовательно, $AB \perp CD$.



Предположим, что $AD > BC$. Отрезки PM и QN — средние линии треугольников ABC и ABD, поэтому $PM = \frac{1}{2}AB$ и $QN = \frac{1}{2}AB$, значит, $PM = QN$. Аналогично $QM = PN$, поэтому $PMQN$ — параллелограмм. Кроме того, $PM \parallel AB$ и $QM \parallel CD$, а так как $AB \perp CD$, то $PM \perp QM$, значит, $PMQN$ — прямоугольник. Его диагонали MN и PQ равны, следовательно, $MN = PQ = \frac{AD - BC}{2}$.

5. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC $(AD > BC)$, P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из вершин C и B на AD. Из равенства прямоугольных треугольников ABQ и DCP следует, что $AQ = DP$, а так как $BCPQ$ — прямоугольник, то $PQ = BC$. Поэтому



$$DP = \frac{AD - PQ}{2},$$

$$AP = AD - DP = AD - \frac{AD - PQ}{2} = \frac{AD + BC}{2}.$$

6. Свойства окружности.

а) Диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам.

б) Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.

в) Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.

г) Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.

д) Хорды окружности, удалённые от центра на равные расстояния, равны.

е) Окружность симметрична относительно центра и относительно любого своего диаметра.

ж) Дуги окружности, заключённые между параллельными хордами, равны.

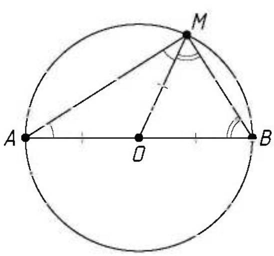
7. а) *Замечательное свойство окружности.* Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под прямым углом ($\angle AMB = 90^\circ$), есть окружность с диаметром AB без точек A и B.

б) Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под острым углом ($\angle AMB < 90^\circ$), есть внешность круга с диаметром AB без точек прямой AB.

в) Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под тупым углом ($\angle AMB > 90^\circ$), есть внутренность круга с диаметром AB без точек отрезка AB.

г) Геометрическое место точек, из которых отрезок AB виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей с общей хордой AB, лежащие по разные стороны от прямой AB, без точек A и B.

Доказательство. а) Пусть точка M, отличная от точек A и B, лежит на окружности с диаметром AB. Тогда медиана MO треугольника AMB равна половине стороны, к которой она проведена, поэтому $\angle AMB = 90^\circ$ (см. п. 3а).

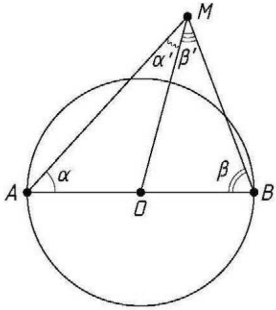


Пусть теперь данный отрезок AB виден из некоторой точки M под прямым углом (т. е. $\angle AMB = 90^\circ$). Тогда медиана MO прямоугольного треугольника AMB, проведённая к гипотенузе AB, равна половине гипотенузы (см. п. 3б), т. е. $OM = OA = OB$. Следовательно, точка M лежит на окружности с диаметром AB.

б, в) Докажем сначала, что для точки M, лежащей вне круга с диаметром AB, но не лежащей на прямой AB, угол AMB острый. Пусть O — середина AB. Тогда расстояние от точки M до центра окружности больше радиуса, т. е. $OM > OA$. Обозначим

$$\angle MAB = \alpha, \quad \angle MBA = \beta,$$

$$\angle AMB = \gamma, \quad \angle OMA = \alpha', \quad \angle OMB = \beta'.$$

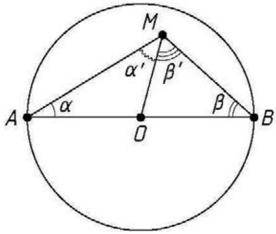


В треугольнике AOM угол OAM, лежащий против стороны OM, больше угла OMA, лежащего против стороны OA $(OA < OM)$, а так как в любом треугольнике против большей стороны лежит больший угол, то $\angle OMA < \angle OAM$, т. е. $\alpha' < \alpha$. Аналогично докажем, что $\beta' < \beta$. Тогда

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta < 180^\circ - \alpha' - \beta' = 180^\circ - \gamma.$$

Следовательно, $\gamma < 90^\circ$.

Теперь докажем, что для точки M, лежащей внутри этого круга, но не лежащей на прямой AB, угол AMB тупой.



Действительно, если точка M лежит внутри круга, то $OM < OA$, поэтому $\alpha' > \alpha$ и $\beta' > \beta$, значит,

$$\alpha + \beta < \alpha' + \beta' = \gamma,$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) > 180^\circ - (\alpha' + \beta') = 180^\circ - \gamma.$$

Следовательно, $\gamma > 90^\circ$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь отрезок AB виден из точки M под острым углом, т. е. $\gamma < 90^\circ$. Предположим, что точка M при этом лежит либо на окружности, либо внутри круга. Тогда по доказанному либо $\gamma = 90^\circ$, либо $\gamma > 90^\circ$, что противоречит предположению.

Аналогично докажем, что если для точки M угол AMB тупой, то точка M лежит внутри круга.

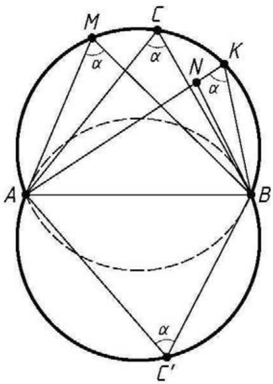
г) Пусть AB — данный отрезок, а данный угол равен α. Построим два треугольника ABC и ABC' так, чтобы точки C и C' лежали по разные стороны от прямой AB и выполнялось условие $\angle ACB = \angle AC'B = \alpha$. Опишем окружности около этих треугольников. Докажем, что искомое геометрическое место точек — это две дуги построенных окружностей: дуга AB описанной окружности треугольника ABC, содержащая точку C, и дуга AB описанной окружности треугольника ABC', содержащая точку C'.

Если точка M, отличная от A и B, лежит на первой из этих дуг, то по теореме о вписанных углах, опирающихся на одну и ту же дугу,

$$\angle AMB = \angle ACB = \alpha.$$

Аналогично для точки, лежащей на второй дуге.

Обратно, пусть точка N такова, что $\angle ANB = \alpha$. Предположим, что при этом точки N и C лежат по одну сторону от прямой AB. Дока-



жем, что точка N лежит на первой из построенных дуг. Допустим, что это не так. Если точка N расположена внутри окружности, то, продолжив отрезок AN за точку N, получим точку K пересечения луча AN с окружностью. Тогда

$$\angle AKB = \angle ACB = \alpha = \angle ANB,$$

что невозможно, так как угол ANB внешний для треугольника BKN, а тогда

$$\angle ANB = \angle AKB + \angle KBN > \angle AKB.$$

Аналогично для случая, когда точка N лежит вне окружности.

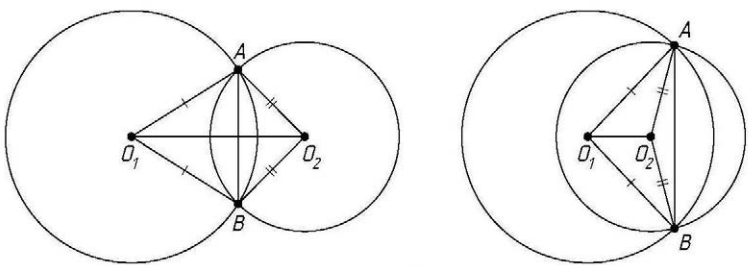
Если точки N и C лежат по разные стороны от прямой AB, то, рассуждая аналогично, докажем, что точка N лежит на второй из построенных дуг.

Таким образом, доказано, что из каждой точки построенных дуг (кроме A и B) отрезок AB виден под углом α, и обратно, если из какой-то точки отрезок AB виден под углом α, то эта точка лежит на одной из построенных дуг.

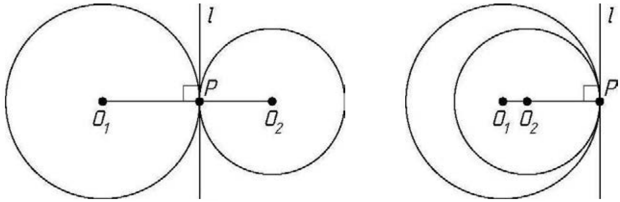
8. а) Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит её пополам.

б) Линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку касания.

Доказательство. а) Пусть окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Точки O_1 и O_2 равноудалены от концов отрезка AB, следовательно, O_1O_2 — серединный перпендикуляр к AB.



б) Пусть окружности с центрами O_1 и O_2 касаются в точке P. Тогда касательная l к одной из окружностей, проведённая через точку P, является касательной ко второй, значит, $O_1P \perp l$ и $O_2P \perp l$, а так как



через точку P, лежащую на прямой l, проходит единственная прямая, перпендикулярная l, то точки P, O_1 и O_2 лежат на одной прямой.

9. а) Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c, равен $\frac{a+b-c}{2}$.

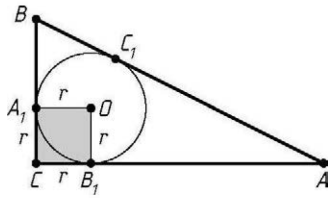
б) Если M — точка касания со стороной AC окружности, вписанной в треугольник ABC, то $AM = p - BC$, где p — полупериметр треугольника.

в) Если окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC, то расстояние от вершины A до точки касания окружности с прямой AB равно полупериметру треугольника ABC.

г) Если окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC соответственно в точках K, L и M, а $\angle BAC = \alpha$, то $\angle KLM = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

д) Если прямые, проходящие через точку A, касаются окружности S в точках B и C, то центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на окружности S.

е) Если расстояние между центрами окружностей радиусов r и R равно a и $a > R + r$, то отрезки общих внешних и общих внутренних касательных, заключённые между точками касания, равны соответственно $\sqrt{a^2 - (R-r)^2}$ и $\sqrt{a^2 - (R+r)^2}$.



Доказательство. а) Обозначим вершины треугольника, противолежащие сторонам a, b и c, через A, B и C соответственно, а точки касания с этими сторонами — соответственно A_1, B_1 и C_1.

Если O — центр данной окружности, то OA_1CB_1 — квадрат. Поэтому

$$CA_1 = r, \quad BC_1 = BA_1 = a - r, \quad AC_1 = AB_1 = b - r,$$
$$c = AB = AC_1 + C_1B = a + b - 2r.$$

Следовательно, $r = \frac{a+b-c}{2}$.

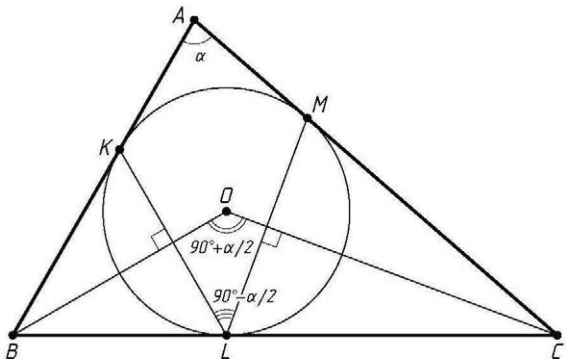
б, в) См. [2], с. 109.

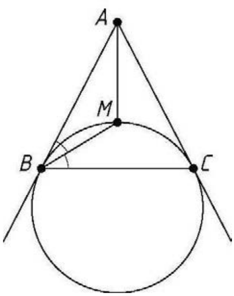
г) Пусть O — центр окружности. Тогда BO и CO — биссектрисы углов B и C треугольника ABC, поэтому

$$\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A = 90^\circ + \frac{\alpha}{2},$$

а так как $OB \perp KL$ и $OC \perp ML$, то

$$\angle KLM = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$





д) Пусть M — середина меньшей дуги BC. Докажем, что M — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

Действительно, AM — биссектриса угла A. Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что

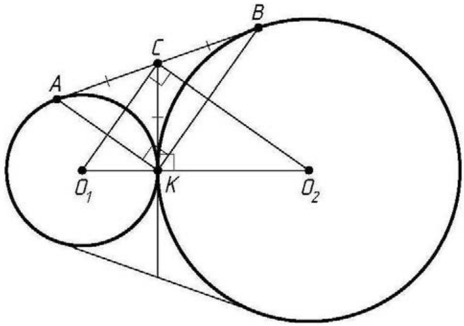
$$\angle MBA = \frac{1}{2}\smile MB = \frac{1}{2}\smile MC = \angle MBC,$$

Значит, BM также биссектриса треугольника ABC. Следовательно, M — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, т. е. центр его вписанной окружности.

е) См. [2], с. 78.

10. Если окружности радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K, а прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекается с общей касательной, проходящей через точку K, в точке C, то $\angle AKB = 90^\circ$ и $\angle O_1CO_2 = 90^\circ$, а отрезок AB общей внешней касательной окружностей равен отрезку общей внутренней касательной, заключённому между общими внешними. Оба эти отрезка равны $2\sqrt{Rr}$.

Доказательство. См. [2], с. 88.



11. а) Угол между касательной и хордой, проведённой через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключённой между ними.

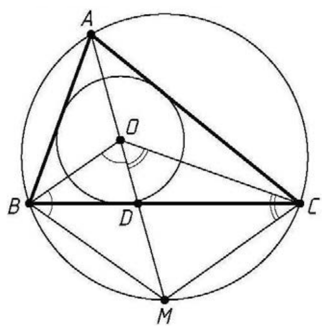
б) Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами.

в) Угол между двумя секущими равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности.

Доказательство. См. [2], с. 132—133.

12. а) Если прямая, проходящая через точку A и центр O вписанной окружности треугольника ABC, вторично пересекает описанную окружность этого треугольника в точке M, то треугольники BOM и COM равнобедренные.

б) *Формула Эйлера.* Если O_1, O_2 — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC, а r и R — радиусы этих окружностей, то $O_1O_2 = \sqrt{R^2 - 2rR}$.



Доказательство. а) Обозначим $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

Центр окружности, вписанной в треугольник, есть точка пересечения его биссектрис, значит, BO и AO — биссектрисы углов ABC и BAC, а так как BOM — внешний угол треугольника AOB, то

$$\angle BOM = \angle ABO + \angle BAO = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

Вписанные углы MBC и MAC опираются на одну и ту же дугу, поэтому

$$\angle OBM = \angle OBC + \angle MBC = \angle OBD + \angle MAC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Значит, $\angle BOM = \angle OBM$, следовательно, треугольник BOM равнобедренный.

Аналогично для треугольника COM.

б) Пусть A_1 — точка пересечения биссектрисы треугольника BAC, проведённой из вершины A, с описанной окружностью. Обозначим $\angle BAC = \alpha$. По доказанному в предыдущем пункте треугольник BO_1A_1 равнобедренный. По теореме об отрезках пересекающихся хорд

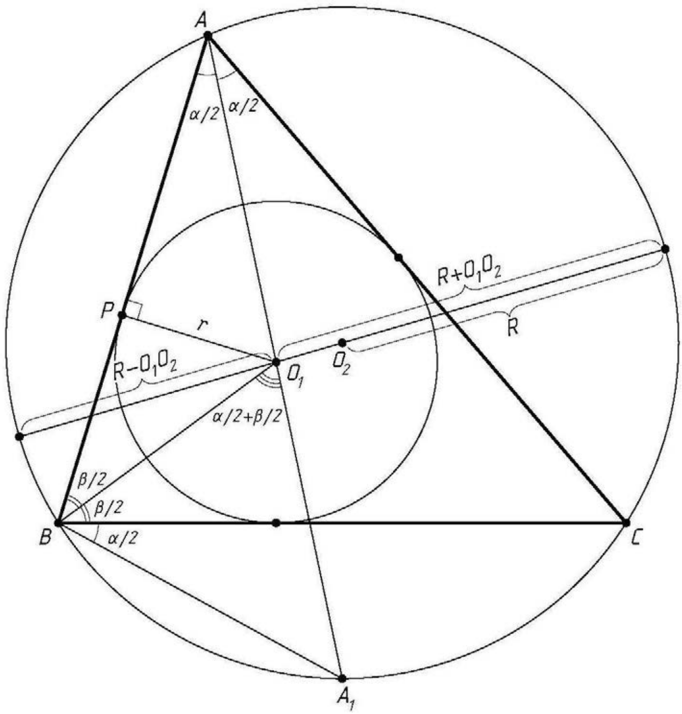
$$A_1O_1 \cdot O_1A = (R + O_1O_2)(R - O_1O_2) = R^2 - O_1O_2^2.$$

Пусть P — проекция точки O_1 на сторону AB. Тогда $O_1P = r$. Из прямоугольного треугольника AO_1P находим, что

$$O_1A = \frac{O_1P}{\sin \angle O_1AB} = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

а так как

$$A_1O_1 = BA_1 = 2R \sin \angle BAA_1 = 2R \sin \frac{\alpha}{2},$$



то

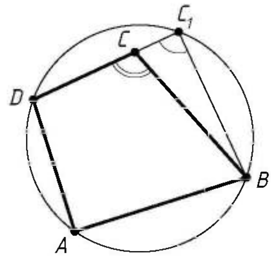
$$R^2 - O_1O_2^2 = O_1A \cdot A_1O_1 = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot 2R\sin\frac{\alpha}{2} = 2rR.$$

Следовательно, $O_1O_2^2 = R^2 - 2rR$.

13. а) Если четырёхугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°.

б) Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

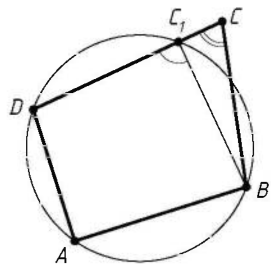
Доказательство. а) См. [2], с. 132.



б) Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник и $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$. Опишем окружность около треугольника ABD. Если точка C окажется на этой окружности, то утверждение доказано.

Пусть точка C находится внутри окружности. Продолжим луч DC до пересечения с окружностью в точке C_1. Тогда

$$\angle BC_1D + \angle BAD = 180^\circ$$



(свойство вписанного четырёхугольника). Поэтому $\angle BCD = \angle BC_1D$. Поскольку BCD — внешний угол треугольника CBC_1, то

$$\angle BCD = \angle BC_1D + \angle CBC_1 > \angle BC_1D,$$

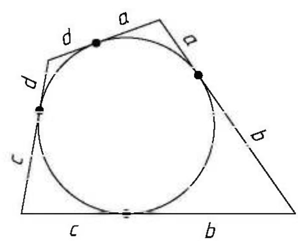
что невозможно.

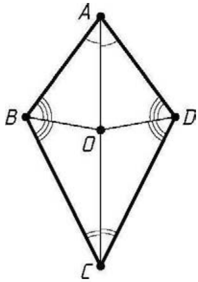
Аналогично для случая, когда C лежит вне окружности.

14. а) Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

б) Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.

Доказательство. а) Отрезки касательных, проведённых из одной точки к окружности, равны между собой. Точки касания делят каждую сторону четырёхугольника на две части. Обозначим последовательно их длины, используя одну букву для равных отрезков, начиная от какой-нибудь из вершин: a, b, b, c, c, d, d, a. Ясно, что суммы противоположных сторон состоят из одинаковых слагаемых.





б) Пусть в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB+CD=BC+AD$. Тогда $AB-AD=$ $=BC-CD$.

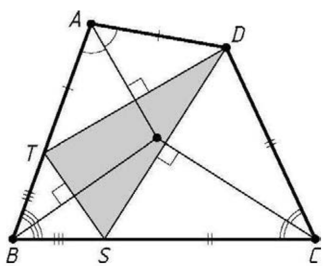
Если $AB=AD$, то $BC=CD$. Поэтому треугольники ABC и ADC равны по трём сторонам, значит, диагональ AC делит пополам углы BAD и BCD. Из равенства треугольников ABC и ADC и их соответствующих углов ABC и ADC следует, что биссектрисы этих углов пересекаются в некоторой точке O, лежащей на диагонали AC. Поскольку точка O лежит на биссектрисе каждого из углов четырёхугольника, то она равноудалена от всех его сторон. Следовательно, O — центр окружности, вписанной в четырёхугольник $ABCD$.

Пусть теперь $AB>AD$. Тогда $BC>CD$.

На отрезке AB возьмём такую точку T, для которой $AT=AD$, а на отрезке BC — такую точку S, для которой $CS=CD$. Поскольку

$$AT=AD, \quad CS=CD, \quad BT=AB-AT=AB-AD=BC-CD=BC-CS=BS,$$

то треугольники TBS, ADT и CDS равнобедренные. Биссектрисы их углов при вершинах B, A и C являются серединными перпендикулярами к отрезкам TS, DT и DS соответственно, т. е. серединными перпендикулярами к сторонам треугольника DTS. Поэтому биссектрисы углов B, A и C пересекаются в одной точке — центре описанной окружности треугольника DTS. Эта точка равноудалена от всех сторон четырёхугольника $ABCD$. Следовательно, она является центром вписанной окружности четырёхугольника $ABCD$.



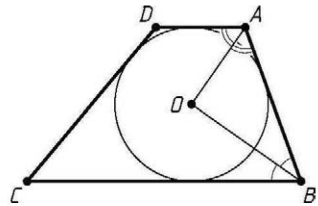
Аналогично для $AB<AD$.

15. а) Если в трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.

б) Если окружность вписана в равнобедренную трапецию, то боковая сторона трапеции равна её средней линии.

в) Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное (среднее геометрическое) отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.

Доказательство. а) Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC, O — центр её вписанной окружности. Тогда лучи AO и BO —



биссектрисы углов при боковой стороне трапеции. Сумма этих углов равна 180°, сумма их половин равна 90°. Следовательно, угол AOB прямой.

б) Пусть основания равнобедренной трапеции равны a и b, а боковая сторона равна c. Поскольку в трапецию вписана окружность, суммы противоположных сторон трапеции равны между собой, т. е. $a+b=2c$. Значит, боковая сторона трапеции равна средней линии:

$$c=\frac{2c}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

16. а) *Замечательное свойство трапеции.* Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

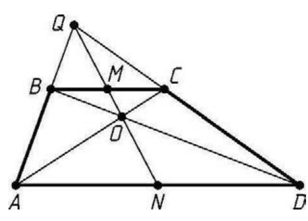
б) Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключённый внутри трапеции, разбивается её диагоналями на три части. Тогда отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны.

в) Если через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями a и b проведена прямая, параллельная основаниям, то отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами трапеции, равен $\frac{2ab}{a+b}$.

г) Если трапеция разделена прямой, параллельной её основаниям, равным a и b, на две равновеликие трапеции, то отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами, равен $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

д) Если трапеция разделена прямой, параллельной её основаниям, равным a и b, на две подобные трапеции, то отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами, равен $\sqrt{ab}$.

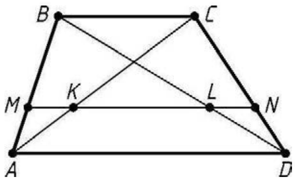
Доказательство. а) Пусть Q — точка пересечения продолжений боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$, M — середина меньшего основания BC, O — точка пересечения диагоналей AC и BD, N — точка пересечения прямой QM с большим основанием AD.



Из подобия треугольников QBM и QAN следует, что $\frac{QM}{QN}=\frac{BM}{AN}$, а из подобия треугольников QCM и QDN — что $\frac{QM}{QN}=\frac{CM}{DN}$. Поэтому $\frac{BM}{AN}=\frac{CM}{DN}$, а так как $BM=CM$, то $AN=DN$, т. е. N — середина AD.

Аналогично докажем, что прямая, проходящая через точку O пересечения диагоналей и середину одного из оснований, проходит через середину другого основания.

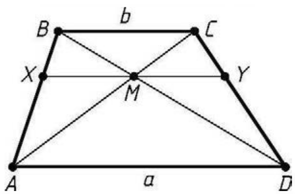
б) Пусть точки M и N расположены на боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$, $MN \parallel BC$, K и L — точки пересечения прямой MN с диагоналями AC и BD.



Треугольник AMK подобен треугольнику ABC, а треугольник DNL — треугольнику DCB, причём коэффициенты подобия одинаковы, так как $\frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DC}$. Следовательно,

$$MK = BC \cdot \frac{AM}{AB} = BC \cdot \frac{DN}{DC} = LN.$$

в) Пусть M — точка пересечения диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = b$, X и Y — точки пересечения данной прямой с боковыми сторонами AB и CD соответственно. Из подобия треугольников BMC и DMA находим, что



$$\frac{AM}{MC} = \frac{AD}{BC} = \frac{a}{b}.$$

Поэтому $\frac{AM}{AC} = \frac{a}{a+b}$.

Из подобия треугольников AMX и ACB находим, что

$$\frac{MX}{BC} = \frac{AM}{AC} = \frac{a}{a+b}.$$

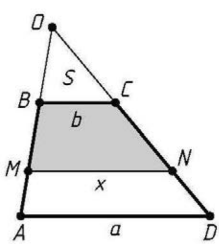
Поэтому

$$MX = \frac{a \cdot BC}{a+b} = \frac{ab}{a+b}.$$

Аналогично $MY = \frac{ab}{a+b}$. Следовательно,

$$XY = MX + MY = \frac{2ab}{a+b}.$$

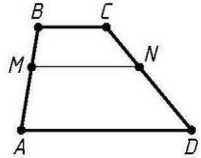
г) Пусть O — точка пересечения продолжений боковых сторон AB и DC трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = a$, $BC = b$, S — площадь треугольника BOC, $MN = x$ — искомый отрезок. Треугольник MON подобен треугольнику BOC с коэффициентом $\frac{x}{b}$, треугольник AOD подобен треугольнику BOC с коэффициентом $\frac{a}{b}$, при этом $S_{\triangle MON} - S = S_{\triangle AOD} - S_{\triangle MON}$, или



$$\frac{x^2}{b^2} \cdot S - S = \frac{a^2}{b^2} \cdot S - \frac{x^2}{b^2} \cdot S.$$

Отсюда находим, что $x^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$. Следовательно, $MN = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

д) Пусть точки M и N лежат на боковых сторонах соответственно AB и CD трапеции $ABCD$ с основаниями $AD=a$ и $BC=b$, причём $MN \parallel AD$ и трапеции $MBCN$ и $AMND$ подобны. Тогда $\frac{BC}{MN}=\frac{MN}{AD}$, откуда находим, что



$$MN^2 = AD \cdot BC = ab.$$

Следовательно, $MN=\sqrt{ab}$.

17. а) Если BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC, то треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC, причём коэффициент подобия равен $|\cos\angle A|$.

б) Если H — точка пересечения высот треугольника ABC, а O — центр его описанной окружности, то отрезок AH вдвое больше расстояния от точки O до стороны BC.

в) Точки O, H и точка M пересечения медиан треугольника ABC лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*), причём точка M лежит на отрезке OH и $OM:MH=1:2$.

г) Если BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC, а O — центр описанной окружности, то $OA \perp B_1C_1$.

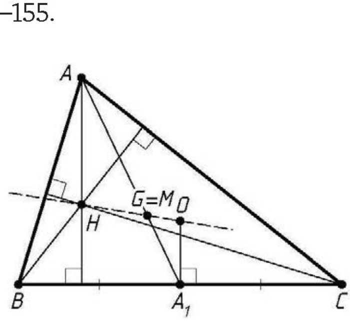
д) Точки, симметричные точке пересечения высот (ортоцентру) треугольника ABC относительно прямых AB, AC и BC, лежат на описанной окружности треугольника ABC.

е) Точки, симметричные точке пересечения высот треугольника ABC относительно середин его сторон, лежат на описанной окружности треугольника ABC.

ж) Если AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, то биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ (ортотреугольника треугольника ABC) лежат на прямых AA_1, BB_1 и CC_1. Если же треугольник ABC тупоугольный, то на этих прямых лежат биссектрисы двух внешних и третьего внутреннего углов треугольника $A_1B_1C_1$.

Доказательство. а, б) См. [2], с. 154—155.

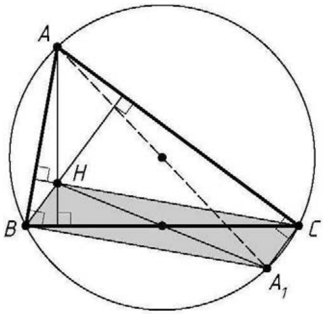
в) Пусть A_1 — середина стороны BC треугольника ABC, G — точка пересечения прямых AA_1 и OH. По доказанному в предыдущем пункте $AH = 2OA_1$.



Из подобия треугольников A_1GO и AGH следует, что

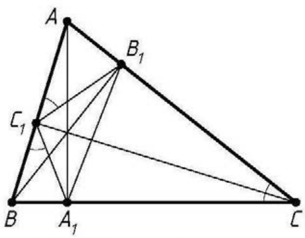
$$\frac{AG}{GA_1}=\frac{HG}{GO}=\frac{AH}{OA_1}=2.$$

Следовательно, G — точка пересечения медиан треугольника ABC, т. е. G совпадает с M и $MH = 2MO$.



г, д) См. [2], с. 156.

е) Пусть AA_1 — диаметр описанной окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Тогда $A_1C \perp AC$ и $BH \perp AC$, значит, $A_1C \parallel BH$. Аналогично $A_1B \parallel CH$, поэтому четырёхугольник HBA_1C — параллелограмм. Следовательно, его вершина A_1 симметрична вершине H относительно середины диагонали BC.



ж) Пусть A_1, B_1 и C_1 — основания высот остроугольного треугольника ABC, проведённых из вершин A, B и C соответственно. Тогда

$$\angle AC_1B_1 = \angle ACB, \quad \angle BC_1A_1 = \angle ACB.$$

Поэтому

$$\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1.$$

Следовательно,

$$\angle B_1C_1C = 90^\circ - \angle AC_1B_1 = 90^\circ - \angle BC_1A_1 = \angle A_1C_1C.$$

Точно так же получаем

$$\angle A_1B_1B = \angle C_1B_1B, \quad \angle B_1A_1A = \angle C_1A_1A.$$

Аналогично можно доказать соответствующее утверждение для тупоугольного треугольника.

18. а) Произведения отрезков пересекающихся хорд окружности равны.

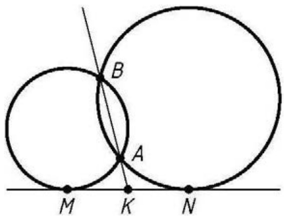
б) *Теорема о касательной и секущей и следствие из неё.* Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной.

Произведение всей секущей на её внешнюю часть для данной точки и данной окружности постоянно.

в) Прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.

г) Общие хорды (или их продолжения) трёх попарно пересекающихся окружностей проходят через одну точку либо параллельны.

Доказательство. а, б) См. [2], с. 121—122.

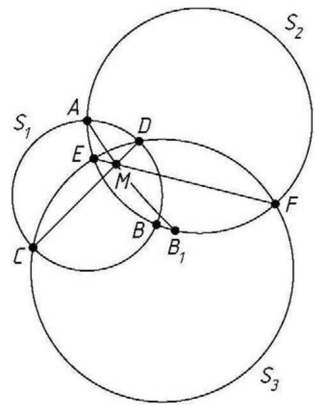


в) Пусть A и B — точки пересечения двух окружностей, MN — общая касательная (M и N — точки касания), K — точка пересечения прямых AB и MN (A между K и B). Тогда

$$MK^2 = KB \cdot KA \quad \text{и} \quad NK^2 = KB \cdot KA.$$

Следовательно, $MK = NK$.

г) Пусть окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B, окружности S_1 и S_3 — в точках C и D, окружности S_2 и S_3 — в точках E и F. Рассмотрим случай, когда попарно пересекаются отрезки AB, CD и EF.



Если M — точка пересечения отрезков CD и EF, то по теореме о произведениях отрезков пересекающихся хорд

$$CM \cdot MD = EM \cdot MF.$$

Через точки A и M проведём прямую, вторично пересекающую окружность S_2 в точке B_1. Тогда хорды AB_1 и EF окружности S_2 пересекаются в точке M, поэтому

$$AM \cdot MB_1 = EM \cdot MF = CM \cdot MD.$$

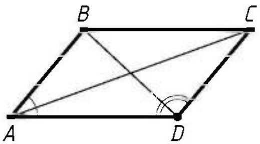
Значит, точки A, B_1, C и D лежат на одной окружности, а так как через точки A, C и D проходит единственная окружность S_1, то точка B_1 лежит на окружности S_1. Таким образом, точка B_1 является общей точкой окружностей S_1 и S_2, отличной от точки A. Значит, точка B_1 совпадает с точкой B. Следовательно, хорда AB проходит через точку пересечения хорд CD и EF.

Аналогично для случая когда пересекаются продолжения отрезков AB, CD и EF.

19. *Средние пропорциональные в прямоугольном треугольнике.* Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное (среднее геометрическое) проекций катетов на гипотенузу, а каждый катет есть среднее пропорциональное гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.

20. а) *Следствие из теоремы косинусов.* Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

б) *Формула для медианы треугольника.* Если m_c — медиана треугольника, проведённая к стороне c, то $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, где a и b — остальные стороны треугольника.



Доказательство. а) Пусть AC и BD — диагонали параллелограмма $ABCD$. По теореме косинусов из треугольников ABD и ACD находим, что

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos\angle BAD,$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos\angle ADC =$$
$$= AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos(180^\circ - \angle BAD) =$$
$$= AD^2 + CD^2 + 2AD \cdot CD \cos\angle BAD.$$

Следовательно,

$$BD^2 + AC^2 = 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot AD^2.$$

б) См. [2], с. 16.

21. *Формулы для биссектрисы треугольника.* Если a и b — стороны треугольника, γ — угол между ними, l — биссектриса треугольника, проведённая из вершины этого угла, а a' и b' — отрезки, на которые биссектриса делит третью сторону треугольника, то: а) $l = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$;

б) $l^2 = ab - a'b'$.

Доказательство. а) См. [2], с. 46.

б) См. [2], с. 47.

22. *Формулы для площади треугольника.* Если a, b и c — стороны треугольника, α, β и γ — противолежащие им углы, h_a, h_b и h_c — высоты, проведённые из вершин этих углов, p — полупериметр треугольника, R — радиус описанной окружности, r, r_a, r_b и r_c — радиусы вписанной и вневписанной окружностей, касающихся сторон a, b и c соответственно, а S — площадь треугольника, то

$$\text{а) } S = \frac{1}{2}ah_a; \quad \text{б) } S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma; \quad \text{в) } S = \frac{abc}{4R};$$

$$\text{г) } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (формула Герона)}; \quad \text{д) } S = pr;$$

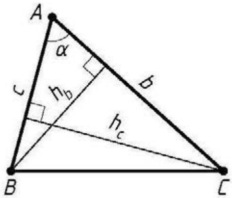
$$\text{е) } S = (p-a)r_a; \quad \text{ж) } S = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma; \quad \text{з) } S = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)};$$

$$\text{и) } S = \frac{h_bh_c}{2\sin\alpha}; \quad \text{к) } S = \sqrt{rr_ar_br_c}.$$

Доказательство. е) См. [2], с. 110.

ж) По теореме синусов $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$. Следовательно,

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot 2R\sin\alpha \cdot 2R\sin\beta\sin\gamma = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$



и) Поскольку $b=\dfrac{h_c}{\sin\alpha}$ и $c=\dfrac{h_b}{\sin\alpha}$, то

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{h_c}{\sin\alpha}\cdot\frac{h_b}{\sin\alpha}\cdot\sin\alpha=\frac{h_bh_c}{2\sin\alpha}.$$

к) По формуле Герона

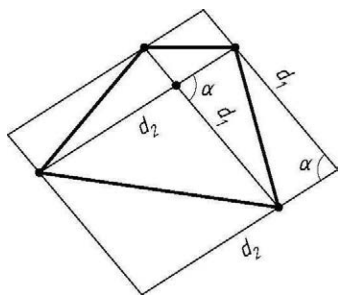
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{\frac{S}{r}\cdot\frac{S}{r_a}\cdot\frac{S}{r_b}\cdot\frac{S}{r_c}}=\sqrt{\frac{S^4}{rr_ar_br_c}}=\frac{S^2}{\sqrt{rr_ar_br_c}}.$$

Отсюда находим, что $S=\sqrt{rr_ar_br_c}$.

23. а) Площадь четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями равна половине произведения диагоналей.

б) Площадь любого четырёхугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

Доказательство. б) Через каждую из двух противоположных вершин четырёхугольника проведём прямые, параллельные диагонали, соединяющей две другие вершины. То же проделаем для двух других вершин. Получим параллелограмм, стороны которого равны диагоналям данного четырёхугольника. Угол между соседними сторонами полученного параллелограмма равен углу между диагоналями данного четырёхугольника, а площадь вдвое больше. Поскольку площадь параллелограмма равна произведению двух соседних сторон на синус угла между ними, то площадь данного четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.



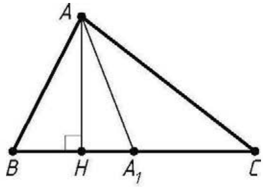
24. а) Медиана разбивает треугольник на два равновеликих.

б) Три медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих.

в) Если площадь треугольника равна S, то площадь треугольника, составленного из его медиан, равна $\frac{3}{4}S$.

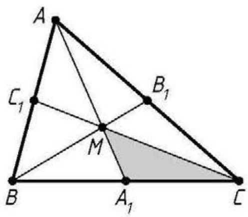
г) Если точка D лежит на стороне BC треугольника ABC или на её продолжении, то $\dfrac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\dfrac{BD}{DC}$.

д) Если точки P и Q лежат на сторонах AB и AC или на их продолжениях, то $\dfrac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{AP}{AB}\cdot\dfrac{AQ}{AC}$.



Доказательство. а) Пусть AA_1 — медиана треугольника ABC, AH — высота. Тогда

$$S_{\Delta ACA_1} = \frac{1}{2}CA_1 \cdot AH = \frac{1}{2}BA_1 \cdot AH = S_{\Delta BAA_1}.$$

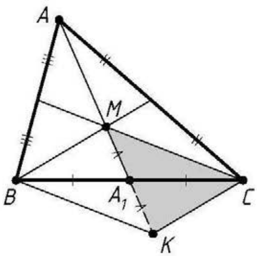


б) Пусть M — точка пересечения медиан AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC. Тогда

$$S_{\Delta A_1MC} = \frac{1}{3}S_{\Delta A_1AC} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}\right) = \frac{1}{6}S_{\Delta ABC}.$$

Аналогично для остальных пяти треугольников.

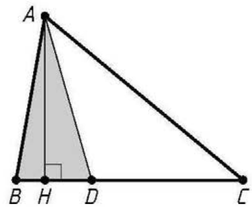
в) Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, A_1 — середина стороны BC.



Отложим на продолжении медианы AA_1 за точку A_1 отрезок A_1K, равный A_1M. Поскольку $BMCK$ — параллелограмм, то $KC = BM$. Поэтому стороны треугольника MCK равны $\frac{2}{3}$ сторон треугольника, составленного из медиан треугольника ABC.

Следовательно, искомый треугольник подобен треугольнику MCK с коэффициентом $\frac{3}{2}$, а его площадь равна $\frac{9}{4}$ площади треугольника MCK, т. е.

$$\frac{9}{4} \cdot 2 \cdot \frac{1}{6}S = \frac{3}{4}S.$$



г) Пусть AH — высота треугольника ABC. Тогда

$$S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}CD \cdot AH, \quad S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot AH.$$

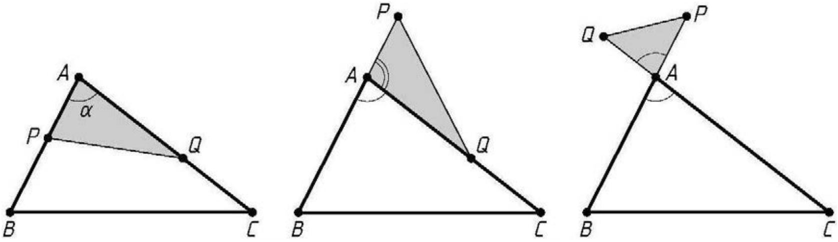
Следовательно,

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{\frac{1}{2}BD \cdot AH}{\frac{1}{2}CD \cdot AH} = \frac{BD}{CD}.$$

д) Поскольку площадь треугольника равна половине произведения двух сторон на синус угла между ними, то

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\alpha,$$

$$S_{\Delta APQ} = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot AQ \cdot \sin\angle BAC = \frac{1}{2}AP \cdot AQ \cdot \sin\alpha,$$

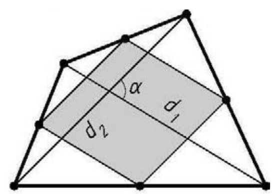


где α либо равен углу $\angle BAC$, либо дополняет его до 180°. Тогда

$$\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AP\cdot AQ\cdot\sin\alpha}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\alpha} = \frac{AP}{AB}\cdot\frac{AQ}{AC}.$$

25. а) Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, причём площадь параллелограмма вдвое меньше площади четырёхугольника.

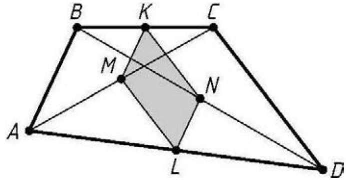
б) Середины двух противоположных сторон любого четырёхугольника и середины его диагоналей либо являются вершинами параллелограмма, либо лежат на одной прямой.



Доказательство. а) Пусть d_1 и d_2 — диагонали данного четырёхугольника, α — угол между ними. Четырёхугольник с вершинами в серединах сторон данного — параллелограмм со сторонами $\frac{1}{2}d_1$ и $\frac{1}{2}d_2$ и углом α между ними (см. [2], с. 24). Его площадь равна

$$\frac{1}{2}d_1\cdot\frac{1}{2}d_2\sin\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha\right) = \frac{1}{2}S.$$

б) Пусть L и K — середины сторон AD и BC четырёхугольника $ABCD$, M и N — середины его диагоналей AC и BD и при этом точки L, K, N, M не лежат на одной прямой. Тогда LM — средняя линия треугольника CAD, а NK — средняя линия треугольника CBD. Поэтому $LM = \frac{1}{2}CD = KN$ и $LM \parallel CD \parallel KN$. Значит, противоположные стороны ML и KN четырёхугольника $MLNK$ равны и параллельны. Следовательно, этот четырёхугольник — параллелограмм.



26. Диагонали четырёхугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов противоположных сторон равны.

Доказательство (для выпуклого четырёхугольника). *Необходимость.* Пусть диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Если P — их точка пересечения, то по теореме Пифагора

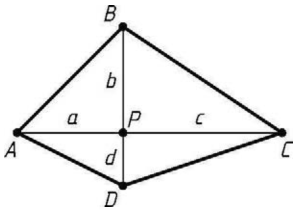
$$AB^2 - AP^2 = BC^2 - CP^2, \quad \text{или} \quad AB^2 - BC^2 = AP^2 - CP^2.$$

Аналогично докажем, что

$$AD^2 - CD^2 = AP^2 - CP^2.$$

Следовательно,

$$AB^2 - BC^2 = AD^2 - CD^2, \quad \text{или} \quad AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2.$$



Достаточность. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ известно, что

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2,$$

а диагонали AC и BD пересекаются в точке P. Обозначим

$$PA = a, \quad PB = b, \quad PC = c,$$
$$PD = d, \quad \angle APB = \alpha.$$

Тогда

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha, \quad CD^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\alpha,$$
$$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180^\circ - \alpha) = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha,$$
$$AD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos(180^\circ - \alpha) = a^2 + d^2 + 2ad\cos\alpha,$$

а так как по условию $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$, то

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab\cos\alpha - 2cd\cos\alpha =$$
$$= b^2 + c^2 + a^2 + d^2 + 2bc\cos\alpha + 2ad\cos\alpha,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2(ab + cd)\cos\alpha = b^2 + c^2 + a^2 + d^2 + 2(bc + ad)\cos\alpha,$$
$$(ab + cd + bc + ad)\cos\alpha = 0,$$

причём $ab + cd + bc + ad \neq 0$. Следовательно, $\cos\alpha = 0$ и $AC \perp BD$.

27. Если диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность радиуса R с центром O, пересекаются в точке P и перпендикулярны, то:

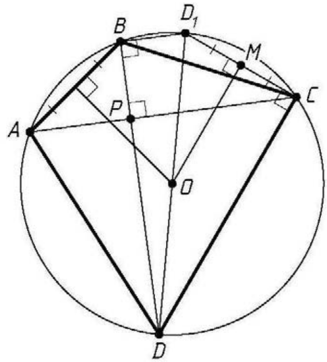
а) расстояние от точки O до стороны AB вдвое меньше стороны CD;

б) медиана PM треугольника APD перпендикулярна стороне BC;

в) $AB^2 + CD^2 + AD^2 + BC^2 = 8R^2$, $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4R^2$;

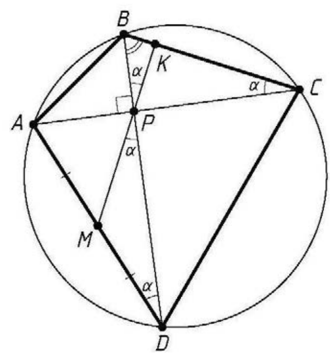
г) площадь четырёхугольника $ABCD$ равна $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD)$, причём для любого другого четырёхугольника $ABCD$ с теми же сторонами площадь меньше, чем $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD)$.

Доказательство. а) Проведём диаметр DD_1. Тогда $\angle DBD_1 = 90^\circ$, поэтому $BD_1 \parallel AC$, значит, $CD_1 = AB$. Перпендикуляр, опущенный из центра O на хорду CD_1, проходит через середину M этой хорды, поэтому OM — средняя линия треугольника DD_1C, $OM = \frac{1}{2}CD$. Поскольку равные хорды равноудалены от центра окружности, то расстояние от центра окружности до хорды AB также равно $\frac{1}{2}CD$.



б) Пусть K — точка пересечения прямой PM с отрезком BC. Обозначим $\angle MPD = \angle KPB = \alpha$.

Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, поэтому треугольник PMD равнобедренный, значит, $\angle ADB = \alpha$.



Вписанные углы ACB и ADB опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle PCB = \angle ACB = \angle ADB = \alpha$. Из прямоугольного треугольника BCP находим, что $\angle CBP = 90^\circ - \angle PCB = 90^\circ - \alpha$. Следовательно,

$$\angle BKP = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ,$$

т. е. $MK \perp BC$, что и требовалось доказать.

в) Проведём диаметр DD_1. Поскольку $BD \perp BD_1$ и $BD \perp AC$, то $BD_1 \parallel AC$, поэтому $CD_1 = AB$. Из прямоугольного треугольника DCD_1 находим, что

$$CD_1^2 + CD^2 = DD_1^2 = 4R^2.$$

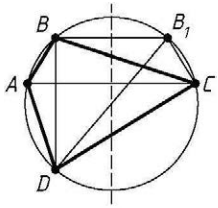
Поэтому

$$AB^2 + CD^2 = 4R^2.$$

Аналогично $BC^2 + AD^2 = 4R^2$. Следовательно,

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 4R^2 + 4R^2 = 8R^2,$$

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = (PA^2 + PB^2) + (PC^2 + PD^2) = AB^2 + DC^2 = 4R^2.$$

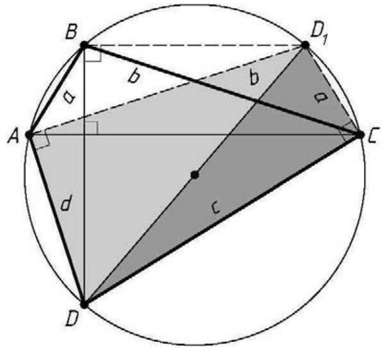


г) Пусть $ABCD$ — произвольный четырёхугольник со сторонами $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AD=d$. Рассмотрим четырёхугольник AB_1CD, где точка B_1 симметрична вершине B относительно серединного перпендикуляра к диагонали AC. Тогда

$$S_{ABCD}=S_{AB_1CD}=\frac{1}{2}CB_1\cdot CD\sin\angle B_1CD+\frac{1}{2}B_1A\cdot AD\sin\angle B_1AD\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}CB_1\cdot CD+\frac{1}{2}B_1A\cdot AD=\frac{ac+bd}{2}.$$

Равенство достигается, если $\angle B_1CD=\angle B_1AD=90^\circ$, т. е. четырёхугольник AB_1CD вписанный, причём его два противоположных угла равны по 90°.

Поскольку диагональ AC видна из точек B и B_1 под одним углом, четырёхугольник $ABCD$ вписан в ту же окружность, а так как $AC\parallel BB_1$ и B_1D — диаметр, то угол между AC и BD равен углу B_1BD, т. е. 90°.



Обратно, пусть четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AD=d$ вписан в окружность и его диагонали AC и BD перпендикулярны. Проведём диаметр DD_1. Тогда

$$AD_1=BC=b,\quad CD_1=AB=a,\quad \angle DAD_1=\angle DCD_1=90^\circ,$$
$$S_{ABCD}=S_{AD_1CD}=S_{\Delta DAD_1}+S_{\Delta DCD_1}=\frac{1}{2}AD\cdot AD_1+\frac{1}{2}CD\cdot CD_1=\frac{ac+bd}{2}.$$

28. Две окружности касаются внутренним образом в точке M. Если AB — хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке T, то MT — биссектриса угла AMB.

Доказательство. Если хорда AB параллельна общей касательной окружностей, проходящих через точку M, то утверждение очевидно.

Пусть луч AB пересекает общую касательную в точке C (B лежит между A и C). Обозначим

$$\angle CMT = \varphi, \quad \angle CMB = \alpha, \quad \angle AMT = \gamma.$$

Тогда $CM = CT$ как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, значит, треугольник MCT равнобедренный. Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что

$$\angle MAT = \angle CMB = \alpha.$$

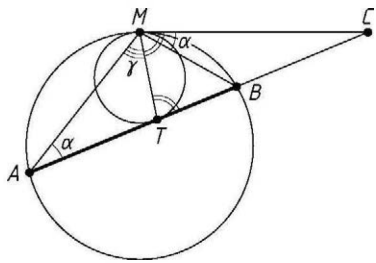
Поэтому

$$\angle CTM = \angle CMT = \varphi, \quad \angle MTB = \alpha + \gamma = \varphi$$

(внешний угол треугольника AMT). Следовательно,

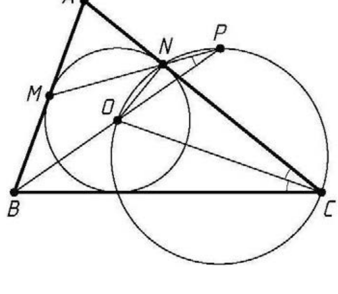
$$\angle TMB = \varphi - \alpha = \gamma,$$

т. е. MT — биссектриса угла AMB.



29. Если вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках M и N, а P — точка пересечения прямой MN с биссектрисой угла B, то $\angle BPC = 90^\circ$.

Доказательство. Пусть O — центр вписанной окружности; α, β, γ — углы треугольника при вершинах A, B, C соответственно. Тогда



в треугольнике MPB известно, что

$$\angle PBM = \frac{\beta}{2}, \quad \angle BMP = 180^\circ - \angle AMN = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому

$$\angle MPB = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2}.$$

Следовательно, отрезок ON виден из точек P и C под одним и тем же углом. Значит, точки O, N, P и C лежат на одной окружности, а так как $ON \perp AC$, то OC — диаметр этой окружности. Следовательно, $\angle BPC = \angle OPC = 90^\circ$.

30. *Окружность Аполлония.* Геометрическое место точек, расстояния от каждой из которых до двух данных точек относятся как $m:n$ $(m \neq n)$, есть окружность.

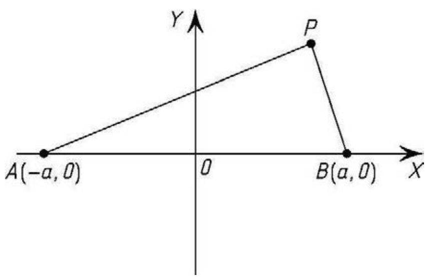
Доказательство. Введём систему координат на плоскости так, чтобы точки A и B имели координаты $(-a; 0)$ и $(a; 0)$ соответственно. Если точка P имеет координаты $(x; y)$, то

$$\frac{AP^2}{BP^2} = \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Последнее уравнение приводится к виду

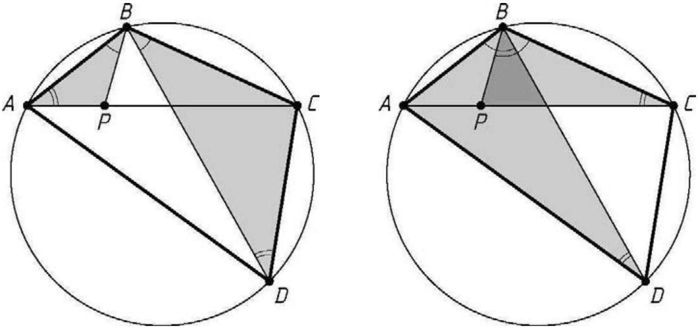
$$\left(x + \frac{a(m^2+n^2)}{n^2-m^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2mn}{n^2-m^2}\right)^2.$$

Это уравнение окружности с центром $\left(\frac{a(m^2+n^2)}{m^2-n^2}; 0\right)$ и радиусом $\frac{2mn}{|m^2-n^2|}$.



31. *Теорема Птолемея.* Сумма произведений противоположных сторон вписанного четырёхугольника равна произведению его диагоналей.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, вписанный в окружность. Отложим от луча BA в полуплоскости, содержащей точку A, луч BP так, что $\angle ABP = \angle CBD$ (P — на AC).



Треугольники ABP и DBC подобны по двум углам. Поэтому

$$\frac{AB}{AP}=\frac{BD}{CD} \Rightarrow AB\cdot CD = AP\cdot BD.$$

Поскольку

$$\angle ABD = \angle ABP + \angle PBD = \angle CBD + \angle PBD = \angle PBC, \quad \angle BDA = \angle BCP,$$

треугольники PBC и ABD также подобны по двум углам. Поэтому

$$\frac{BC}{PC}=\frac{BD}{AD} \Rightarrow BC\cdot AD = PC\cdot BD.$$

Сложив почленно эти равенства, получим, что

$$AB\cdot CD + BC\cdot AD = AP\cdot BD + BD\cdot PC = BD\cdot(AP+PC) = BD\cdot AC.$$

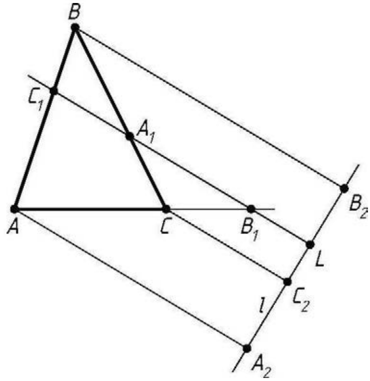
32. *Теорема Менелая.* Дан треугольник ABC. Некоторая прямая пересекает стороны AB, BC и AC (или их продолжения) в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Тогда

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1.$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда точки C_1 и A_1 лежат на сторонах AB и BC, а точка B_1 — на продолжении стороны AC за точку C. Для остальных случаев доказательство аналогично.

Проведём произвольную прямую l, пересекающую прямую A_1C_1 в точке L. Через точки A, B и C проведём прямые, параллельные прямой A_1C_1. Пусть A_2, B_2, C_2 — точки пересечения этих прямых с прямой l. Тогда по теореме о пропорциональных отрезках

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{B_2L}{LC_2}, \quad \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{C_2L}{LA_2}, \quad \frac{AC_1}{C_1B}=\frac{A_2L}{LB_2}.$$



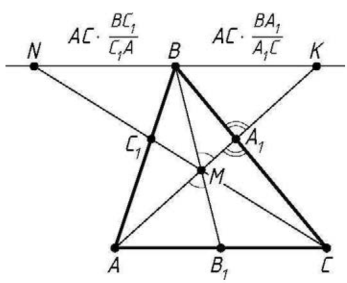
Следовательно,

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{B_2L}{LC_2} \cdot \frac{C_2L}{LA_2} \cdot \frac{A_2L}{LB_2} = 1.$$

33. *Теорема Чевы.* Пусть точки A_1, B_1 и C_1 принадлежат сторонам (или их продолжениям) соответственно BC, AC и AB треугольника ABC. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда точки A_1, B_1 и C_1 лежат на сторонах треугольника, а не на их продолжениях. Пусть отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M. Проведём через вершину B прямую, параллельную AC, и продолжим отрезки AA_1 и CC_1 до пересечения с этой прямой в точках K и N соответственно.



Из подобия треугольников BA_1K и CA_1A следует, что

$$BK = AC \cdot \frac{BA_1}{A_1C}.$$

Аналогично
$$BN = AC \cdot \frac{BC_1}{C_1A}.$$
Тогда
$$\frac{AB_1}{BK} = \frac{B_1M}{MB} = \frac{CB_1}{BN}.$$
Следовательно,
$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{BK}{BN} = \frac{\frac{BA_1}{A_1C}}{\frac{BC_1}{C_1A}} = \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{C_1A}{BC_1}.$$
Поэтому
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

Обратно: пусть
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$
Предположим, что прямая, проходящая через вершину B и точку пересечения отрезков AA_1 и CC_1, пересекает сторону AC в точке P. Тогда по доказанному
$$\frac{AP}{PC} = \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{AC_1}{C_1B},$$
а так как по условию
$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{AC_1}{C_1B},$$
получаем
$$\frac{AP}{PC} = \frac{AB_1}{B_1C}.$$
Следовательно, точки P и B_1 совпадают.

Для любого другого расположения точек A_1, B_1 и C_1 на прямых BC, AC и AB соответственно доказательство аналогично.

Содержание